Matemáticas II

Selectividad 2022

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-055911

Fecha y hora de registro: 2014-10-30 16:19:59.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

 **Reconeixement – NoComercial – CompartirIgual (by-nc-sa).**

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

 **Reconocimiento** (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

 **No Comercial (Non commercial)**: La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

 **Compartir Igual (Share alike):** La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9





MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Zambrana Aguilar y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021–2022.

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en dos bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-1\\ ax+b & \text{si} \quad -1\le x<1\\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$

a) Calcula a y b. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada de las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad x<0\\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**.

BY NC SA

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,75 puntos)**

b) Para $m=2$ resuelve el sistema si es posible. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m\geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 puntos)**

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto $A(-4,4,7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera la recta $r\equiv x-2=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, así como la recta s, determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1.A:

Considera la función continua f definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-1\\ ax+b & \text{si} \quad -1\le x<1\\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$

a) Calcula a y b. (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1,5 puntos)

Solución:

a) f es una función definida a trozos, y como la continuidad de una función solo se estudia en los puntos del dominio de dicha función, observamos que los puntos donde la continuidad de la función es cuestionable son los puntos donde la gráfica de la función cambia de rama, éstos son los puntos $x=-1$ y $x=1$. Sin embargo, contamos con la certeza de que f es una función continua, por lo tanto, sabemos que:

$$1.\quad \exists f(x_0)$$

$$2.\quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \pm\infty$$

$$3.\quad f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Donde x_0 es cualquier punto del dominio de la función. En nuestro caso, nos interesa particularmente los puntos que tienen por abscisa las nombradas anteriormente. Estudiémoslas por separado:

- Para $x=-1$: $f(-1)=a\cdot(-1)+b=b-a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax+b)=b-a\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x}=-1\end{cases}$$

Como por ser continua en $x=-1$ debe ser obligatorio la existencia $\lim_{x\to -1} f(x)$, la cual se da si y solo si coinciden los límites laterales, igualamos los resultados obtenidos en cada uno, llegando a que

$$b-a=-1 \qquad (1)$$

BY NC SA

♦ Para $x=1$: $f(1)=\dfrac{1^2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=a+b\end{cases}$$

Por el mismo razonamiento obtenemos la siguiente igualdad:

$$a+b=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Relacionando las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{cases}-a+b=-1\\ a+b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{r}-a+b=-1\\ a+b=\dfrac{1}{2}\quad +\\ \hline 2b=\dfrac{1}{2}-1\end{array}\Rightarrow b=-\frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor encontrado en cualquiera de las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$a=\frac{3}{4}$$

Solución: $a=\dfrac{3}{4};\ b=-\dfrac{1}{4}$

b) Comenzamos estudiando las asíntotas horizontales de f:

A.H.: las estudiamos calculando el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=+\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Conclusión: existe una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$. La ecuación de la asíntota horizontal es $y=0$.

A.V.: por ser una función continua en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar la no existencia de ninguna asíntota vertical.

BY NC SA

A.O.: las asíntotas oblicuas de una función solo hace falta estudiarlas cuando no existen las asíntotas horizontales. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Conclusión: existe una asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$. La ecuación de la asíntota oblicua es $y=x-1$.

Solución: **f tiene una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$ en la recta $y=0$. f tiene una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ sobre la recta $y=x-1$. f no tiene asíntotas verticales debido a que es continua.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Este ejercicio es muy común en Selectividad. La resolución del primer apartado no muestra especial dificultad más allá de saber interpretar correctamente el trozo de función que tenemos que evaluar en el límite en cada caso. En el segundo apartado es de gran ayuda darse cuenta de que no existen asíntotas horizontales porque, según el enunciado, f es continua. Es importante recordar también que solo hallaremos las asíntotas oblicuas cuando no existan asíntotas horizontales, por lo que, al existir una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$, no calculamos $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ni $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

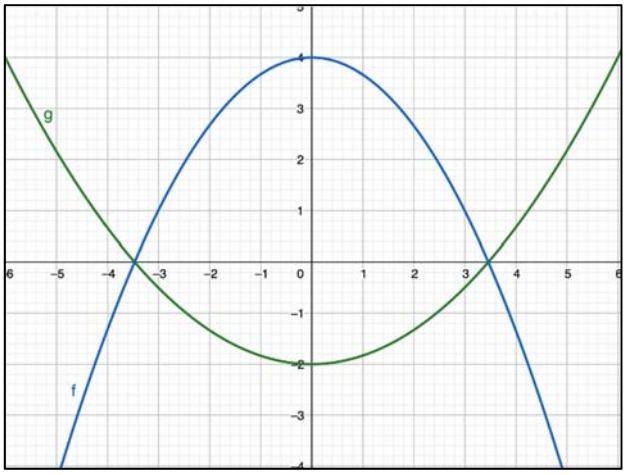
BY NC SA

Ejercicio 2.A:

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada de las funciones $f, g: \square \to \square$, definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

Solución:

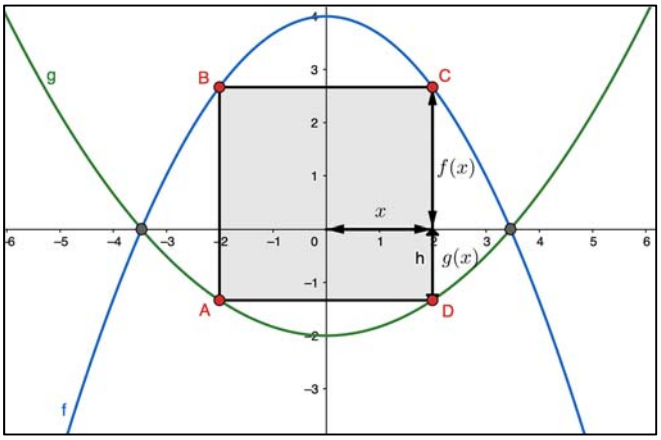
Primero vamos a realizar un esbozo de las gráficas de $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$:



A tener en cuenta

Antes de hacer el esbozo debes notar que en la gráfica deberán quedarte **dos parábolas**, pues ambas funciones son **cuadráticas**, y que f **quedará por encima de** g **en el recinto de interés** (fuera es justamente al contrario), puesto que el coeficiente de x^2 de f es negativo y el de g es positivo, y además $f(0) > g(0)$. Si tu esbozo no cumple estas características resulta conveniente revisarlo y corregirlo.

Vamos ahora a dibujar un rectángulo de lados paralelos a los ejes que se encuentre dentro del recinto.



Llamando b a la base del rectángulo, h a su altura y considerando la función $A(b,h)$, que nos da el área del rectángulo, definida por $A(b,h) = b \cdot h$, tenemos que:

BY NC SA

Gracias al dibujo anterior podemos notar como:

$b = x + |-x| = 2x$ y $h = f(x) + |g(x)| = f(x) - g(x)$, con $x > 0$. Por lo tanto:

$$A(x) = 2x \cdot \left[4 - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{6} - 2 \right) \right] \Rightarrow A(x) = 12x - x^3$$

A continuación, procedemos a derivar la función que nos da el área del rectángulo buscado para conocer los candidatos a máximos y mínimos de la función $A(x)$.

$A'(x) = -3x^2 + 12$. Como la derivada en un máximo o en un mínimo se anula, igualamos $A'(x)$ a 0.

$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$. La restricción $x > 0$ impuesta al principio obliga a descartar x_2. Por lo tanto, el único candidato a máximo de la función será el punto $M(2, f(2))$. Sin embargo, aún no podemos asegurarlo, necesitamos para ello aplicar el **Criterio de la Segunda Derivada** o bien, armar una **tabla de valores**.

- Criterio de la Segunda Derivada: $A''(x) = 12 - 3x^2$. Evaluamos la segunda derivada en $x = 2 \Rightarrow A''(2) = 0$. Al anularse la segunda derivada en $x = 2$ podemos asegurar que el criterio no es concluyente y por lo tanto hay que aplicar el Criterio de la Tercera Derivada (o de las siguientes derivadas) o bien ir a la tabla de valores. Hallamos la tercera derivada $A'''(x) = -6x$, que resulta ser $A'''(2) < 0 \Rightarrow$ Máximo.

- Tabla de valores. Criterio de la Primera Derivada: Vamos a estudiar el signo de la derivada para valores cercanos a $x = 2$ por derecha y por izquierda.

	$x = 2^-$	$x = 2$	$x = 2^+$
$\text{sgn}[A'(x)]$	$A'(x) > 0$	$A'(x) = 0$	$A'(x) < 0$
Conclusión: en $x = 2$, $A(x)$ alcanza un máximo relativo.			

Por lo tanto, el área máxima se obtiene cuando $x = 2$. En este caso, las dimensiones del rectángulo son: $b = 2 + 2 = 4u$; $h = 4 - \frac{2^2}{3} - \frac{2^2}{6} + 2 = 6 - \frac{8+4}{6} = 4u$, o sea se trata del cuadrado de lado $4u$. Obteniéndose un área máxima de $16u^2$.

Solución: **El rectángulo buscado tiene por dimensiones $4u \times 4u$.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: En este ejercicio es importante notar que ambas funciones son parábolas, conocer qué función queda por encima de cuál y tener cuidado con el signo de las imágenes de las funciones, porque en nuestro caso, la imagen de $g(x)$ era negativa (que lo podíamos ver fácilmente a través del esbozo) y por tanto, debíamos sumar el módulo (o valor absoluto) de este valor. También hay que tener cuidado al aplicar el Criterio de la Segunda Derivada, puesto que al resultar nula, no es concluyente este criterio (no se trata de un punto de inflexión).

BY NC SA

Ejercicio 3.A:

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. (1 punto).

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. (1,5 puntos).

Solución:

a) Para calcular los puntos de corte de f con el eje de abscisas hacemos $f(x)=0$.

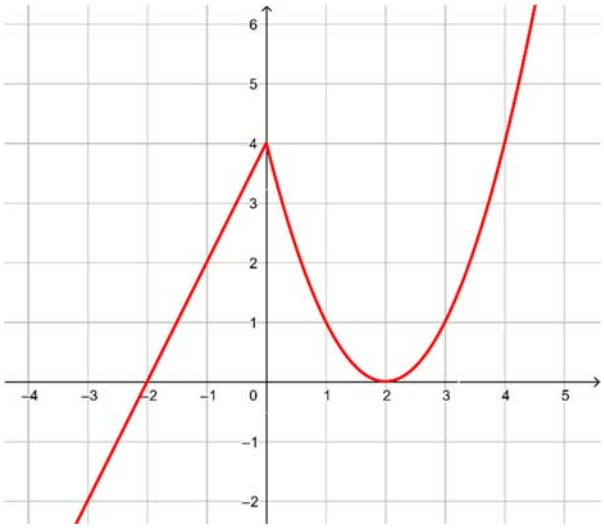
Para la primera rama de la función, tenemos: $2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow X_1(-2,0)$.

Para la segunda rama de la función, tenemos: $(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow X_2=(2,0)$.

A tener en cuenta

Al hacer $f(x)=0$ es frecuente encontrar el siguiente error entre los estudiantes: *solo igualar* $(x-2)^2$ *a cero porque es el trozo de función condicionado a* $x\geq 0$. Sin embargo, es de vital importancia tratar de evitar este **error**, ya que **este razonamiento es incorrecto**, porque que $(x-2)^2$ sea el trozo de función condicionado a $x\geq 0$ implica que **la expresión anterior es la que nos da el valor de la imagen de f cuando $x=0$** (y, en general, cuando $x\geq 0$); sin embargo, nosotros estamos buscando **los valores de abscisa que anulan la imagen de la función**.

Gráfica de $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$:



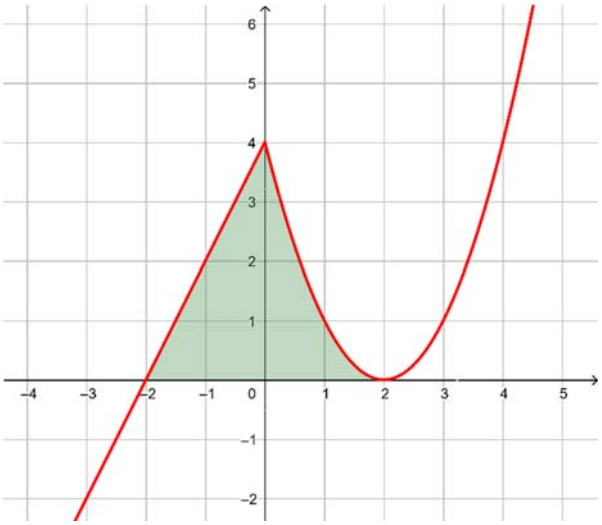
BY NC SA

A tener en cuenta

Para hacer un esbozo correcto debes notar como la primera rama es una **recta**, por lo tanto, la graficamos armando una tabla de valores. Basta con conocer dos puntos para poder definir la recta, pero es recomendable dar alguno más, contemplando la posibilidad de que te hayas podido equivocar en alguno de los dos anteriores. La segunda rama es una **parábola**, para graficarla debes conocer algunos puntos característicos como el vértice, los puntos de corte con los ejes y puntos cercanos al vértice. El vértice de una parábola de la forma $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ es el punto que tiene por coordenadas $V\left[\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$. También lo puedes hallar derivando $y=ax^2+bx+c$ e igualando a 0.

Solución: **Los puntos de corte de f con el eje de abscisas son $X_1(-2,0)$ y $X_2(2,0)$. El esbozo de la gráfica de la función está realizado arriba.**

b) El esbozo realizado en el apartado anterior nos puede servir de ayuda para solucionar este otro apartado. Nos piden calcular el área representada en verde en la siguiente ilustración:



Por tanto, es fácil notar como $A=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(2x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx$, y por tanto:

$$A=\int_{-2}^{0}(2x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)\,dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, o Regla de Barrow se llega a que:

$$A=\left[0-\left((-2)^2+4(-2)\right)\right]+\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+4\cdot 2-0\right)=\frac{20}{3}u^2$$

BY NC SA

Solución: **El área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas es $\frac{20}{3}u^2$.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Para poder hacer este ejercicio es necesario saber cómo graficar una función a trozos y evidentemente, saber integrar. La representación de la función a trozos no resulta especialmente complicada teniendo en cuenta que la primera rama es una recta y la segunda es una parábola. Hay que prestar especial atención a los errores comunes que se comentan en el apartado *A tener en cuenta* y en el segundo apartado debemos darnos cuenta de que el área que nos piden calcular la obtenemos haciendo la suma de dos integrales definidas. Es importante ver en el primer apartado que los puntos de corte hallados se correspondan con la posterior representación de la función y que, como en el segundo apartado, nos piden obtener el valor de un área éste no puede ser negativo.

En el segundo apartado, el valor de la primera integral, que corresponde al área del recinto limitado por f y el eje OX desde $x=-2$ hasta $x=0$ lo podemos calcular directamente como el área de un triángulo.

BY NC SA

Ejercicio 4.A:

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

Solución:

Primero hallamos una primitiva cualquiera de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$. Sea $F(x)$ dicha primitiva.

$$F(x)=\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$$

Realizamos la división de x^3 entre x^2-2x+1:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & 2x^2 & -x & & x+2 \\ \cline{1-3} & 2x^2 & -x & & \\ & -2x^2 & +4x & -2 & \\ \cline{2-4} & & 3x & -2 & \end{array}$$

A tener en cuenta

Pincha aquí si necesitas repasar el algoritmo de la división. Recuerda que detenemos el algoritmo cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor. Además, recuerda la prueba de la división: $\dfrac{D(x)}{d(x)}=C(x)+R(x)$, que nos servirá para expresar el cociente indicado de x^3 entre x^2-2x+1 de la forma en la que sigue.

Por tanto: $F(x)=\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx=\int\left(x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx=\int(x+2)\,dx+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2-x+x}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx+\int\frac{x}{x^2-2x+1}dx$$

La segunda integral es inmediata, solo recuerda que $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C,\ C\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int\frac{x}{(x-1)^2}dx$$

BY NC SA

Ahora, vamos a descomponer $\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}$ como suma de dos fracciones algebraicas. Planteamos la suma, con A y B siendo los numeradores de las dos fracciones que queremos hallar:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A+Bx-B}{(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$. Con lo cual:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\Rightarrow\int\frac{x}{(x-1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}$$

Sustituyendo esta información en la expresión anterior llegamos a lo siguiente:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int(x-1)^{-2}\,dx+\ln|x-1|$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left[(x-1)^2\right]-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

Al pasar por el punto $(2,6)$ sabemos que $F(2)=6$, por lo cual:

$F(2)=\frac{2^2}{2}+4-\frac{1}{2-1}+3\ln|2-1|+C=6-1+\underbrace{3\ln 0}_{0}+C=6\Rightarrow C=1$; por lo tanto:

Solución: **La primitiva buscada es** $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+1$**.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio que puede resultar largo a aquellos alumnos que no manejen con la suficiente soltura las integrales. Para saber hacer el ejercicio basta con conocer la integral del cociente de la derivada de una función entre la propia función y saber separar una fracción algebraica como suma de otras dos. Hay una solución alternativa que consiste en separar directamente la expresión $\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$, que quedaría como $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$. En ambos casos llegamos al mismo resultado.

BY NC SA

Ejercicio 5.B:

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. (1,75 puntos)

b) Para $m = 2$ resuelve el sistema si es posible. (0,75 puntos)

Solución:

a) Primero armamos la matriz de coeficientes del sistema, sea A: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada con los términos independientes, sea $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array}\right)$.

Vamos a discutir el rango de ambas matrices para luego aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius.

Comenzamos calculando $|A|$ utilizando la Regla de Sarrus e igualando a 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Por lo tanto, para $m \neq \pm 1$, el determinante de la matriz de coeficientes resulta no nulo, y entonces, podemos afirmar que $rg(A) = rg(A') = 3$.

Veamos para el caso en el cual $m = 1$: $A_{(m=1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Como vimos, para $m = 1$, $|A| = 0$, por lo cual el $rg(A) \leq 2$. Como podemos asegurar la existencia de un menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, podemos asegurar que $rg(A) = 2$. Estudiemos el rango de la matriz ampliada:

$A'_{(m=1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right)$. Orlamos con la tercera fila y tercera columna.

BY NC SA

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18-12-1+9+4+6 = -12 \neq 0$$

Por lo tanto, obtenemos que $\left|A'_{(m=1)}\right| \neq 0 \Rightarrow rg\left(A'_{(m=1)}\right) = 3$.

Estudiamos ahora el caso en el que $m=-1$: $A_{(m=-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Como vimos, para $m=-1$, $|A|=0$, por lo cual el $rg(A) \leq 2$. Como podemos asegurar la existencia de un menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$,podemos asegurar que $rg(A)=2$. Estudiemos el rango de la matriz ampliada:

$A'_{(m=1)} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right)$. Orlamos con la tercera fila y tercera columna.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18+12-1+9+4-6 = 0$. Este resultado evidencia que $rg(A') \leq 2$, y es 2 porque hay un menor, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Escribimos por tanto: $rg(A) = rg(A') = 2$.

Solución:

Discusión (Teorema de Rouché-Frobenius):

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces $rg(A) = rg(A') = 3 = \text{nº incg.}$: se trata de un S.C.D.**
- **Si $m = 1$, entonces $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A')$; $rg(A) < rg(A')$, se trataría de un S.I.**
- **Si $m = -1$, entonces, $rg(A) = rg(A') = 2 < \text{nº incg.}$: se trata de un S.C.I., donde la solución dependerá de $3-2=1$ parámetro.**

A tener en cuenta: Teorema de Rouché-Frobenius

Considérese un sistema de ecuaciones que tiene por A a la matriz de coeficientes y A' a la matriz ampliada del sistema. Si $rg(A)$ y $rg(A')$ denotan el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, respectivamente, se tiene:

1. El sistema es compatible si y solo si los rangos coinciden: $rg(A) = rg(A')$. Si además los rangos coinciden con el número de incógnitas, se trata de un S.C.D. En caso contrario, es un S.C.I. (tiene infinitas soluciones dependientes de $\text{nº incg} - rg(A')$ parámetros.

BY NC SA

2. El sistema es incompatible (S.I.) si y solo si $rg(A) \neq rg(A')$. No tiene solución el sistema.

b) La discusión del apartado anterior hace notar que para $m=2$ el sistema es compatible determinado. Para su resolución podemos aplicar el Método de Gauss o Cramer.

- **Solución por Gauss**. Armamos la matriz del sistema y mediante una serie de transformaciones lineales lo convertimos en un sistema escalonado.

$$A'_{(m=2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \rightarrow 2F_1 + F_2 \\ F_1 - F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

. De la tercera fila se obtiene $y=1$.

Sustituyendo este resultado en la segunda fila obtenemos $z=-2$. Sustituyendo este resultado en la primera fila llegamos a que $x=2$.

- **Solución por Cramer**.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3(m^2-1) \Rightarrow |A_{m=2}| = 9$

Ahora, sencillamente calculamos los determinantes $|A_{(m=2)x}|$, $|A_{(m=2)y}|$ y $|A_{(m=2)z}|$, que resultan de sustituir en $|A_{m=2}|$ la columna de las x, de las y y de las z por la columna de los términos independientes, respectivamente. Las soluciones son $x = \dfrac{|A_{(m=2)x}|}{|A_{m=2}|}$, $y = \dfrac{|A_{(m=2)y}|}{|A_{m=2}|}$ y $z = \dfrac{|A_{(m=2)z}|}{|A_{m=2}|}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-18-8-6+36+12+2}{9} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{2+24+3-2-6-12}{9} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-18-24-1+9+4+12}{9} \Rightarrow \boxed{z=-2}$$

Solución: $x=2;\ y=1;\ z=-2$

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio que no presenta especial dificultad y que es de los más comunes en selectividad. Como recomendación, siempre que nos pidan resolver un sistema y podamos utilizar la Regla de Cramer, es mejor resolverlo de esta forma, ya que por lo general este método es más rápido que Gauss y además las soluciones de las otras incógnitas no dependen de los resultados obtenidos en las incógnitas anteriores, como sí ocurre en Gauss, por lo que en caso de fallar en alguna de ellas, no tenemos todo el ejercicio mal. Asimismo, conviene comprobar las soluciones.

BY NC SA

Ejercicio 6.B:

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$**, donde** $m\geq 0$**.**

a) ¿Para qué valores de m **tiene inversa la matriz** A**? (1 puntos)**

b) Para $m=4$ **resuelve, si es posible, la ecuación matricial** $AX=12I$**, donde** I **es la matriz identidad de orden 3. (0,75 puntos)**

Solución:

a) Recordemos que la inversa de una matriz viene dada por la expresión $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)$, con lo cual no existirá inversa cuando $|A|=0$. Vamos a estudiar este caso:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=m^3+m+m-m^2-m-m^2=m^3-2m^2+m;\ |A|=0\Rightarrow m(m^2-2m+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m_1=0 \\ (m-1)^2=0\Rightarrow m_2=1 \end{cases}$$

Solución: $\exists A^{-1}\forall m\in\mathbb{R}:\{m\geq 0, m\neq 0, m\neq 1\}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial: $AX=12I\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}12I\Rightarrow X=A^{-1}12I=12A^{-1}$. Para $m=4$ sí existe solución puesto que existe inversa. Calculamos la inversa para $m=4$:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=m(m-1)^2\xrightarrow{m=4}|A_{m=4}|=4\cdot 3^2=36$$

$A_{m=4}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, por ser una matriz simétrica: $(A_{m=4})^t=A_{m=4}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Hallamos $Adj\left[(A_{m=4})^t\right]$, que por ser la adjunta de una simétrica, también es simétrica, por lo que:

$$Adj\left[(A_{m=4})^t\right]=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ a_{12} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ a_{13} & a_{23} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

Con lo cual:

$$\left(A_{m=4}\right)^{-1}=\frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio común en Selectividad. Para resolver el segundo apartado es de gran ayuda notar como estamos trabajando con una matriz simétrica, pues nos ahorra bastante tiempo. Si se dispone del tiempo necesario, sería conveniente comprobar la solución realizando el producto indicado en la ecuación matricial.

BY NC SA

Ejercicio 7.B:

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto $A(-4,4,7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0,75 puntos)

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. (1,75 puntos)

Solución:

a) Por ser $\vec{w}=(1,a,b)$ ortogonal a los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, o sea, perpendicular. Se cumple que:

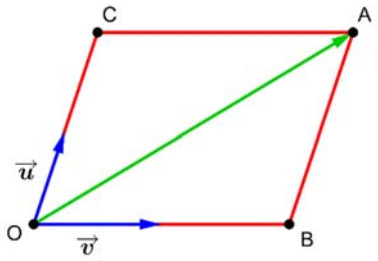
i) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow(-1,2,3)\cdot(1,a,b)=-1+2a+3b=0\Rightarrow\boxed{2a+3b=1}$.

ii) $\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow(2,0,-1)\cdot(1,a,b)=2-b=0\Rightarrow\boxed{b=2}$.

Y por tanto, tendríamos:

Solución: $a=-\frac{5}{2}$ **y** $b=2$**.**

b) Vamos a hacer el siguiente dibujo para clarificar la situación:



1. De los cuatro vértices de este paralelogramo, ya conocemos dos: $O(0,0,0)$ y $A(-4,4,7)$.
2. Ahora bien, el vector que une O con B es el vector $\lambda\vec{v},\ \lambda\in\mathbb{R}$. Y el vector que une O con C es el vector $\mu\vec{u}$. Por la *Regla del Paralelogramo*, sabemos que:
3.
4. $$\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}=\overrightarrow{OA}\Rightarrow(2\lambda,0,-\lambda)+(-\mu,2\mu,3\mu)=(-4,4,7)\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-\mu=-4\\2\mu=4\\3\mu-\lambda=7\end{cases}$$
5. Por lo que aquí deducimos: $\mu=2,\ \lambda=-1$. Por lo tanto: $\lambda\vec{v}=(-2,0,1);\ \mu\vec{u}=(-2,4,6)$.

BY NC SA

6. De aquí se obtienen los vértices restantes: $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{v} = B - O = B = (-2,0,1)$ y $\overrightarrow{OC} = \mu\vec{u} = C - O = C = (-2,4,6)$.

Solución: **Los vértices del paralelogramo son**
$O(0,0,0), A(-4,4,7), B(-2,0,1), C(-2,4,6)$.

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio poco común en Selectividad en Andalucía. El primer apartado es muy sencillo de hacer y no presenta especial dificultad más que conocer que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a cero. El segundo apartado puede parecer más complicado para los estudiantes. Existe una solución alternativa a la dada aquí para el apartado b), considerando las rectas que pasan por cada vértice y tienen como vector director a los vectores que forman el paralelogramo. De esta forma, los vértices del paralelogramo serían los puntos de corte de las rectas. Sin embargo, esta última forma, aunque también válida, es más tediosa.

BY NC SA

Ejercicio 8.B:

Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$**, así como la recta** s**, determinada por el punto** $P(1,2,3)$ **y el vector** $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$**.**

a) Calcula a **para que las rectas** r **y** s **se corten. (1,5 puntos)**

b) Calcula a **para que las rectas** r **y** s **sean perpendiculares. (1 punto)**

Solución:

a) Extraemos del enunciado el vector director de r: $\vec{d_r}=(1,-1,2)$ (las coordenadas del vector director son los denominadores de la expresión por la cual está definida la recta, por estar en su forma continua). El vector director de s es $\vec{d_s}=\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

Dado que r y s se cortan, se pueden dar casos:
1. r y s son coincidentes y entonces se cortan en infinitos puntos.
2. r y s son secantes y entonces se cortan en un único punto.

Exploramos la primera posibilidad:

$\frac{1}{1+a}=\frac{-1}{-a}=\frac{2}{3a}\Rightarrow\begin{cases}-a=-1-a\Rightarrow 0\neq -1\\ -3a=-2a\Rightarrow a=0\end{cases}$. No es posible que r y s sean coincidentes, puesto que

$\nexists a\in\mathbb{R}:\vec{d_r}//\vec{d_s}$.

Exploramos la segunda posibilidad.

Definimos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ como el vector que une un punto de r con un punto de s. Un punto de r es el $P_r(2,0,1)$ (que se extrae de la expresión continua de la recta que ofrece el enunciado).

Por tanto: $\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(-1,2,2)$. Dado que las rectas r y s son secantes:

$$\left|\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1+a & -a & 3a\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2a+6a+2a-3a-4-4a+2a=0$$

De aquí se obtiene: $-6+a=0\Rightarrow a=6$

Solución: **Para que ambas rectas se corten** $a=6$**.**

BY NC SA

b) Si r y s son perpendiculares, entonces:

$$\overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{d_s} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \Rightarrow (1,-1,2)\cdot(1+a,-a,3a) = 1+8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Luego, para $a = -\frac{1}{8} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{d_s}$; condición necesaria y suficiente para afirmar que r y s son perpendiculares.

Solución: **Si $a = -\frac{1}{8}$, r y s son perpendiculares.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: De los dos ejercicios correspondientes al bloque de geometría que figuran en este examen este resulta ser el más común, sencillo y rápido de hacer. En el primer apartado es imprescindible indicar los dos posibles casos, aunque luego más tarde veamos que el primero de ellos no tiene sentido. Para resolver el ejercicio 8 hay que tener en cuenta que aunque para $a = -\frac{1}{8}$, las dos rectas se cruzan, en $\mathbb{R}^3$ pueden cruzarse y ser perpendiculares a la vez.

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Este ejercicio consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques A y B de 4 ejercicios cada uno. Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE A

Problema 1:

1º) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = 1$ (donde Lx denota la función logaritmo neperiano).

Problema 2:

2º) Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Problema 3:

3º) Calcula $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio $t = \sqrt{1+x} - 1$).

Problema 4:

4º) Considera las funciones $f, g: R \to R$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

$a)$ Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

$b)$ Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

BLOQUE B

Problema 5:

5º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$ calcula X tal que $A \cdot X \cdot B = C$, si es posible.

BY NC SA

Problema 6:

6º) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -2$.

$a)$ Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. $b)$ Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Problema 7:

7º) Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Problema 8:

8º) Sea el plano $\pi \equiv x+y-z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z-1$.

$a)$ Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

$b)$ Dado el punto $Q(2,6,3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

1º) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = 1$ (donde Lx denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3\cdot(Lx)^2\cdot\frac{1}{x}+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{3\cdot(Lx)^2+2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{6\cdot Lx\cdot\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6\cdot Lx+2x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\frac{6}{x}+2} = \frac{a}{\frac{6}{\infty}+2} = 1;\ \frac{a}{0+2} = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2.}}$$

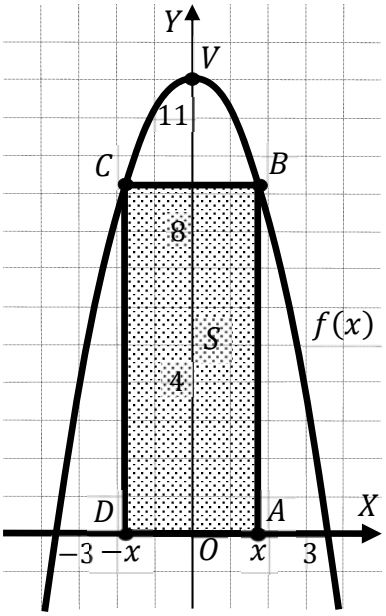
BY NC SA

Problema 2:

2º) Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Solución:

La función $f(x) = -x^2 + 12$ es una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es $V(0, 12)$; por ser una función par es simétrica con respecto al eje de ordenadas.



El punto B, por pertenecer a la función $f(x)$ tiene por expresión $B(x, -x^2 + 12)$.

Teniendo en cuanta que $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Considerando la simetría de la función, la superficie del rectángulo, en función de x, es la siguiente:

$$S(x) = 2 \cdot x \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x.$$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = -6x^2 + 24 = -6 \cdot (x^2 - 4).$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -6 \cdot (-x^2 + 4) = 0;\ -x^2 + 4 = 0;\ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

La raíz negativa no se ha tenido en cuenta por condición del ejercicio.

Se comprueba a continuación de que se trata de un máximo.

$$S''(x) = -6 \cdot (2x) = -12x \Rightarrow S''(2) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo, c.q.c.$$

$$S(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = 32.$$

Los vértices del rectángulo son los siguientes:

$$\underline{A(2,0)}, B(2, -2^2 + 12) \Rightarrow \underline{B(2,8)}$$ **y por simetría:** $\underline{C(-2,8)}$ **y** $\underline{D(-2,0)}$**.**

$$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x = 2\ metros\ vale\ 32\ metros\ cuadrados.}$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) Calcula $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio $t = \sqrt{1+x} - 1$).

Solución:

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sqrt{1+x} - 1 = t;\ \sqrt{1+x} = t+1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot dx = dt;\ dx = 2(t+1) \cdot dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 8 \to t = 2 \\ x = 3 \to t = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot 2(t+1) \cdot dt = 2 \cdot \int_1^2 \frac{t+1}{t} \cdot dt = 2 \cdot \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot dt = 2 \cdot [t + Lt]_1^2 =$$

$$= 2 \cdot [(2 + L2) - (1 + L1)] = 2 \cdot (2 + L2 - 1 - L1) = 2 \cdot (1 + L2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx = 2 + L4.}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) Considera las funciones $f, g: R \to R$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Solución:

a) Las dos funciones están definidas en R por ser sumas algebraicas de funciones definidas en R.

La función $f(x) = x^3 + 2$ es monótona creciente y tiene un punto de inflexión en $A(0, 2)$; otros puntos de la función $f(x)$ son $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ y $D(-2, -6)$.

La función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo vértice, C, es el siguiente:

$$g'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1; \quad C(1, 3).$$

Otros puntos de la parábola son $A(0, 2)$, $D(-2, -6)$, $E(2, 2)$ y $F(4, -6)$.

Los puntos de corte de las funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

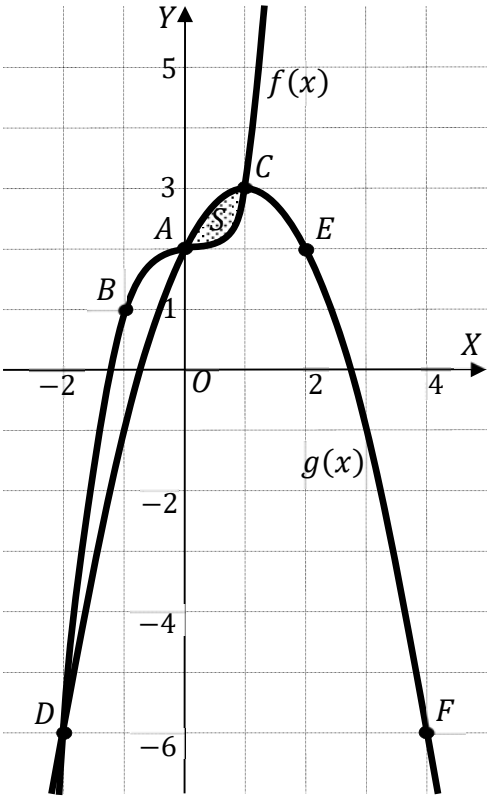
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2;$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0; \quad x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -2, x_3 = 1.$$

Los puntos de corte son $A(0, 2), D(-2, -6)$ y $C(1, 3)$.



La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura anterior.

b) De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^1 [(-x^2 + 2x + 2) - (x^3 + 2)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-3 - 4 + 12}{12} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{5}{12}\, u^2 \cong 0,42\, u^2.}$$

BY NC SA

BLOQUE B

Problema 5:

5º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$ calcula X tal que $A \cdot X \cdot B = C$, si es posible.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4a + 2 - 2a^2 - 2 = 0;\ -2a^2 + 4a = 0;\ -2a(a-2) = 0;$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 2.$

$La\ matriz\ B\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = 0\ y\ a = 2.$

$b)$ $A \cdot X \cdot B = C;\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1};\ I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $a = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 2 = 2.$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

BY NC SA

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Solución:

En la realización del ejercicio se utilizan las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

5ª.- El valor del determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta.

$$a)\ \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -6\cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2z} & \boldsymbol{2y} \\ \boldsymbol{-3p} & \boldsymbol{-3r} & \boldsymbol{-3q} \end{vmatrix} = \mathbf{12}.}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -6\cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a-3p} & \boldsymbol{-2a} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{b-3q} & \boldsymbol{-2b} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{c-3r} & \boldsymbol{-2c} \end{vmatrix} = \mathbf{12}.}$$

BY NC SA

Problema 7:

7º) Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de la recta r son $A(-1,a,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(5,-3,2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,0,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(5,-3,2) - (-1,a,0)] = (6,-3-a,2)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Las rectas r y x se cortan cuando los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios, es decir, cuando su rango es dos, para lo cual es necesario que el valaor del determinante que forman sea cero:

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3-a & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-2\cdot(-3-a) - 6 + (-3-a) - 4 = 0;\ \ 6 + 2a - 6 - 3 - a - 4 = 0 \Rightarrow a = 7.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ para\ a = 7.}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1+\delta \\ y = 7+\delta \\ z = -\delta \end{cases}$.

$\left\{\begin{matrix} 5+2\lambda = -1+\delta \\ -3 = 7+\delta \\ 2-\lambda = -\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \delta = -10.$ El punto de corte de las rectas r y s es

$$\underline{\boldsymbol{P(-11,-3,10).}}$$

$b)$ El punto $B(5,-3,2) \in s$ con el punto $P(8,-7,2)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = [(8,-7,2) - (5,-3,2)] = (3,-4,0)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-8(z-2) - 3(y+7) - 4(x-8) = 0;\ \ 8(z-2) + 3(y+7) + 4(x-8) = 0$$

$$8z - 16 + 3y + 21 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 4x + 3y + 8z - 27 = 0.}}$$

BY NC SA

Problema 8:

8º) Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

$a)$ Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

$b)$ Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 2 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 3\lambda - (1 + \lambda) = 2;\ \ 4\lambda - 1 - \lambda = 2;\ \ 3\lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(1, 3, 2)}}.$$

$b)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ es $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

La recta t, perpendicular a π y que contiene al punto $Q(2, 6, 3)$ tiene la siguiente expresión por unas ecuaciones paramétricas: $t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 6 + \delta \\ z = 3 - \delta \end{cases}$.

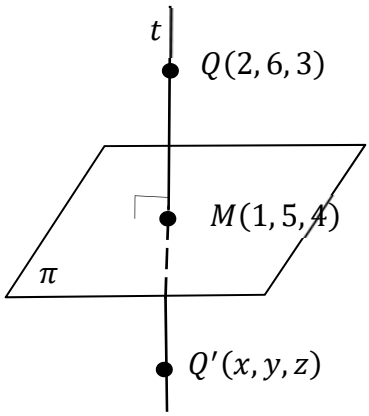
El punto M, intersección de la recta t con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 2 \\ t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 6 + \delta \\ z = 3 - \delta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 + \delta) + (6 + \delta) - (3 - \delta) = 2;$$

$$2 + \delta + 6 + \delta - 3 + \delta = 2;\ \ 3\delta = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = -1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 1 = 5 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(1, 5, 4).$$



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x + 2}{2} = 1 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{y + 6}{2} = 5 \Rightarrow y = 4 \\ \dfrac{z + 3}{2} = 4 \Rightarrow z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q'(0, 4, 5)}}.$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+e^3 & si\ \ x\le 0\\ (1-x)^{a/x} & si\ \ x>0\end{cases}$, $a\in R$.

$a)$ Determine los valores de $a\in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcula, para $a=1$. La recta tangente a la función en $x=-4$.

Problema 2:

2º) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]$.

Problema 3:

3º) Calcula: $I=\int e^{-x}\cdot(x^2-1)\cdot dx$.

Problema 4:

4º) Para la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$a)$ Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Analiza la curvatura (concavidad ∩ y convexidad ∪) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

Problema 5:

5º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $AX-2I=A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Analiza el rango de la matriz $A-mB$, según los valores de $m\in R$, siendo A la matriz del apartado anterior y $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcule justificadamente el valor del determinante $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

$b)$ Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

Problema 7:

7º) Dado el sistema $\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x + az = -4 \\ 4x - 3z = a + 1 \end{cases}$:

$a)$ Discute, según los valores de $a \in R$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

$b)$ Resuelve al sistema para $a = 1$.

Problema 8:

8º) $a)$ Escribe la ecuación del plano π que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $P(-1, 2, 1)$, siendo $r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

$b)$ Dado el vector $\vec{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor de $k \in R$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Problema 9:

9º) $a)$ Dados los vectores: $\overrightarrow{v_1} = a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$; $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in R$ para que los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

$b)$ Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, siendo $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (3, 1, 0)$.

Problema 10:

10º) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3.300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2.500 gramos.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido es esta localidad tenga un peso entre 3 500 y 4 000 gramos?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+e^3 & si\ \ x\le 0\\ (1-x)^{a/x} & si\ \ x>0\end{cases}$, $a\in R$.

$a)$ Determine los valores de $a\in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcula, para $a=1$. La recta tangente a la función en $x=-4$.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{-x}+e^3\right)=e^3=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{a/x}=e^{-a}\quad (*)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow 3=-a\Rightarrow \underline{a=-3}.$$

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0}(1-x)^{a/x}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\,nº\,e\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{1}\right)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{a}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{a}{x}\cdot\frac{-1}{x}\cdot\frac{x}{-1}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}}\right]^{-a}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-a)}=e^{-a}.$$

$b)$

Para $a=1$ la función es $f(x)=\sqrt{-x}+e^3$.

Para $x=-4$ el punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-4)=\sqrt{4}+e^3=2+e^3\Rightarrow P(-4,2+e^3).$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\Rightarrow x=-4\Rightarrow m=f'(-4)=\frac{-1}{2\sqrt{4}}\Rightarrow m=-\frac{1}{4}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(-4,2+e^3)$:

$$y-2-e^3=-\frac{1}{4}\cdot(x+4);\ \ 4y-8-4e^3=-x-4.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv x+4y-(4+e^3)=0}}$$

Problema 2:

2º) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]=\infty-\infty\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]\cdot\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}{\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2-\left(\sqrt{3}x+5\right)^2}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-\left(3x^2+10\sqrt{3}x+25\right)}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-3x^2-10\sqrt{3}x-25}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sqrt{3}x-27}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-10\sqrt{3}x-27}{x}}{\frac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sqrt{3}-\frac{27}{x}}{\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x}+\sqrt{3}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sqrt{3}-\frac{27}{x}}{\sqrt{\frac{3x^2-2}{x^2}}+\sqrt{3}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sqrt{3}-\frac{27}{x}}{\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3}+\frac{5}{x}}=$$

$$=\frac{-10\sqrt{3}-\frac{27}{\infty}}{\sqrt{3-\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3}+\frac{5}{\infty}}=\frac{-10\sqrt{3}-0}{\sqrt{3-0}+\sqrt{3}+0}=\frac{-10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]=-5.}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]=-5}$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) Calcula: $I = \int e^{-x} \cdot (x^2 - 1) \cdot dx$.

Solución:

$$I = \int e^{-x} \cdot (x^2 - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x \cdot dx = -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = I. \quad (*)$$

$$M = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x + 1) + C = M.$$

Sustituyendo el valor de M en la expresión (*):

$$I = -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x + 1)] + C =$$

$$= -(x^2 - 1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}(x + 1) + C = -e^{-x}[(x^2 - 1) + 2(x + 1)] + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + C.}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 4:

4º) Para la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

a) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) Analiza la curvatura (concavidad ∩ y convexidad ∪) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

Solución:

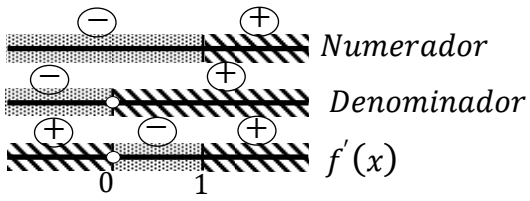
$a)\ x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow \underline{D(f)=R-\{0\}}.$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)\cdot x^2-(x-1)^2\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x\cdot(x-1)-2(x-1)^2}{x^3}=\frac{2\cdot(x-1)[x-(x-1)]}{x^3}=\frac{2\cdot(x-1)}{x^3}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2\cdot(x-1)}{x^3}=0;\ x-1=0\Rightarrow x=1.$$

De la observación de la figura adjunta se decen los periodos de crecimiento y decrecimiento de función, que son los siguientes:



du-
la

$$\underline{D(f)=R-\{0\}}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)}.\ \underline{Decrecimiento: f'(x)<0\Rightarrow x\in(0,1)}.$$

b) Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{2\cdot x^3-2(x-1)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x-6(x-1)}{x^4}=\frac{2x-6x+6}{x^4}=\frac{-4x+6}{x^4}=\frac{-2(2x-3)}{x^4}.$$

Como el denominador de la segunda derivada es positivo para cualquier valor real del dominio de la función, la segunda derivada será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$$-2(2x-3)=0;\ \ 2x-3=0;\ \ x=\frac{3}{2}.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x)<0\Rightarrow x>\frac{3}{2}\Rightarrow x\epsilon\left(\frac{3}{2},+\infty\right)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x)>0\Rightarrow x<\frac{3}{2}\Rightarrow x\epsilon(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{3}{2}\right)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{-2(2x-3)}{x^4}=0;\ \ -2(2x-3)=0;\ \ 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

BY NC SA

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9}\Rightarrow$$

$$\underline{Punto\ de\ inflexión\colon Q\left(\frac{3}{2},\frac{1}{9}\right).}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in R$, siendo A la matriz del apartado anterior y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$

$$AX - 2I = A^2;\ \ A \cdot X = A^2 + 2I;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + 2I);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + 2I) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^2 + 2I)}.$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A^2 + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

BY NC SA

$b)\quad A-mB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-m&0\\m&0&m\\0&-m&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&m-1&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{pmatrix}.$

$$|A-mB|=\begin{vmatrix}1&m-1&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{vmatrix}=$$

$=(m-1)(1-m)-m(1-m)+m(m-1)=$

$=m-m^2-1+m-m+m^2+m^2-m=-1+m^2=0\Rightarrow m_1=-1, m_2=1.$

$$\underline{Para\left\{\begin{matrix}m\neq -1\\ m\neq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\,(A-mB)=3.}$$

$$m=-1\Rightarrow A-mB=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ (A-mB)=2.$$

$$m=1\Rightarrow A-mB=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ (A-mB)=2.$$

$$\boldsymbol{\underline{Para\left\{\begin{matrix}m=-1\\ m=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\,(A-mB)=2.}}$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcule justificadamente el valor del determinante $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

$b)$ Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

Solución:

$a)$

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} -a+2 & -b+2 & -c+2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= +\frac{3}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \right) = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3.$$

$$\underline{\begin{vmatrix} \boldsymbol{-a+2} & \boldsymbol{-c+2} & \boldsymbol{-b+2} \\ \boldsymbol{x/2} & \boldsymbol{z/2} & \boldsymbol{y/2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} \end{vmatrix} = \mathbf{3}.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinta de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 9 = -4 \neq 0.$$

La matriz B es invertible, como se pedía comprobar.

BY NC SA

$|B| = -4.$ $\qquad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$Adj.\,de\ B^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{-4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Problema 7:

7º) Dado el sistema $\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x+az=-4 \\ 4x-3z=a+1 \end{cases}$:

$a)$ Discute, según los valores de $a \in R$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

$b)$ Resuelve al sistema para $a=1$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}=12a+18=0;\ 2a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}.$$

$$Para\ a \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$Para\ a=-\frac{3}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, que a efectos de rango, es equivalente a la matriz $M''=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & -8 \\ 8 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango se estudia mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & -8 \\ 8 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2+4F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3+8F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 1 & 12 \\ 0 & 24 & 2 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3-2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 12 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=-\frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$b)$ Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} -x+3y+z=5 \\ 2x+z=-4 \\ 4x-3z=2 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix}}=\frac{6-36}{12+18}=\frac{-30}{30}=-1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 5 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}}{30}=\frac{-12+4+20+16+2+30}{30}=\frac{60}{30}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & -4\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}}{30}=\frac{-48-12}{30}=\frac{-60}{30}=-2.$$

Solución: $x=-1, y=2, z=-2$.

BY NC SA

Problema 8:

8º) $a)$ Escribe la ecuación del plano π que contiene a las rectas $r_1\, y\, r_2$, y además pasa por el punto $P(-1,2,1)$, siendo $r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

$b)$ Dado el vector $\vec{v} = (2,k,2k)$, calcula el valor de $k \in R$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas $r_1\, y\, r_2$ sean linealmente dependientes.

Solución:

$a)$ Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1} = (3,1,1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (6,-2,1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}; P) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+1) + 6(y-2) - 6(z-1) - 6(z-1) + 2(x+1) - 3(y-2) = 0;$$

$$3(x+1) + 3(y-2) - 12(z-1) = 0;\ \ (x+1) + (y-2) - 4(z-1) = 0;$$

$$x + 1 + y - 2 - 4z + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 4z + 3 = 0}.$$

$$\boldsymbol{\underline{\pi \equiv x + y - 4z + 3 = 0}}$$

$b)$ Tres vectores son linealmente dependientes cuando es cero el valor del determinante que forman:

$$|\vec{v}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2 - 12k + 6k - 12k + 4 - 3k = 0;$$

$$6 - 21k = 0;\ \ 2 - 7k = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{k = \frac{2}{7}}}.$$

BY NC SA

Problema 9:

9º) $a)$ Dados los vectores: $\overrightarrow{v_1} = a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$; $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in R$ para que los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

$b)$ Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, siendo $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (3, 1, 0)$.

Solución:

$a)$ Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0.

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \Rightarrow (a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}) \cdot (-\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = 0;$$

$$-a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} + a^2\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} + a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} - 2a\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} - 2a\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} - 2\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} -$$

$$-3\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_1} + 3a\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0. \quad (*)$$

Teniendo en cuenta la propiedad conmutativa del producto escalar y teniendo en cuenta que:

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$ y que

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, la expresión (*) queda de la forma siguiente:

$$-a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} - 2a\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0; \; -a - 2a + 3 = 0; \; 3a = 3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{a = 1}.}$$

$b)$ $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{v_2} = (3, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (1, 0, -2) + (3, 1, 0) = (4, 1, -2).$$

El volumen del tetraedro que determinan tres vectores es el valor absoluto de su producto mixto.

$$V_{Tetraedro} = |\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = |-2 - 6 + 8| = 0.$$

$$\boldsymbol{V_{Tetraedro} = 0.}$$

La "sorprendente" solución es debido a que los tres vectores dados no forman un tetraedro por ser linealmente dependientes ya que, el vector $\overrightarrow{v_3}$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$, por lo cual, los tres vectores son coplanarios.

BY NC SA

Problema 10:

10º) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3.300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2.500 gramos.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido es esta localidad tenga un peso entre 3 500 y 4 000 gramos?

Solución:

$a)$ $Datos$: $\mu = 3\,300;\ \ \sigma = 465.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(3\,300, 465).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-3\,300}{465}$.

$$P = P(X < 2\,500) = P\left(Z < \frac{2\,500-3\,300}{465}\right) = P\left(Z < \frac{-800}{465}\right) = P(Z < -1.72) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.72) = 1 - 0.9573 = \underline{0.0427}.$$

El 4.27 % de los recién nacidos tienen bajo peso.

$b)$ $P = P(3\,500 < X < 4\,000) = P\left(\frac{3\,500-3\,300}{465} < Z < \frac{4\,000-3\,300}{465}\right) =$

$$= P\left(\frac{200}{465} < Z < \frac{700}{465}\right) = P(0.43 < Z < 1.51) = P(Z \leq 1.51) - P(Z \leq 0.43) =$$

$$= 0.9345 - 0.6664 = \underline{0.2681}.$$

El 26.81 % de los recién nacidos pesan entre 3 500 y 4 000 gramos.

BY NC SA

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-ax^2},\ a \in R$.

a) Determine los valores de $a \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R y tenga la asíntota horizontal $y = 0$.

b) Calcula, para $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0\ y\ x = 1$.

Problema 2:

2º) Para la función $f(x) = \frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}$. Calcula los valores de $a, b \in R$, para que $\lim_{x\to 1} f(x) = L \in R$, y determina el valor de dicho límite.

Problema 3:

3º) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 3x + 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

Problema 4:

4º) Para la función $f(x) = \frac{x^2+x}{3-x^2}$:

a) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

Problema 5:

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$:

a) Determina el valor de $k \in R$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in N$.

BY NC SA

Problema 6:

6º) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudia, según los valores de $m \in R$, el rango de la matriz $P = A \cdot B^t + C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Problema 7:

7º) Dado el sistema $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2 z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$:

$a)$ Discute, según los valores de $a \in R$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

$b)$ Resuelve al sistema para $a = 0$.

Problema 8:

8º) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1), B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Problema 9:

9º) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17 % de individuos practica la danza clásica, un 45 % cabaret y un 5 % ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

$a)$ Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o las dos).

$b)$ Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Problema 10:

10º) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20 % por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

$a)$ Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

$b)$ 1.- ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2.- ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-ax^2},\ a \in R$.

$a)$ Determine los valores de $a \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R y tenga la asíntota horizontal $y = 0$.

$b)$ Calcula, para $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0\ y\ x = 1$.

Solución:

$a)$ La función $f(x) = x \cdot e^{-ax^2}$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

Para que $f(x)$ tenga por asíntota horizontal a la recta $y = 0$ es necesario que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x \cdot e^{-ax^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax^2}} = \frac{\infty}{\infty}\ (con\ a > 0) \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2ax \cdot e^{ax^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{Para\ que\ y = 0\ sea\ asíntota\ horizontal\ de\ f(x)\ es\ necesario\ que\ a > 0.}$$

$b)$ Para $a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} > 0, \forall x \in (0,1)$, por lo cual, el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -\frac{x^2}{2} = t \\ x \cdot dx = -dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 1 \to t = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \to t = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_0^{-\frac{1}{2}} e^t \cdot dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 e^t \cdot dt = [e^t]_{-\frac{1}{2}}^0 = e^0 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - \frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{e-\sqrt{e}}{e}\ u^2 \cong 0.393\ u^2.}$$

BY NC SA

Problema 2:

2º) Para la función $f(x)=\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2}$. Calcula los valores de $a, b \in R$, para que $\lim_{x\to 1} f(x) = L \in R$, y determina el valor de dicho límite.

Solución:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2} = \frac{2+a+b+3}{-1+4-5+2} = \frac{a+b+5}{0}$.

Para que $\lim_{x\to 1} f(x) = L \in R$ tiene que ser: $a+b+5=0$. (1)

Siendo $a+b+5=0$: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind.$ Se puede aplicar la regla de $L'Hopital$:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{6x^2+2ax+b}{-3x^2+8x-5} = \frac{6+2a+b}{-3+8-5} = \frac{2a+b+6}{0}$. Por la razón expuesta anteriormente tiene que cumplirse que $2a+b+6=0$. (2)

Siendo $2a+b+6=0$: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{6x^2+2a+b}{-3x^2+8x-5} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind.$ Se puede volver a aplicar la regla de $L'Hopital$:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{12x+2a}{-6x+8} = \frac{12+2a}{-6+8} = \frac{12+2a}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 6+a.$ (*)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} a+b=-5 \\ 2a+b=-6 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -a-b=5 \\ 2a+b=-6 \end{matrix} \Rightarrow \underline{a=-1;\ b=-4.}$$

Sustituyendo el valor de $a=-1$ en (*): $\underline{\lim_{x\to 1} f(x) = 5.}$

$$\underline{\boldsymbol{a=-1;\ b=-4.}}\ \underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x) = 5.}}$$

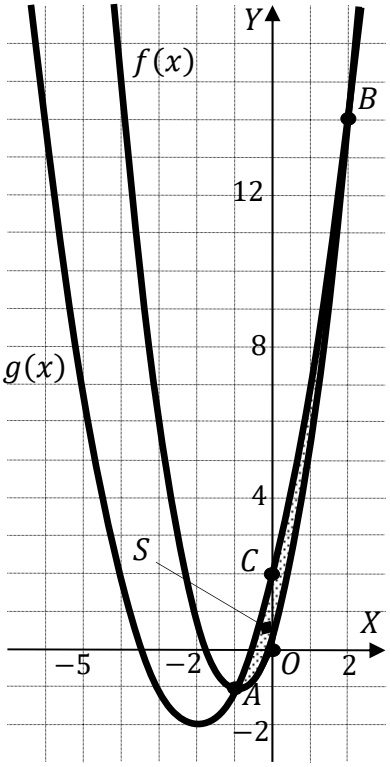
BY NC SA

Problema 3:

3º) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 3x + 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

Solución:

Las dos funciones son parábolas convexas $(\cup)$ por tener positivo ambas el coeficiente de x^2.



Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$3x + 2x^2 = x^2 + 4x + 2;\ \ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Los puntos de corte son: $A(-1,-1)\ y\ B(2,14)$.

Teniendo en cuenta que los puntos de corte con el eje de ordenadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son, respectivamente, $O(0,0)\ y\ C(0,2)$, la representación gráfica de la situación, de forma aproximada, es la que indica la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} [(x^2 + 4x + 2) - (3x + 2x^2)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{S = \frac{9}{2}\ u^2 = 4{,}5\ u^2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{9}{2}\ u^2 = 4.5\ u^2}}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) Para la función $f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}$:

a) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

Solución:

a) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x^2}=-1\Rightarrow \underline{La\ recta\ y=-1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$3-x^2=0\Rightarrow x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x=-\sqrt{3}\ y\ x=\sqrt{3}\ son\ asíntotas\ verticales.}}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(3-x^2)-(x^2+x)\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{6x-2x^3+3-x^2+2x^3+2x^2}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2+6x+3}{(3-x^2)^2}.$$

$$Para\ x=1\Rightarrow m=f'(1)=\frac{1^2+6\cdot1+3}{(3-1^2)^2}=\frac{10}{4}\Rightarrow m=\frac{5}{2}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1)=\frac{1^2+1}{3-1^2}=\frac{1+1}{3-1}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow P(1,1)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(1,1)$:

$$y-1=\frac{5}{2}\cdot(x-1);\ \ 2y-2=x-1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv x-2y+1=0.}}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determina el valor de $k \in R$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$b)$ Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in N$.

Solución:

$a)$ $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -2-k & k^2+k+1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -2-k & k^2+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1-k=3 \\ k^2+2k=0 \\ -2-k=0 \\ k^2+k+1=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

El único valor de k que satisface todas las ecuaciones es $\underline{\boldsymbol{k = -2}}$.

$b)$ Para $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B = 2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = 2^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^4 = 2^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

. . . . . .

En general: $\underline{B^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-2 \cdot n} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}}$.

BY NC SA

Problema 6:

6º) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

$a)$ Estudia, según los valores de $m \in R$, el rango de la matriz $P = A \cdot B^t + C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución:

$$a)\qquad P = A \cdot B^t + C = \begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-m & -1 & 1-m\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & 1 & m-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{pmatrix}.$$

$$|P| = |A \cdot B^t + C| = \begin{vmatrix}2-m & 0 & 2-m\\ 2 & 2m+1 & 3\\ m-1 & 1 & m\end{vmatrix} =$$

$$= m(2-m)(2m+1) + 2(2-m) - (2-m)(2m+1)(m-1) - 3(2-m) =$$

$$= m(4m + 2 - 2m^2 - m) + 4 - 2m - (2-m)(2m^2 - 2m + m - 1) - 6 + 3m =$$

$$= m(-2m^2 + 3m + 2) - 2 + m - (2-m)(2m^2 - m - 1) =$$

$$= -2m^3 + 3m^2 + 2m - 2 + m - (4m^2 - 2m - 2 - 2m^3 + m^2 + m) =$$

$$= -2m^3 + 3m^2 + 3m - 2 - (-2m^3 + 5m^2 - m - 2) =$$

$$= -2m^3 + 3m^2 + 3m - 2 + 2m^3 - 5m^2 + m + 2 \Rightarrow$$

$$|P| = |A \cdot B^t + C| = -2m^2 + 4m = -2m \cdot (m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}m \neq 0\\ m \neq 2\end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ P = 3.}$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow P = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 + C_2 = C_3\} \Rightarrow Rang\ P = 2.$$

$$Para\ m = 2 \Rightarrow P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ P = 2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}m = 0\\ m = 2\end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ P = 2.}$$

$$b)\qquad Para\ m = 1 \Rightarrow P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.\quad |P| = 3 + 2 - 3 = 2.\quad P^t = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

BY NC SA

$$Adj.\,de\,P^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

Problema 7:

7º) Dado el sistema $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + a^2 z = 0 \\ x + y + 2az = 0 \end{cases}$:

$a)$ Discute, según los valores de $a \in R$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

$b)$ Resuelve al sistema para $a = 0$.

Solución:

$a)$ La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a + 1 + a^3 - 1 - a^2 - 2a^2 = 0;\ \ a^3 - 3a^2 + 2a = 0;$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0;\ \ a_1 = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 1;\ \ a_3 = 2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Para \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

BY NC SA

$b)$ Para $a = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

$$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = -\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

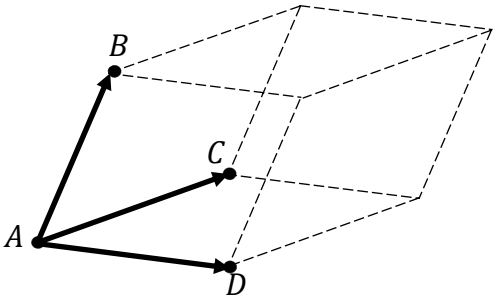
BY NC SA

Problema 8:

8º) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1), B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Solución:

El vértice D, por encontrarse en el eje Y, tiene por expresión $D(0,y,0)$.



El volumen de un tetraedro es igual a un sexto del valor del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-2,1,0) - (1,1,1)] = (-3,0,-1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,3) - (1,1,1)] = (-1,0,2)$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(0,y,0) - (1,1,1)] = (-1,y-1,-1)$.

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = 10 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & y-1 & -1 \end{vmatrix} = 60;$$

$= |y-1+6(y-1)| = 60;\ \ |y-1+6y-6| = 60;\ \ |7y-7| = 60 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7y-7 = 60 \rightarrow 7y = 67;\ \ y = \frac{67}{7} \Rightarrow \underline{D_1\left(0,\frac{67}{7},0\right)} \\ -7y+7 = 60 \rightarrow 7y = -53;\ \ y = -\frac{53}{7} \Rightarrow \underline{D_2\left(0,-\frac{53}{7},0\right)} \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{D_1\left(0,\frac{67}{7},0\right);\ D_2\left(0,-\frac{53}{7},0\right)}$$

BY NC SA

Problema 9:

9º) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17 % de individuos practica la danza clásica, un 45 % cabaret y un 5 % ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

$a)$ Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o las dos).

$b)$ Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Solución:

$a)$ $Sean: \begin{cases} P(D) \rightarrow Probabilidad\ de\ que\ practique\ danza \\ P(Dc\ell) \rightarrow Probabilidad\ de\ que\ practique\ danza\ clásica \\ P(Dca) \rightarrow Probabilidad\ de\ que\ practique\ danza\ de\ cabaret \end{cases}$.

$Datos: P(Dc\ell) = 0{,}17;\ \ P(Dca) = 0{,}45;\ \ P(Dc\ell \cap Dca) = 0{,}05.$

$$P = P(D) = P(Dc\ell \cup Dca) = P(Dc\ell) + P(Dca) - P(Dc\ell \cap Dca) =$$

$$= 0.17 + 0.45 - 0.05 = 0.62 - 0.05 \Rightarrow \underline{P(D) = 0.57}.$$

$$\boldsymbol{\underline{P(D) = 0.57.}}$$

$b)$ La suma de las probabilidades de recibir clases de danza o de teatro es un suceso seguro, por lo cual:

$$P(D) + P(T) = 1 \Rightarrow P(T) = 1 - P(D) = 1 - 0.57 \Rightarrow \underline{P(T) = 0.43}.$$

$$\boldsymbol{\underline{P(T) = 0.43}}$$

BY NC SA

Problema 10:

10º) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20 % por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

$a)$ Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

$b)$ 1.- ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2.- ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 5;\ \ p = 0.2;\ \ q = 1 - 0.2 = 0.8.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no tengamos que desechar ninguno de los huevos.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.3277 = \underline{0.6723}.$$

$$\boldsymbol{P = \underline{0.6723}}$$

$b)$ 1.- $P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = \frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!} \cdot 0.04 \cdot 0.512 = \frac{5\cdot 4}{2} \cdot 0.0205 =$

$= 10 \cdot 0.0205 = 0.2048.$

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} \cdot 0.008 \cdot 0.64 = \frac{5\cdot 4}{2} \cdot 0.0051 =$$

$= 10 \cdot 0.0051 = 0.0512.$

$$\underline{Es\ más\ probable\ que\ tengamos\ que\ desechar\ 2\ huevos.}$$

. 2.- Si desechar un huevo tiene una probabilidad de 0.2 y de no desecharlo de 0,8, es bastante más probable desechar cuantos menos huevos mejor.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) CURSO 2021-2022 **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

BLOQUE 1.B Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & & & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

BY NC SA

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

BLOQUE 3.A Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$ y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1A. Solución:

BLOQUE 1.A Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

(a)

$$\det P = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} = 2 - a$$

Por lo tanto, para a = 2 el determinante es 0. Por lo tanto el rango es menor de 3. Como el $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, el rango es 2. Para el resto de valores el rango es 3.

(b) Para a = 1 $\det(P) = 1 \neq 0$ por lo que sí tiene inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_3]{(-1)F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 2F_3]{F_1 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $\det(P) = 2 - a$, $\det(P^{-1}) = \frac{1}{2-a}$ por lo tanto buscamos los valores de A que hacen que: $2 - a = \frac{1}{2-a}$ que son a = 1 y a = 3.

BY NC SA

Bloque 1B. Solución:

BLOQUE 1.B Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & & & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

(a) La matriz de coeficientes tiene determinante:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4a - 4$$

Por lo que el sistema es compatible determinado para $a \neq 1$, ya que el rango de A y el de la ampliada es igual e igual al número de incógnitas.

Si $a = 1$ aplicaremos el método de Gauss. La matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el sistema es compatible indeterminado.

(b) Si $x = 0$ entonces el sistema se podría plantear como

$$\left.\begin{array}{rcrcl} & & 2y & = & -1 \\ & & 2y & + 2z = & 1 \\ & & -2y & + z = & 2 \end{array}\right\}$$

que es independiente del valor de a. En este caso, y para todo a, de la primera ecuación $y = -\frac{1}{2}$ y por la última ecuación $z = 2 - 1 = 1$, como también verifica la segunda ecuación, esta será una solución como la pedida.

(c) Si $a = 0$ la matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

y la solución es $z = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.

BY NC SA

Bloque 2A. Solución:

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) f es un cociente de polinomios, por lo tanto el dominio es toda la recta real salvo los valores de x para los que se anule el denominador, es decir, x = 1.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

Tiene una asíntota vertical en x = 1.

Asíntotas oblicuas (puede haber ya que no hay asíntotas horizontales)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

Tiene una asíntota oblicua: y = x + 1.

(b) Para calcular máximos y mínimos calcularemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

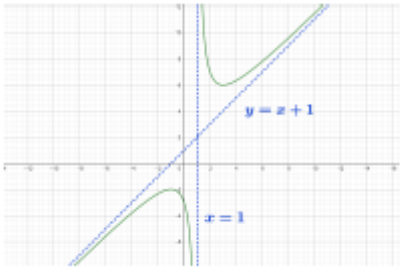
que se anula en x = 3 y x = −1.

Para estudiar la concavidad y la convexidad calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

que es positiva si x > 1, y negativa si x < 1, por lo tanto f es convexa (∩) si x ∈ (−∞, 1) y es cóncava (∪) si x ∈ (1, +∞).

(c)



Bloque 2B. Solución:

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto $(-1, 0)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

(a) Si utilizamos el cambio de variable $1 - x^2 = t$ entonces $-2xdx = dt$ y se puede reescribir la integral como sigue:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

Como buscamos F tal que $F(-1) = 0$ entonces $F(-1) = -\frac{1}{3}(1-(-1)^2)^{3/2} + C = C$, por lo que $C = 0$

$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

(b)

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1-1)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-0^2)^{3/2} = \frac{1}{3}$$

BY NC SA

Bloque 3A. Solución:

BLOQUE 3.A Sea r la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

(a) Calculamos la ecuación continua de la recta $\vec{u} = B - A = (1, 1, 1)$:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

discutimos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las dos rectas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{x-2}{1} & = & \frac{y-2}{-1} \\ \frac{y-2}{-1} & = & \frac{z}{1} \\ \frac{x-1}{1} & = & \frac{y}{1} \\ \frac{y}{1} & = & \frac{z-1}{1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ y+z & = & 2 \\ x-y & = & 1 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz asociada al sistema es 3 y el de la ampliada es 4, por tanto el sistema es incompatible. Son rectas que se cruzan.

(b) Este plano está definido por un punto de s, P = (2, 2, 0), un vector director de r, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un vector director de s $\vec{v} = (1, -1, 1)$, luego la ecuación del plano es:

$$\left|\begin{array}{ccc} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0 \Rightarrow 2x - 2z - 4 = 0 \Rightarrow x - z = 2$$

(c) Esta distancia es la misma que la distancia entre un punto cualquiera de la recta r y el plano anterior. Tomamos un vector unitario perpendicular a al plano:

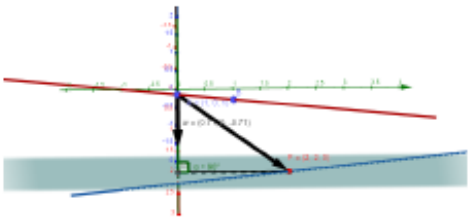
$$\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tomamos el vector definido por un punto de la recta r y un punto del plano:

$$\vec{w}_2 = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

La distancia es el producto escalar de ambos:

$$d = |\vec{w} \cdot \vec{w}_2| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (1, 2, -1)\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



BY NC SA

Bloque 3B. Solución:

BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x+y+z=3$, $\pi' \equiv x+y=3$ y el punto $A=(2,1,6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

(a) Para calcular la intersección resolvemos el sistema definido por las ecuaciones de los planos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

Para obtener la solución debemos tomar como parámetro la variable y, y se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3-t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z) = (3-t,t,0) = (3,0,0) + t\cdot(-1,1,0)$$

Por tanto tenemos que un punto es el $B=(3,0,0)$ y un vector director $\vec{u}=(-1,1,0)$.

(b) Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A, el vector director debe ser $\vec{v}=(1,1,1)$ luego la ecuación de la recta es: $A+t\cdot\vec{v}=(2,1,6)+t\cdot(1,1,1)$, o sea, $(x,y,z)=(2+t,1+t,6+t)$. Como el punto debe pertenecer al plano π, debe verificar que:

$$3 = x+y+z = (2+t)+(1+t)+(6+t) = 9+3t \Rightarrow 3t=-6 \Rightarrow t=-2$$

Por tanto, el punto P es:

$$P = A+(-2)\cdot\vec{v} = (2,1,6)+(-2)\cdot(1,1,1) = (0,-1,4).$$

(c) El punto simétrico A′, se puede calcular como

$$A' = P - \overrightarrow{PA} = (0,-1,4) - ((2,1,6)-(0,-1,4)) = (0,-1,4) - (2,2,2) = (-2,-3,2)$$

BY NC SA

Bloque 4A. Solución:

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Los datos del enunciado son los siguientes:

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{1}{6}$$

Además

$$P(Copas/A)=\frac{2}{5},\qquad P(Copas/B)=\frac{3}{5},\quad P(Copas/C)=\frac{4}{5}$$

(a)

$$P(Bas)=P(Bas\cap A)+P(Bas\cap B)+P(Bas\cap C)=P(Bas/A)P(A)+P(Bas/B)P(B)+P(Bas/C)P(C)=$$

$$=\frac{3}{5}\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\frac{1}{6}=0.4667$$

(b)

$$P(B/Cop)=\frac{P(B\cap Cop)}{P(Cop)}=\frac{P(Cop/B)P(B)}{P(Cop)}=\frac{\frac{3}{5}\frac{1}{3}}{1-0.4667}=0.3750$$

BY NC SA

Bloque 4B. Solución:

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

(a) Se pide la probabilidad siguiente

$$P(65 \leq X \leq 75) = P(X \leq 75) - P(X \leq 65)$$

Tipificando las probabilidades a la N(0, 1) se tiene

$$P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75-70}{10} = 0.5\right) = F(0.5) = 0.6915$$

$$P(X \leq 65) = P\left(Z \leq \frac{65-70}{10} = -0.5\right) = 1 - F(0.5) = 0.3085$$

Por lo tanto: $P(65 \leq X \leq 75) = P(X \leq 75) - P(X \leq 65) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

(b) $P(X \leq 75) = 0.6$, que corresponde a $F(0.15)$

$$Z = \frac{75-\mu}{10} = 0.15 \Rightarrow \mu = 74.85$$

BY NC SA

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado $a \in R$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \quad -1 \quad 1)$.

$a)$ Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

$b)$ Calcula el rango de A según los valores de x.

$c)$ Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Problema 2:

2º) Dado $m \in R$, se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{matrix} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$b)$ Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

Problema 3:

3º) Se considera la función: $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

$a)$ Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

$b)$ Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x) = -sen\,(2x) + 1$.

$a)$ Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el origen de coordenadas.

$b)$ Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y al vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula un vector director de la recta r.

$b)$ Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

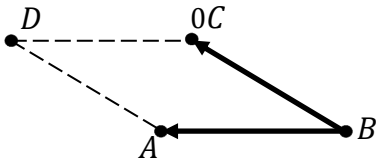
$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s', siendo s' la recta $s' \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z$.

Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 6, 1)$, $C(-2, -1, 5)$ y $E(-1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.



$c)$ Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por E.

Problema 7:

7º) En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

$c)$ Si una persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Problema 8:

8º) Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1,75 m y desviación típica 0,65 m.

$a)$ Calcula la probabilidad de que, tomando un adulto al azar mida más de 1,85 m.

$b)$ Si se toma una muestra de 10.000 personas, ¿cuántas personas medirán más de 1,85 metros?

$c)$ Se observa que, de las 10.000 personas de la muestra, 6.500 meden menos de 1,90 metros, suponiendo que se mantiene la media, ¿cuál sería la desviación típica?

Algunos valores de la función distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$:

$F(0) = 0{,}5$; $F(0{,}15) = 0{,}6$; $F(0{,}1538) = 0{,}5596$; $F(0{,}65) = 0{,}7422$ y $F(0{,}385) = 0{,}65$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Dado $a \in R$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \quad -1 \quad 1)$.

$a)$ Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

$b)$ Calcula el rango de A según los valores de x.

$c)$ Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos el determinante, restando a la tercera fila la primera:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x + 0 + 0) - (1) = x - 1$$

La matriz posee inversa si y solo si el determinante es no nulo. Por tanto posee inversa salvo si x - 1 = 0 es decir:

$$\boldsymbol{La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall x \in R - \{1\}.}$$

Apartado (b)

La matriz es invertible cuando x es distinto de 1. Por tanto para esos valores el rango es máximo, 3.

El caso x = 1 es mejor hacerlo aparte. Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La submatriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo (-1) por lo que el rango es al menos 2. Y no puede ser 3, pues ya hemos visto que para x = 1, el determinante de orden 3 es 0.

En consecuencia:

La matriz tiene rango 2 si $x = 1$. En caso contrario tiene rango 3.

Apartado (c)

El producto AB puede hacerse pues A es 3x3 y B es 3x1 con lo que el resultado es 3x1.

Multiplicando:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El producto **AC no puede hacerse** ya que a es 3x3 y C es 1x3. El número de columnas de A (3) debería coincidir con el de filas de C (1) pero no es así.

BY NC SA

Problema 2:

2º) Dado $m \in R$, se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{matrix} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+2z=m \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$b)$ Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z=3$.

Solución:

Apartado (a)

La matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante por la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (8+3+3)-(6+6+2) = 14-14 = 0$$

Por tanto el sistema nunca puede ser compatible determinado.

El caso a = 1 lo hacemos aparte a continuación. En primer lugar, sustituimos en el sistema original. La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right)$$

Cambiamos el orden de las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right)$$

Restando a la segunda fila la primera por 2 y a la tercera la primera por 3 tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & m+3 \end{array}\right)$$

Finalmente, restamos a la fila tercera la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

con lo que confirmamos que el sistema nunca tiene solución única. Existe solución si y solamente si *m* = 0.

En este caso, deben existir infinitas soluciones. Lo volvemos a poner en forma de sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ -3y-z=3 \end{cases}$$

Pasamos z al otro lado para obtener

$$\begin{cases} x+2y=-1-z \\ -3y=3+z \end{cases}$$

BY NC SA

La solución debe aparecer en función de un parámetro. Sea pues $z = \lambda$

Despejando en la segunda ecuación se tiene $y = -1 - \frac{\lambda}{3}$

Llevándola a la segunda:

$$x + 2\left(-1 - \frac{\lambda}{3}\right) + \lambda = -1$$

$$x - 2 + \frac{\lambda}{3} = -1$$

De donde $x = 1 - \frac{\lambda}{3}$

La solución es $\left(1 - \frac{\lambda}{3}, -1 - \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$

En resumen:

El sistema es incompatible si m es distinto de 0 y compatible indeterminado en otro caso. Nunca tiene solución única.

La solución general del sistema es $\left(1 - \frac{\lambda}{3}, -1 - \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ donde λ es cualquier valor real.

Apartado (b)

Para que exista solución, debe ser m = 0. En tal caso basta tomar λ = 3 y sustituir en la solución general:$\left(1 - \frac{3}{3}, -1 - \frac{3}{3}, 3\right)$.

Por tanto

Sí, es posible. Ocurre cuando $\lambda = 0$ y dicha solución da $x = 0, y = -2, z = 3$

Problema 3:

3º) Se considera la función: $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

$a)$ Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

$b)$ Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

Apartado (a)

Para calcular el dominio de la función, comprobamos qué es lo que puede fallar. No hay raíces ni logaritmos, lo único problemático es el denominador.

Igualando a 0, 1 – x = 0 da *x* = 1.

El dominio son todos los reales excepto el 1.

Para calcular las asíntotas, empezamos por las verticales. En el 1, el denominador se anula, es el único sitio donde puede haberla.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{0}$ indeterminado. Necesitamos calcular los límites laterales.

El numerador es 2 cuando *x* = 1, por lo que en las proximidades de 1, es positivo (de hecho es siempre positivo). El denominador es 1 – x que es negativo a la derecha de 1 y positivo a la izquierda. Por tanto el límite lateral derecho en *x* = 1 es menos infinito y el izquierdo mas infinito.

Otra manera de verlo es dar valores muy próximos. Se tiene *f*(1.1) = -24.2, luego el limite lateral derecho es menos infinito.

A su vez *f*(0.1) = -16.2 de donde el límite lateral izquierdo es menos infinito. Tiene una asíntota vertical en *x* = 1 .

Calculemos las oblicuas. $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x-x^2} = -2$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1-x} - (-2)x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = -2$$

Tiene una asíntota oblicua en infinito, que es y = -2*x* - 2.

Si hay asíntota oblicua no hay horizontal.

Los límites en menos infinito son exactamente iguales, con el resultado de que hay la misma asíntota en menos infinito. Esto, de hecho, ocurre siempre para funciones racionales (es decir, cocientes de polinomios).

En resumen:

Hay una asíntota vertical en x = 1 y una oblicua en mas y menos infinito, que es la recta $y = -2x - 2$. No hay asíntotas horizontales

Apartado (b)

La derivada de la función es

$$f'(x)=\frac{4x(1-x)-2x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$$

$f'(0) = 0$ es $4x-x^2 = 0$ cuyas soluciones son 0 y 2.

Hay que considerar también los ceros del denominador, que es solo $x = 1$.

Por tanto, debemos tener en cuenta los valores de $f'(0)$ en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$.

Damos valores intermedios.

$f'(-2) = -16/9 < 0$, $f'(0.5) = 0.25 > 0$, $f'(1.5) = 0.25 > 0$, $f'(3) = -1{,}5 > 0$

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 1)$, crece en $(1, 2)$ y vuelve a decrecer en $(2,+\infty)$.

Con lo anterior, sabemos ya máximos relativos (puntos donde la función pasa de crecer a decrecer) y mínimos relativos (puntos donde la función pasa de decrecer a crecer). Nótese que hay que excluir los puntos de discontinuidad, al menos hasta hacer el dibujo.

Calculando las imágenes tenemos $f(0) = 0$ y $f(2) = -8$

$$\boldsymbol{Mínimo: O(0,0).}$$

$$\boldsymbol{Máximo: A(2,-8).}$$

Para saber si son o no extremos absolutos hay que hacer el dibujo. Obsérvese que no hay contradicción alguna en que la imagen del mínimo relativo sea mayor que la del máximo relativo. Lo que está ocurriendo quedará claro en el dibujo.

Pasemos a la concavidad y convexidad. Derivamos otra vez.

$$f''(x)=\frac{(4-4x)(1-x)^2-(4x-2x^2)\,2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$\frac{(4-4x)(1-x)+(8x-4x^2)}{(1-x)^3}=\frac{4-4x-4x+4x^2+8x-4x^2}{(1-x)^3}=\frac{4}{(1-x)^3}$$

El numerador no se anula nunca, el denominador cambia de signo en 1.

Si $x < 1$, $f''(x) > 0$ con lo que la función es convexa (ramas hacia arriba, forma de U)

Si $x > 1$, $f''(x) < 0$ con lo que la función es cóncava (ramas hacia abajo, forma de ∩)

En resumen:

$$\boldsymbol{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \in (1,+\infty).}$$

$$\boldsymbol{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty,1).}$$

No hay punto de inflexión en $x = 1$ puesto que allí la función no está definida

BY NC SA

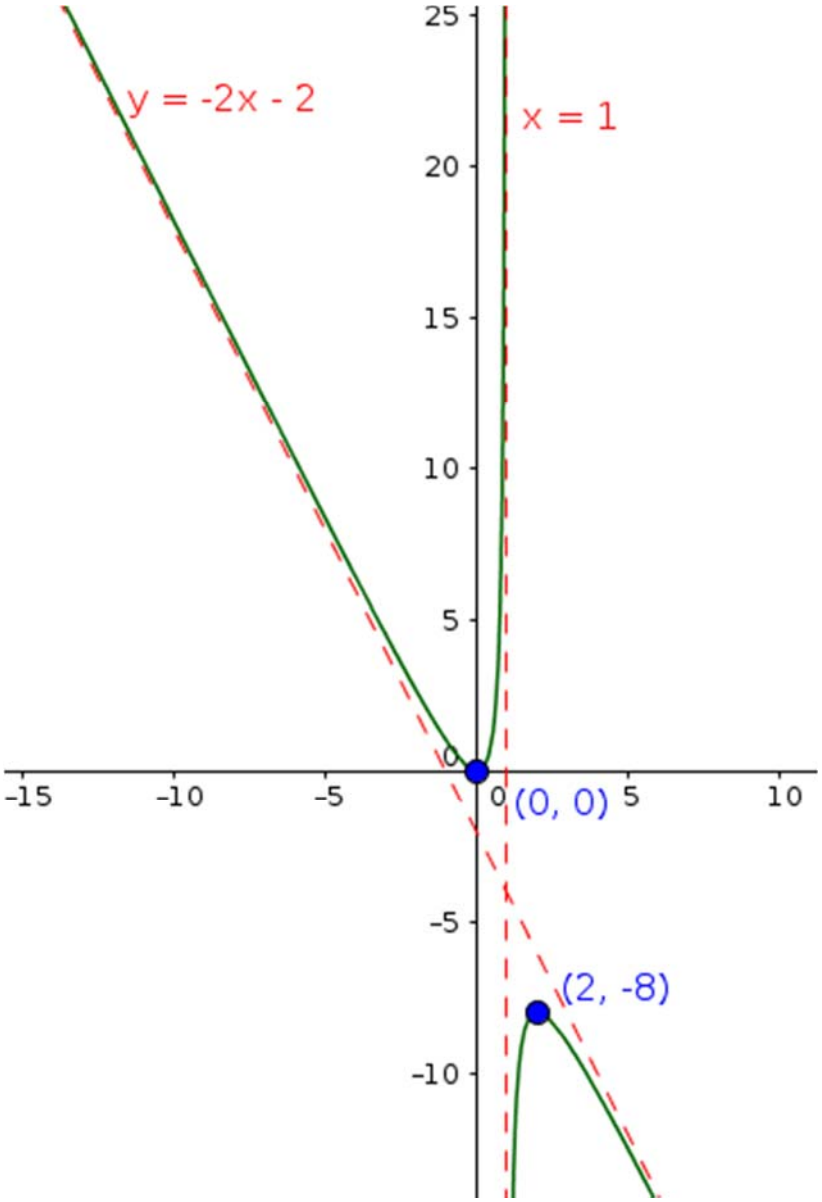
Apartado (c)

El estudio completo ya está hecho. Sólo falta darle los valores. Hay que darle los ceros de la primera y segunda derivada (si hubiere), así como los límites laterales en sus puntos de discontuinidad. En 1 la función no está bien definida.

x	$-\infty$	0	1^-	1^+	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	-8	$-\infty$

Notas

- $-\infty$ y $+\infty$ en x deben entenderse como límites.
- 1^- y 1^+ son respectivamente los límites laterales derecho e izquierdo en 1.



Problema 4:

4º) Dada la función $f(x) = -sen\,(2x) + 1$.

$a)$ Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el origen de coordenadas.

$b)$ Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos la integral indefinida. Podría hacerse directamente, pero es más claro con un pequeño cambio de variable. Lo primero, separamos en dos y hacemos una de ellas.

$$\int -sen\,(2x) + 1dx = -\int sen\,(2x)dx + \int 1\,dx = x - \int sen\,(2x)dx$$

$$t = 2x \text{de donde } dt = 2dx \text{es decir } \frac{dt}{2} = dx.$$

Así pues:

$$\int -sen\,(2x) + 1dx = x - \int sen\,(t)\frac{dt}{2} = x + \frac{cos(t)}{2} + K$$

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} + K = \frac{t^{3/2}}{3} + K$$

siendo *K* la constante de integración.

Deshaciendo el cambio, $\int -sen\,(2x) + 1dx = \frac{cos(2x)}{2} + x + K$

Es fácil comprobar, derivando, que efectivamente es la primitiva general.

Si tiene que pasar por (0, 0) es un valor concreto de *K*. Sustituimos en 0.

$0 = \frac{cos0}{2} + 0 + K = \frac{1}{2} + K$ luego *K* = -1/2.

La única primitiva que pasa por el origen es $\boldsymbol{F(x) = \frac{cos(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}}$

Apartado (b)

Ya tenemos hecha la primitiva. Lo que tenemos que hacer es ver el signo. Ahora bien, como el seno está entre -1 y 1, *sen*(2*x*) + 1 es SIEMPRE positivo o 0, pues el valor más grande que puede tomar *sen* (2*x*) es 1.

Eso simplifica enormemente el problema, pues basta integrar. Ya la indefinida la tenemos ya hecha.

$$\int_0^{\pi} (-sen(2x) + 1)dx = \left[cos\frac{(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2} + \pi - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right) = \pi$$

El área de la región es π u²

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y al vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula un vector director de la recta r.

$b)$ Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s', siendo s' la recta $s' \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z$.

Solución:

Apartado (a)

Para calcular un vector director, basta calcular dos puntos. Y para ello, basta dar dos valores a α, por ejemplo 0 y 1 (valdrían dos cualesquiera).

El valor 0 da (1, 1, 0) en tanto el 1 da (2, 1, -1). Restando obtenemos (1, 0, -1).

Un vector director es $(1, 0, -1)$. Vale también cualquier múltiplo suyo.

Podríamos haberlo calculado de modo más sencillo, simplemente notando que la forma vectorial es (x, y, z) = (1, 1, 0) + α(1, 0, -1) e identificar el vector.

Apartado (b)

Nos piden un vector $\overline{u}$perpendicular a la recta r tal que $\overline{u}x\overline{v_r}$ sea proporcional a $\overline{v}$. Dicho vector, al ser perpendicular a la recta y a $\overline{v}$ automáticamente será director de s.

Llamemos pues $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Si es perpendicular a la recta r se tiene

0 = $(u_1, u_2, u_3) \cdot (1,0,-1) = u_1 - u_3$

de donde $u_3 = u_1$. Sustituyendo en el producto vectoral tenemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-u_2, 2u_1, -u_2)$$

Ese vector debe ser proporcional a (1, 1, -1) de modo que basta tomar u_2 = -1 y u_1 = 1/2 con lo que el vector original es $(1/2, -1, 1/2)$. De hecho vale cualquier múltiplo. Por ejemplo, multiplicando por 2.

Un vector con esas características es $\overrightarrow{v_s} = (1, -2, 1)$. Vale también cualquier múltiplo suyo.

Apartado (c)

Un plano viene dado por un punto y dos vectores. Un punto de la recta r es (1, 1, 0) y su vector es (1, 0, -1). Solo necesitamos un vector de s'. Sale directamente de su forma continua.

Esta es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ de modo que un vector director es. $(1, -2, 1)$

El plano que contiene a r y s' es $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

CC BY NC SA

El problema ya está resuelto, pues no nos piden una forma específica. Es habitual desarrollar el determinante por la primera fila.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -2(x-1) - 2(y-1) - 2z$$

que operando es $x + y + z = 2$ o bien: $x - z = 2$

El plano que contiene a r y s' es $x + y + z - 2 = 0$

BY NC SA

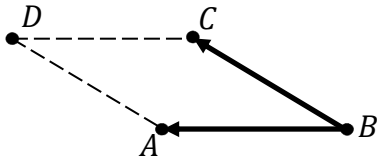
Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1,0,1)$, $B(1,6,1)$, $C(-2,-1,5)$ y $E(-1,1,1)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.

$c)$ Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por E.



Solución:

Apartado (a)

La manera más sencilla es calcular los dos vectores y escribir la forma del plano como determinante

AB = (0, 6, 0); AC = (-3, -1, 4)

El plano que contiene a los tres puntos es $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

El problema ya está resuelto, pues no nos piden una forma específica. Es habitual desarrollar el determinante por la primera fila.

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24(x-1) + 18(z-1)$$

Dividiendo entre 6 tenemos 4 (x-1) + 3 (z-1) = 0 de donde

El plano que contiene a A, B y C es $4x + 3z = 7$

Apartado (b)

Sea $D = (d_1, d_2, d_3)$ Sabemos que AD = BC. Por tanto

(d_1 -1, d_2- 0, d_3 - 1) = (-2 -1, -1 -6, 5 – 1)

o, lo que es lo mismo:

d_1 -1 = -3 que da d_1 = - 2

d_2 -1 = -7 que da d_2 = - 7

d_3 -1 = 4 que da d_3 = 5

El punto D es (-2, -7, 5)

Para calcular el área basta hacer el módulo del producto vectorial BC x BA

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (24, 0, 18)$$

$$\sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{6^2 \cdot 4^2 + 6^2 \cdot 3^2} = 6\sqrt{4^2 + 3^2} = 6 \cdot 5 = 30$$

El área es 30 u²

BY NC SA

Apartado (c)

El plano π es 4x + 3z = 7 por lo que su vector normal es (4, 0, 3). Tenemos pues un punto y un vector, no necesitamos más.

La recta es (x, y, z) = (-1, 1, 1) + α(4, 0, 3)

O en forma continua: $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$.

BY NC SA

Problema 7:

7º) En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

a) Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

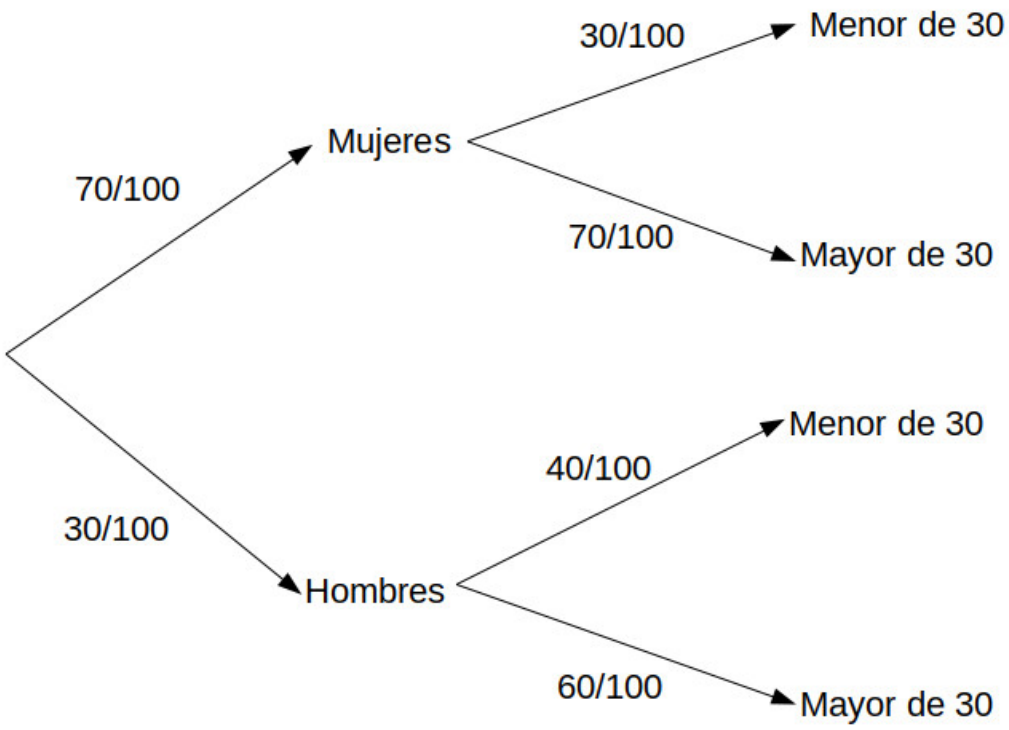
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

c) Si una persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos *H* = "Ser hombre", $\overline{H}$= "Ser mujer" (su complementario), *J* = "Ser menor de 30 años" y $\overline{J}$ = "Ser mayor de 30 años" (su complementario).

La probabilidad de ser menor de 30 años se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total.

$$P(J) = P(J/H)P(H) + P(J/\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{70}{100} = \frac{12}{100} + \frac{21}{100} = \frac{33}{100}$$

La probabilidad de asignar un número a una persona menor de 30 años es 33/100 =

33 %

Apartado (b)

Es simplemente seguir la rama de abajo.

$$P(H \cap \bar{J}) = P(\bar{J}/H)P(H) = \frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

La probabilidad de hombre que no tenga menos de 30 años es $9/50 = 18$ %

Apartado (c)

Nos piden $P(H/\bar{J}) = \frac{P(H \cap \bar{J})}{P(\bar{J})}$

No tenemos $P(\bar{J})$, la probabilidad de no menor de 30 años. Pero sí tenemos la complementaria, del apartado (a). Así pues $P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100}$

$$P(H/\bar{J}) = \frac{P(H \cap \bar{J})}{P(\bar{J})} = \frac{P(\bar{J}/H)P(H)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{67}{100}} = \frac{18}{67} \approx 0.2688 = 26.87\%$$

Si se ha asignado el número a una persona no mayor de 30 años, la probabilidad de que sea un hombre es 18/67, aproximadamente el 26.87 %

Problema 8:

8º) Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1,75 m y desviación típica 0,65 m.

$a)$ Calcula la probabilidad de que, tomando un adulto al azar mida más de 1,85 m.

$b)$ Si se toma una muestra de 10.000 personas, ¿cuántas personas medirán más de 1,85 metros?

$c)$ Se observa que, de las 10.000 personas de la muestra, 6.500 meden menos de 1,90 metros, suponiendo que se mantiene la media, ¿cuál sería la desviación típica?

Algunos valores de la función distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$:

$F(0) = 0{,}5;\ F(0{,}15) = 0{,}6;\ F(0{,}1538) = 0{,}5596;\ F(0{,}65) = 0{,}7422$ y $F(0{,}385) = 0{,}65.$

Solución:

Apartado (a)

Sea X la variable aleatoria que mide la altura. Nos dicen que es *N*(1.75, 0.65)

Si tipificamos la altura, la variable aleatoria $Z = \frac{X-1.75}{0.65}$ es normal (0,1).

De modo que:

$$P(1.85 < X) = P\left(\frac{1.85-1.75}{0.65} < \frac{X-1.75}{0.65}\right) = P(0.1538 < Z) = P(0.1538 < Z < \infty)$$
$$= F(\ \ ) - F(0.1538) = 1 - 0.5596 = 0.4404$$

La probabilidad de medir más de 1.85 es 0.4404, el 44.04 %

Apartado (b)

La cuestión está mal planteada. Obviamente es un valor aleatorio, por lo que no se puede saber a priori. De hecho es una distribución binomial.

Lo que sí se puede saber es cuántas se espera que midan más de 1.85, es decir el 44.04% de ellas. El 44.04% de 10 000 son 4404 personas. Otra manera de verlo es considerar que el número de personas que midan más de 1.85 es una distribución binomial, *B*(10000,0.4404) y su media es *np* es decir $10000 \cdot 0.4404 = 4404$

Se espera que 4 404 personas midan más de 1.85 en una muestra de 10 000 personas.

Apartado (c)

La nueva variable aleatoria es *N*(1.75, σ) siendo σ la desviación típica. Se tiene ahora que $Y = \frac{X-1.75}{\sigma}$ es normal (0, 1).

$$P(X < 1.90) = \frac{6500}{10000} = 0.65$$

Despejando *X* tenemos:

$$0.65 = P(1.75 + \sigma Y < 1.90) = P\left(Y < \frac{0.15}{\sigma}\right) = F\left(\frac{0.15}{\sigma}\right)$$

Buscamos el 0.65 y tenemos *F*(0.385) = 0.65.

Igualando conseguimos la ecuación:

BY NC SA

$\frac{0.15}{\sigma} = 0.385$ de donde $\sigma = \frac{0.15}{0.385} = 0.3896$

La desviación típica es $\sigma = 0,3896$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

ENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$ *e* $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y λ un parámetro real cualquiera.

$a)$ Calcule la matriz $A-\lambda I$.

$b)$ Calcule la matriz $(A-\lambda I)^2$.

$c)$ Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2=B$.

Problema 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix}3x-2y=4\\ay=-3\\ax+3z=0\end{matrix}\right\}$, dependientes del parámetro a:

$a)$ Discuta el sistema según el parámetro a.

$b)$ Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvelo.

Problema 3:

3º) Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

$a)$ Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

$b)$ Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{1-f(x)}{6x-4}$.

$c)$ Esboce la gráfica de la función $y=f(x)$.

$d)$ Calcule la superficie acotada por la gráfica de la función $y=f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x=0$ y $y=1$.

BY NC SA

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+a}{2x-4} & si\ x\le 0\\ 10x^2+x+b & si\ x>0\end{cases}$:

$a)$ Halle la condición que han de cumplir los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea continua.

$b)$ Calcule $f'(x)$.

$c)$ Halle la condición y calcule los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea derivable.

Problema 5:

5º) Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1), B(2,1,0)\ y\ C(4,3,-2)$.

$a)$ Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$b)$ Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

$c)$ Encuentre las coordenadas del vértice D.

$d)$ Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

Problema 6:

6º) Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y=3\\ 2x-z=1\end{cases}\ y\ s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-4-\lambda\end{cases},\ \lambda\in R.$

$a)$ Encuentre una ecuación vectorial para la recta r.

$b)$ Encuentre la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

$c)$ Encuentre la ecuación general del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2,0,-1)$.

$d)$ Encuentre la ecuación general del plano paralelo a r que contiene a la recta s.

Problema 7:

7º) Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A)=0{,}7$, $P(\overline{B})=0{,}4$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}58$, donde $\overline{A}\ y\ \overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(\overline{A}), P(B)\ y\ P(A\cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

$b)$ $P(A\cup B)$. $c)$ $P(B\cap\overline{A})$. $d)$ $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

Problema 8:

8º) El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

$a)$ ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

$b)$ ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

$c)$ ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8{,}8-c;\ 8{,}8+c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$ *e* $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y λ un parámetro real cualquiera.

$a)$ Calcule la matriz $A-\lambda I$.

$b)$ Calcule la matriz $(A-\lambda I)^2$.

$c)$ Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2=B$.

Solución:

$$a)\ A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}}.$$

$$b)\qquad (A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&\lambda^2+1\end{pmatrix}}.$$

$$c)\ (A-\lambda I)^2=B\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda^2+2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&\lambda^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

El único valor que satisface la igualdad de las matrices es $\underline{\lambda=2}$

BY NC SA

Problema 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{matrix}\right\}$, dependientes del parámetro a:

$a)$ Discuta el sistema según el parámetro a.

$b)$ Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvelo.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & a & 0 & -3 \\ a & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}=9a=0\Rightarrow a=0.$$

$$\boldsymbol{Para\ a\neq 0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \{3C_1=-2C_2\}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=27\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$ Se resuelve el sistema para $a\neq 0$.

$$\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow y=-\frac{3}{a}.\quad 3x+\frac{6}{a}=4;\ \ 3ax+6=4a\Rightarrow x=\frac{4a-6}{3a}.$$

$$a\cdot\frac{4a-6}{3a}+3z=0;\ \ \frac{4a-6}{3}+3z=0;\ \ 4a-6+9z=0\Rightarrow z=\frac{4a-6}{9}.$$

$$Solución: x=\frac{4a-6}{3a};\ \ y=-\frac{3}{a};\ \ z=\frac{4a-6}{9}, \forall a\in R-\{0\}.$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$.

$a)$ Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

$b)$ Calcule $\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

$c)$ Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

$d)$ Calcule la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $y = 1$.

Solución:

$a)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x-2}.$$

$$m = f'(x) = 3 \cdot e^{3x-2} = \frac{3}{e};\ \ e \cdot e^{3x-2} = 1;\ \ e^{3x-1} = 1 \Rightarrow 3x - 1 = 0;$$

$3x = 1;\ \ x = \frac{1}{3}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{3\cdot\frac{1}{3}-2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$:

$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right);\ \ ey - 1 = 3x - 1.$$

$$\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 3x - ey = 0.}$$

$$b)\ \lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4} = \lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \frac{1-e^{3\cdot\frac{2}{3}-2}}{6\cdot\frac{2}{3}-4} = \frac{1-e^0}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

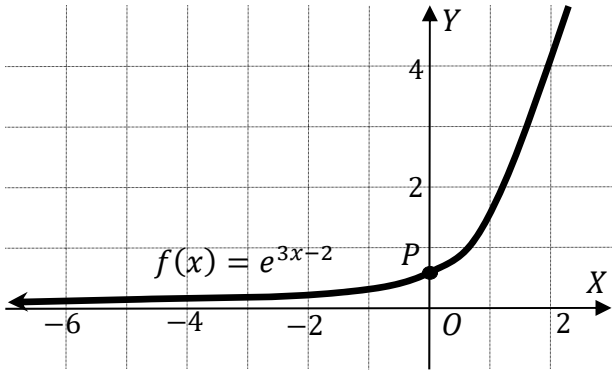
$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{-3 \cdot e^{3x-2}}{6} = \frac{-3 \cdot e^{3\cdot\frac{2}{3}-2}}{6} = \frac{-3 \cdot e^0}{6} = \frac{-3}{6} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4} = -\frac{1}{2}.$$

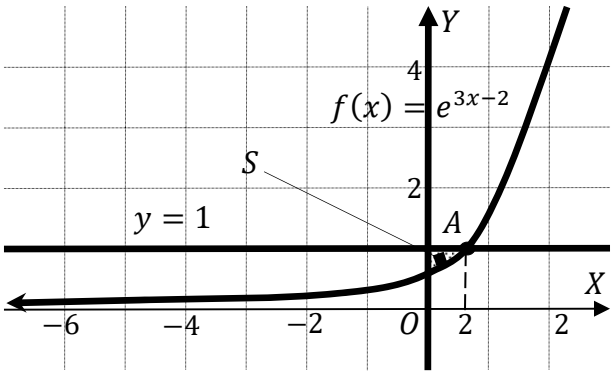
$c)$ Para hacer una gráfica, aproximada, de la función $y = e^{3x-2}$ se tiene en cuenta que, por ser una función exponencial de base mayor que 1, es monótona creciente en su dominio, que es R; que tiene al eje de abscisas como asíntota horizontal en su parte negativa, por ser $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{3x-2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$. El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es: $f(0) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$.

BY NC SA

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$ La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura siguiente.



El punto de corte de la función y la recta $y = 1$ tiene como abscisa la raíz de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$y = f(x) \Rightarrow e^{3x-2} = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 0;\ \ 3x = 2;\ \ x = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}} (1 - e^{3x-2}) \cdot dx = [x]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3} - I. \quad (*)$$

$$I = \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3x - 2 = t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{2}{3} \rightarrow t = 0 \\ x = 0 \rightarrow t = -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^{0} e^t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [e^t]_{-2}^{0} = \frac{1}{3} \cdot (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \Rightarrow I = \frac{e^2 - 1}{3e^2}.$$

Sustituyendo este valor en (*):

$$S = \frac{2}{3} - I = \frac{2}{3} - \frac{e^2 - 1}{3e^2} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{3e^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{e^2 + 1}{3e^2}\ u^2 \cong 0,378\ u^2.}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+a}{2x-4} & si\ x\le 0\\ 10x^2+x+b & si\ x>0\end{cases}$:

$a)$ Halle la condición que han de cumplir los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea continua.

$b)$ Calcule $f'(x)$.

$c)$ Halle la condición y calcule los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea derivable.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a}{2x-4}=-\frac{a}{4}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(10x^2+x+b)=b=f(0)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow -\frac{a}{4}=b\Rightarrow a=-4b.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ a=-4b.}}$$

$b)$ $$f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x<0\quad (*)\\ 20x+1 & si\ x\ge 0\end{cases}.$$

(*) $g(x)=\frac{x^2+a}{2x-4}\Rightarrow g'(x)=\frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{2^2\cdot(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-a}{2\cdot(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-a}{2\cdot(x-2)^2}$.

$c)$ La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x<0\quad (*)\\ 20x+1 & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow x=0\Rightarrow f'(0)=\begin{cases}-\frac{a}{8} & si\ x<0\\ 1\ si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -\frac{a}{8}=1\Rightarrow a=-8.$$

Teniendo en cuenta que $a=-4b\Rightarrow b=-\frac{a}{4}=-\frac{-8}{4}\Rightarrow b=2$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ R\ para\ a=-8\ y\ b=2.}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1), B(2,1,0)\ y\ C(4,3,-2)$.

$a)$ Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$b)$ Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

$c)$ Encuentre las coordenadas del vértice D.

$d)$ Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

Solución:

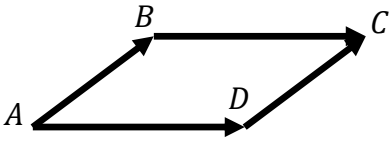
$a)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,1,0) - (1,0,-1)] = (1,1,1).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4,3,-2) - (1,0,-1)] = (3,3,-1).$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,3,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{3+3-1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} \Rightarrow \underline{\cos\beta = \frac{5\sqrt{57}}{57}}.$$

$b)$ $x_m = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2};\ y_m = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};\ z_m = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)}.$



$c)$ $\overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} =$

$= [(4,3,-2) - (x,y,z)] = (4-x, 3-y, -2-z).$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = (4-x,3-y,-2-z) \Rightarrow \begin{cases} 4-x=1 \rightarrow x=3 \\ 3-y=1 \rightarrow y=2 \\ -2-z=1 \rightarrow z=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(3,2,-3)}}.$$

$d)$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(3,2,-3) - (1,0,-1)] = (2,2,-2)$

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{matrix}\right\| = |-2i+2j+2k-2k-2i+2j| =$$

$$= |-4i+4j| = 4\cdot|-i+j| = 4\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2} = 4\cdot\sqrt{2}.$$

$$\underline{\mathbf{S = 4\sqrt{2}\ u^2}}.$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases}, \lambda \in R.$

$a)$ Encuentre una ecuación vectorial para la recta r.

$b)$ Encuentre la posición relativa de las rectas r y s.

$c)$ Encuentre la ecuación general del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2,0,-1)$.

$d)$ Encuentre la ecuación general del plano paralelo a r que contiene a la recta s.

Solución:

$a)$ $\quad r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\delta;\ y=3-\delta;\ z=-1+2\delta \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\delta \\ y=3-\delta \\ z=-1+2\delta \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{r \equiv (x,y,z)=(0,3,-1)+\delta \cdot (1,-1,2).}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,3,-1)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1,0,-4)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,0,-4)-(0,3,-1)]=(1,-3,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3-6+1+2-3-3=-6 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}=3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

$c)$ Siendo $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$ un vector director de la recta, la ecuación general del plano π es de la forma $\pi \equiv x-y+2z+D=0$.

Si el plano contiene al punto $P(2,0,-1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x-y+2z+D=0 \\ P(2,0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2-0+2\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x-y+2z=0.}$$

BY NC SA

$d)$ El plano γ pedido tiene a $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -1)$ como vectores directores y contiene al punto $B(1, 0, -4) \in s$. Su expresión general es la siguiente:

$$\gamma(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1) + 2y - (z+4) + (z+4) + 2(x-1) + y = 0;\ \ 3(x-1) + 3y = 0;$$

$$x - 1 + y = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\gamma \equiv x + y - 1 = 0}.$$

BY NC SA

Problema 7:

7º) Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0{,}7$, $P(\overline{B}) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(\overline{A}), P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

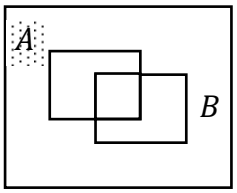
$b)$ $P(A \cup B)$. $c)$ $P(B \cap \overline{A})$. $d)$ $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

Solución:

$a)$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3}$. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 = \underline{0{,}6}$.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58 = 1 - P(A \cap B)$;

$P(A \cap B) = 1 - 0{,}58 = \underline{0{,}42}$.



$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

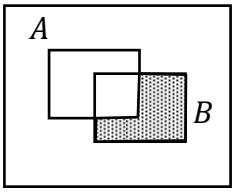
Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}42 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \Rightarrow$

$\underline{A \text{ y } B \text{ son independientes}}$.

$b)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}42 = \underline{0{,}88}$.

$c)$ $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}42 = \underline{0{,}18}$.



$B \cap \overline{A} = B - (A \cap B)$

$d)$ $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}42}{0{,}60} = \underline{0{,}7}$.

$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}60} = \underline{0{,}3}$.

BY NC SA

Problema 8:

8º) El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

$a)$ ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

$b)$ ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

$c)$ ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8{,}8 - c;\, 8{,}8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

Solución:

$Datos:\ \mu = 8{,}8;\ \ \sigma = 3.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(8{,}8;\ 3).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8{,}8}{3}$.

$a)\ P = P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{1{,}2}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446 = 34{,}46\ \%}.$

$$P(X \geq 10) = \underline{0{,}3446 = 34{,}46\ \%}.$$

$b)\ P = P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-1{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{1{,}2}{3}\right) =$

$= P(-0{,}6 \leq Z \leq 0{,}4) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}6) =$

$= P(Z \leq 0{,}4) - [1 - P(Z \leq 0{,}6)] = P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z \leq 0{,}6) =$

$= 0{,}6554 - 1 + 0{,}7257 = 1{,}3811 - 1 = \underline{0{,}3811 = 38{,}11\ \%}.$

$$P(7 \leq X \leq 10) = \underline{0{,}3811 = 38{,}11\ \%}$$

$c)\quad P(8{,}8 - c \leq X \leq 8{,}8 + c) = P\left(\frac{8{,}8-c-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{8{,}8+c-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) = 0{,}9800.$

$$P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \leq -\frac{c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right] =$$

$= P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}9800;$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 1{,}9800;\ \ P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0{,}9900.$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,9900 le corresponde, aproximadamente 2,33, por lo cual:

$$\frac{c}{3} = 2{,}33 \Rightarrow \underline{c = 6{,}99}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Considere las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & 2 & -1\\ 2 & \lambda & -1\end{pmatrix}, B=(\lambda \quad 3\lambda \quad 6)$.

$a)$ Calcule el determinante de la matriz A.

$b)$ En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A.

$c)$ Para el valor $\lambda=1$, halle la inversa de la matriz A.

$d)$ Para el valor $\lambda=1$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A=B$.

Solución:

$a)$ $\quad |A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ \lambda & 2 & -1\\ 2 & \lambda & -1\end{vmatrix}=-2-\lambda^2-2+4+\lambda+\lambda \Rightarrow$

$$\underline{|A|=-\lambda^2+2\lambda.}$$

$b)$ $\quad |A|=0\Rightarrow -\lambda^2+2\lambda=0;\ -\lambda(\lambda-2)=0\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{\lambda\neq 0}\\ \boldsymbol{\lambda\neq 2}\end{Bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A=3}\ \boldsymbol{y\ para}\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{\lambda=0}\\ \boldsymbol{\lambda=2}\end{Bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A=2.}}$$

$c)$ Para el valor $\lambda=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \begin{Bmatrix}F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-2F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \begin{Bmatrix}F_3\to F_3+F_2\\ F_1\to F_1-F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1\to F_1+F_3\}\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}.}}$$

$d)$ $X\cdot A=B;\ X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1};\ X\cdot I=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}.$

Para $\lambda=1\Rightarrow B=(1 \quad 3 \quad 6)$.

$$X=B\cdot A^{-1}=(1 \quad 3 \quad 6)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{X=(-22 \quad 9 \quad 7).}$$

BY NC SA

Problema 2:

2º) Durante un año, cierta empresa vende 21.000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21.000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo.

b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$.

c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda resolver.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de vehículos de los tipos A, B y C que vende la empresa, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=21.000 \\ 10.000x+15.000y+20.000z=332.000.000 \\ \lambda x+y=21.000 \end{matrix}\right\}$$

$$\boldsymbol{\left.\begin{matrix} x+y+z=21.000 \\ 2x+3y+4z=66.400 \\ \lambda x+y=21.000 \end{matrix}\right\}.}$$

b) Para $\lambda = 3$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+y+z=21.000 \\ 2x+3y+4z=66.400 \\ 3x+y=21.000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 21.000 - 3x.$

$$\left.\begin{matrix} x+(21.000-3x)+z=21.000 \\ 2x+3(21.000-3x)+4z=66.400 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -2x+z=0 \\ -7x+4z+63.000=66.400 \end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix} -2x+z=0 \\ -7x+4z=3.400 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 8x-4z=0 \\ -7x+4z=3.400 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 3.400.$$

$$y = 21.000 - 3 \cdot 3.400 = 21.000 - 10.200 \Rightarrow y = 10.800.$$

$$3.400 + 10.800 + z = 21.000; \;\; z = 21.000 - 14.200 \Rightarrow z = 6.800.$$

El número de vehículos vendidos por la empresa ha sido:

$$\boldsymbol{\underline{3.400 \; del \; tipo \; A; 10.800 \; del \; tipo \; B \; y \; 6.800 \; del \; tipo \; C.}}$$

c) Se trata de que el sistema sea incompatible que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser diferentes.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 4 & 66.400 \\ \lambda & 1 & 0 & 21.000 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes tiene que ser dos, para lo cual, es necesario que se anule su

determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ 2 + 4\lambda - 3\lambda - 4 = 0;\ \ \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 4 & 66.400 \\ 2 & 1 & 0 & 21.000 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 66.400 \\ 2 & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 105 \\ 2 & 3 & 332 \\ 2 & 1 & 105 \end{vmatrix} =$$

$$= 200 \cdot (315 + 210 + 664 - 630 - 332 - 210) = 200 \cdot (1.189 - 1.172) =$$

$$= 200 \cdot 17 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$.

$a)$ Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas.

$b)$ Calcule los puntos de corte de ambas gráficas.

$c)$ Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

Solución:

$a, b)$

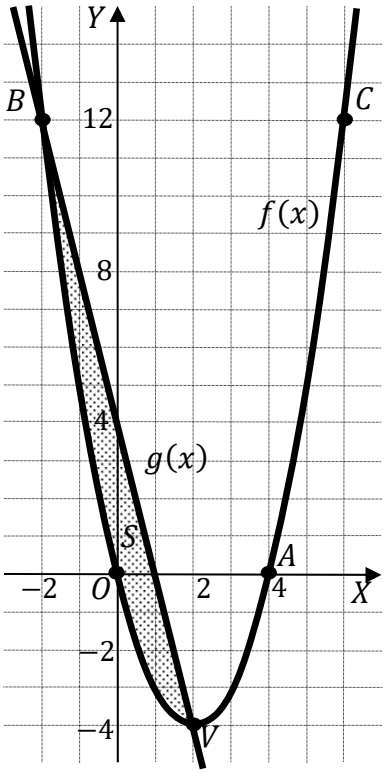
La función $f(x) = x^2 - 4x$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow V(2, -4).$$

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$O(0,0), A(4,0), B(-2,12)\ y\ C(6,12).$



Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x = 4 - 4x;\ x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,12)}} \\ \boldsymbol{x_2 = 2 \rightarrow \underline{V(2,-4)}} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$c)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} [(4 - 4x) - (x^2 - 4x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right] =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 16 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \underline{\frac{32}{3}\ u^2} \cong 10,67\ u^2.}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

$a)$ Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.

$b)$ Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Compruebe que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

$d)$ Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

Solución:

$a)$ La función está definida para cualquier valor real de x:

$$\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R.}$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} = 0;\ \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1 \Rightarrow C(0, 1).$$

$b)$ $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = 0 - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \underline{f'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}}.$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{x^2} > 0, \forall x \in R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0)}.}$$

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, +\infty)}.}$$

$c)$ $\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0 \\ f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(-1) = f(1)}.$

Nótese que, en general: $f(-x) = 1 - \sqrt[3]{(-x)^2} = 1 - \sqrt[3]{x^2} = f(x)$, por lo cual, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

A continuación se prueba que la función no es derivable para $x = 0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuaciónb.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

Se hacer las derivadas laterales para $x = 0$:

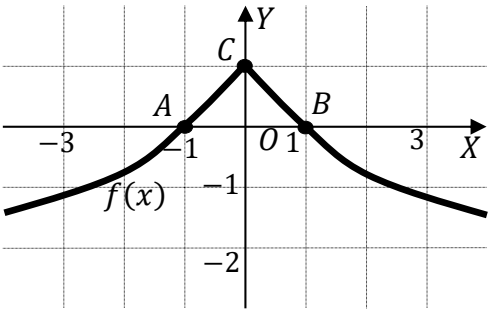
$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right) = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{0^-}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right) = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{0^+}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x = 0 \in [-1, 1]$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Teniendo en cuenta la definición del teorema de Rolle, **no existe contradicción**, puesto que no se cumple que la función sea derivable en el intervalo.

$d)$ Para la representación gráfica de la función se han tenido en cuenta los puntos de corte con los ejes, así como los periodos de crecimiento y decrecimiento y, también, que la función no tiene ningún tipo de asíntotas. La representación aproximada es la de la figura.



BY NC SA

Problema 5:

5º) Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, y el punto $P(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$. En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

$a)$ El punto P pertenece a la recta r.

$b)$ La recta r y el plano π se corten en un único punto.

$c)$ La recta r está contenida en el plano π.

$d)$ La recta r es perpendicular al plano π.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + a\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ y = 1 + a\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ z = \lambda = \rightarrow \lambda = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P \in R \text{ para cualquier valor real de } a.}$$

$b)$ Un vector director de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ es $\overrightarrow{v_r} = (a, a, 1)$ y un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$ es $\vec{n} = (3, -2, -1)$.

Para que la recta r y el plano π se corten en un punto es condición necesaria que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no sean perendiculares, o sea, que su producto escalar sea distinto de cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow (a, a, 1) \cdot (3, -2, -1) \neq 0;\ \ 3a - 2a - 1 \neq 0;\ \ a - 1 \neq 0;\ \ a \neq 1.$$

$$\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ se\ cortan\ en\ un\ punto\ \forall a \in R - \{1\}.}$$

$c)$ Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a = 1.$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente, puesto que la perpendicularidad de los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ lo único que garantiza es que la recta y el plano son paralelos; para que sean coincidentes, cualquier punto de la recta tiene que pertenecer al plano.

Para $a = 1$ y, por ejemplo, $\lambda = 0$, un punto de r es $P(1,1,0)$.

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x - 2y - z = 4 \\ P(1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 \neq 4 \Rightarrow No\ se\ satisface.$$

BY NC SA

$\underline{La\ recta\ r\ no\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ \forall a \in R.}$

$d)$ La recta r es perpendicular al plano π cuando los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son linealmente dependientes, es decir, sus componentes son proporcionales:

$$\frac{a}{3} = \frac{a}{-2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow a \notin R \Rightarrow \underline{La\ recta\ r\ no\ es\ perpendicular\ a\ \pi\ \forall a \in R}.$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1,1,1), B(0,0,-2), C(2,-1,0), D(-1,2,-1)$ y $E(0,0,0)$.

$a)$ Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π.

$b)$ Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en A.

$c)$ Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los punto A y D con el plano π.

$d)$ Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(1,1,1), B(0,0,-2), C(2,-1,0)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,-2) - (1,1,1)] = (-1,-1,-3).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,-1,0) - (1,1,1)] = (1,-2,-1).$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes, lo cual implica que los puntos determinan un único plano, π, *como se quería comprobar*.

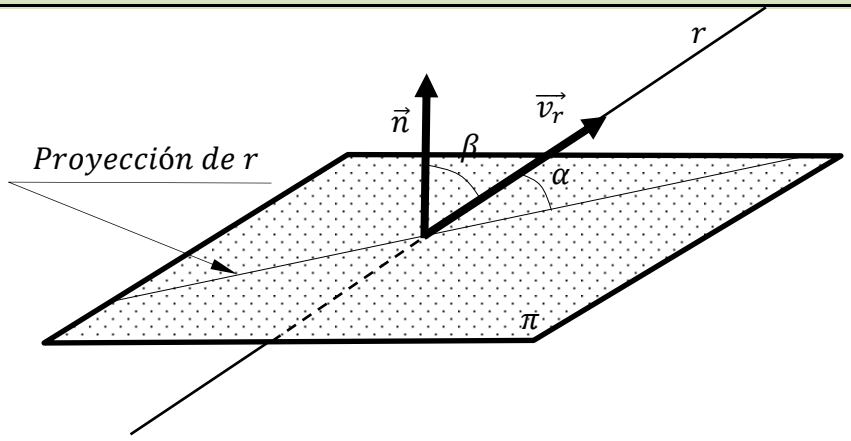
$b)$ El triángulo de vértices A, B y C será rectángulo en A cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-3) \cdot (1,-2,-1) = -1 + 2 + 3 = 4 \neq 0.$

El triángulo de vértices A, B y C no es rectángulo en A.

$c)$



La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ B\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$x + 2(z+2) - 3y + (z+2) - 6x - y = 0;\ \ -5x - 4y + 3(z+2) = 0;$

$-5x - 4y + 3z + 6 = 0; \Rightarrow \pi \equiv 5x + 4y - 3z - 6 = 0.$

El vector director de la recta r que pasa por $A(1,1,1)$ y $D(-1,2,-1)$ tiene como vector direc-

tor: $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = [(1,1,1) - (-1,2,-1)] = (2,-1,2)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 5x + 4y - 3z - 6 = 0$ es $\vec{n} = (5,4,-3)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\,\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\,\alpha = \frac{|(5,4,-3)\cdot(2,-1,2)|}{\sqrt{5^2+4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|10-4-6|}{\sqrt{25+16+9}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{0}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{0}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = arc\,sen\,0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0^\circ \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos o coincidentes.}}$$

Aunque no lo pide el ejercicio, se va a diferenciar el caso.

El plano π contiene a la recta r si cualquier punto de r está contenido en el plano.

$$A(1,1,1) \in r \Rightarrow \left.\begin{matrix}\pi \equiv 5x + 4y - 3z = 6\\ A(1,1,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\cdot 1 + 4\cdot 1 - 3\cdot 1 = 6 \Rightarrow Si.$$

La recta que pasa por $A(1,1,1)$ y $D(-1,2,-1)$ está contenida en el plano π.

d) El volumen de un tetraedro es igual a un sexto del valor del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en valor absoluto.

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot\left\|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\| = \begin{vmatrix}-1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= |-4-3-2+12-1-2| = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_{Tetraedro} = 0.}$$

Los puntos A, B, C, D son coplanarios y no forman un tetraedro.

BY NC SA

Problema 7:

7º) Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta e 50 de cada 10.000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

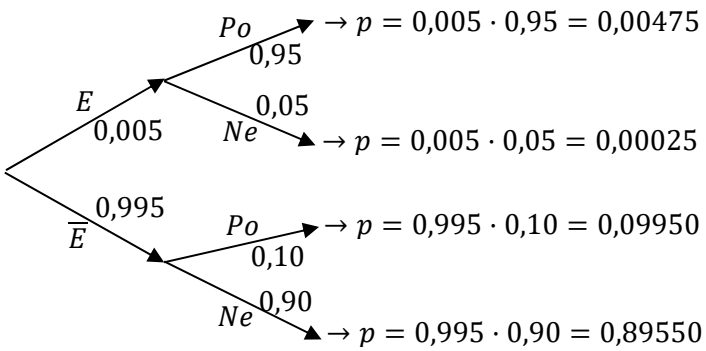
$a)$ Que un individuo no padezca la enfermedad.

$b)$ Que la prueba dé resultado positivo.

$c)$ Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo.

$d)$ Que el resultado de la prueba sea erróneo.

Solución:



$a)$ $\quad P = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{50}{1.000} = 1 - 0{,}005 = \underline{0{,}995}.$

$b)$ $\quad P = P(Po) = P(E \cap Po) + P(\overline{E} \cap Po) =$

$= P(E) \cdot P(Po/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{E}) = 0{,}005 \cdot 0{,}95 + 0{,}995 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}00475 + 0{,}09950 \Rightarrow \underline{P(Po) = 0{,}10425}.$

$c)$ $\quad P = P(\overline{E}/Ne) = \frac{P(\overline{E} \cap Ne)}{P(Ne)} = \frac{P(\overline{E}) \cdot P(Ne/\overline{E})}{1 - P(Po)} = \frac{0{,}995 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}10425} = \frac{0{,}89550}{0{,}89575} = \underline{0{,}99972}.$

$d)$ $\quad P = P(Err) = P(E \cap Ne) + P(\overline{E} \cap Po) =$

$= P(E) \cdot P(Ne/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{E}) = 0{,}005 \cdot 0{,}05 + 0{,}995 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}00025 + 0{,}09950 = \underline{0{,}09975}.$

Problema 8:

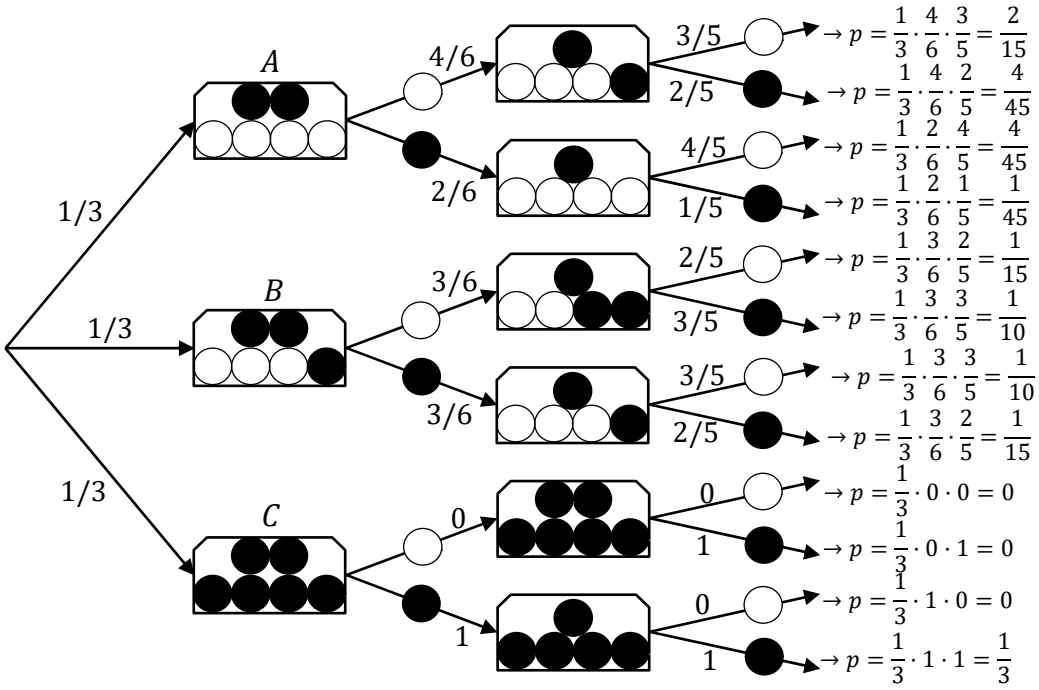
8º) Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutivo y sin reemplazamiento.

a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca.

b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca y la segunda sea negra.

c) Sabiendo que la primera bola extraída es blanca, calcule la probabilidad de que la segunda bola sea negra.

Solución:



$a)$ $P = P(bl) = P(A \cap bl) + P(B \cap bl) + P(C \cap bl) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot 0 =$

$= \frac{4}{18} + \frac{3}{18} + 0 \Rightarrow \underline{P(bl) = \frac{7}{18} \cong 0{,}3889}.$

$b)$ $P = P(bl - ne) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = \frac{8}{90} + \frac{9}{90} + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P = P(bl - ne) = \frac{17}{90} \cong 0{,}1889}.$

$c)$ $P = P(ne/bl) = \frac{P(ne \cap bl)}{P(bl)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{8}{90} + \frac{9}{90} + 0}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{17\cdot 18}{7\cdot 90} = \frac{17\cdot 1}{7\cdot 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P = P(ne/bl) = \frac{17}{35} \cong 0{,}4857}.$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & si \ \ x < 1 \\ a + Lx & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudia los valores de los parámetros $a \ y \ b$ para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Escribe la función resultante $f(x)$.

$b)$ Tomamos los valores $a = -2 \ y \ b = 1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$.

Problema 1B:

1B) Realiza el cálculo de las integrales: $a) \ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx. \ b) \ I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx.$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A) Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, $X \ e \ Y$, verifican las siguientes condiciones:

1— La suma de ambas matrices $X \ e \ Y$ da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3).

2— Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Problema 2B:

2B) Dado el sistema $\left.\begin{matrix} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{matrix}\right\}$, con $k \in R$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tmar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema para $k = 1$.

BY NC SA

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z - 2$.

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 3t - 5s \end{cases}; \; r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \; r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}.$$

$a)$ Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2.

$b)$ ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45°? Justifícalo.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información: el 38 % son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera; el 29 % son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera y el 33 % son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera. Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

$a)$ Construye el árbol de probabilidades.

$b)$ Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera.

$c)$ Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo?

Problema 4B:

4B) El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

$a)$ La probabilidd de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos.

$b)$ Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1.

$c)$ El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis.

Problema 1A:

1A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ x<1\\ a+Lx & si\ x\geq 1\end{cases}$.

$a)$ Estudia los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Escribe la función resultante $f(x)$.

$b)$ Tomamos los valores $a=-2\ y\ b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)^2+bx]=b\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(a+Lx)=a=f(1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow a=b. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2+b & si\ x<1\\ \frac{1}{x} & si\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1^-)=b & si\ x<1\\ f'(1^+)=1 & si\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow b=1. \qquad \text{Teniendo en cuenta (1): } a=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ R\ para\ a=b=1.}}$$

$b)$ Para $a=-2\ y\ b=1$ la función es $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+x & si\ x<1\\ -2+Lx & si\ x\geq 1\end{cases}$.

Para $x=e$ la función es $f(x)=Lx-2$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1}{x}. \qquad Para\ x=e\Rightarrow m=f'(e)\Rightarrow m=\frac{1}{e}.$$

El punto de tangencia es: $f(e)=Le-2=1-2=-1\Rightarrow P(e,-1)$.

BY NC SA

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(e, -1)$:

$$y + 1 = \frac{1}{e} \cdot (x - e); \;\; ey + e = x - e.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - ey - 2e = 0.}}$$

BY NC SA

Problema 1B:

1B) Realiza el cálculo de las integrales: $a)\ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx.\ b)\ I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx.$

Solución:

$$a)\ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+4} \cdot dx + \int \frac{4}{x^2+4} \cdot dx = M + N. \quad (*)$$

$$M = \int \frac{x}{x^2+4} \cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+4=t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot Lt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2} \cdot L(x^2+4).$$

$$N = \int \frac{4}{x^2+4} \cdot dx = \int \frac{4}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} \cdot dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{2} = t \\ dx = 2 \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = 2 \cdot arc\ tg\ t + C \Rightarrow N = 2 \cdot arc\ tg\ \frac{x}{2} + C.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$\boldsymbol{I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L(x^2+4) + 2 \cdot arc\ tg\ \frac{x}{2} + C.}$$

$$b) \quad I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} Lx = t \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt \end{matrix}\right| \begin{matrix} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{matrix} \Rightarrow \int_0^1 t^3 \cdot dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \Rightarrow \underline{I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx = \frac{1}{4}}.$$

BY NC SA

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A) Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, X *e* Y, verifican las siguientes condiciones:

1— La suma de ambas matrices X *e* Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3).

2— Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Solución:

$$\left.\begin{matrix} X+Y=I \\ 2X-5Y=A^t \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 5X+5Y=5I \\ 2X-5Y=A^t \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7X = A^t + 5I \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{7}\cdot(A^t+5I).} \quad (*)$$

$$A^t + 5I = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*):

$$X = \frac{1}{7}\cdot(A^t+5I) = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$X + Y = I \Rightarrow Y = I - X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.;\underline{\boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

BY NC SA

Problema 2B: 2B) Dado el sistema $\left.\begin{matrix} kx-y-z=1 \\ x+ky+2kz=k \\ x+y+z=-1 \end{matrix}\right\}$ ***, con*** $k \in R$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tmar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema para $k=1$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-1-2k+k-2k^2+1=-k^2-k=0;$$

$k^2+k=0;\ \ k(k+1)=0 \Rightarrow k_1=0, k_2=-1.$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{k\neq 0} \\ \boldsymbol{k\neq -1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ k=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$Para\ k=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=-F_3\} \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{k=0} \\ \boldsymbol{k=-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $k=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x-y-z=1 \\ x+y+2z=1 \\ x+y+z=-1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1-1+2-1-2+1}{1-1-2+1-2+1}=\frac{0}{-2}=0.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{1+1+2+1+2-1}{-2}=\frac{6}{-2}=-3.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-1+1-1-1-1-1}{-2}=\frac{-4}{-2}=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=0, y=-3, z=2.}}$$

BY NC SA

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z - 2$.

Solución:

$a)$ Las expresiones de las rectas r y s por ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x = -1 + 2y = -1 + 2\lambda \Rightarrow x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda;$$

$$3z = 1 + 4y = 1 + 4\lambda \Rightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow \begin{cases} x = -12 - 4\mu \\ z = -13 - 6\mu \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -12 - 4\mu \\ y = \mu \\ z = -13 - 6\mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 4)$.

Un punto y un vector director de s son $B(-12, 0, -13)$ y $\overrightarrow{v_s} = (4, -1, 6)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$, linealmente dependiente del que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left[(-12, 0, -13) - \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)\right] = \left(-\frac{35}{3}, 0, \frac{-38}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{w} = (35, 0, 38).$$

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 35 & 0 & 38 \end{vmatrix} = -76 + 630 + 140 - 456 =$$

$$= 770 - 532 \neq 0 \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cruzan.

BY NC SA

$b)$ El plano π, por ser paralelo a la recta s y contener a la recta r, tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 4)$ y a $\overrightarrow{v_s} = (4, -1, 6)$.

Un punto de r es, por ejemplo: $r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1, -1, -1).$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$18(x+1) + 16(y+1) - 2(z+1) - 12(z+1) + 4(x+1) - 12(y+1) = 0;$$

$$22(x+1) + 4(y+1) - 14(z+1) = 0;\ \ 11(x+1) + 2(y+1) - 7(z+1) = 0;$$

$$11x + 11 + 2y + 2 - 7z - 7 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 11x + 2y - 7z + 6 = 0}.$$

La expresión de la recta t por unas ecuaciones paramétricas es: $t \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}.$

El punto Q de intersección de la recta t con el plano π es:

$$\left.\begin{matrix} t \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 11x + 2y - 7z = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11(-4 - \lambda) + 2 \cdot (8 + 3\lambda) - 7 \cdot (2 + \lambda) = -6;$$

$$-44 - 11\lambda + 16 + 6\lambda - 14 - 7\lambda = -6;\ 12\lambda = -36;\ \ \lambda = -3 \Rightarrow \underline{Q(-1, -1, -1)}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(-1, -1, -1)}}$$

BY NC SA

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 3t - 5s \end{cases} ;\ r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0};\ r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}.$$

$a)$ Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas $r_1\ y\ r_2$.

$b)$ ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas $r_1\ y\ r_2$ es menor de 45°? Justifícalo.

Solución:

$a)$ La expresión de r_1 por dos planos secantes es: $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto de intersección de $r_1\ y\ r_2$ es la solución del sistema que forman:

Las rectas $r_1\ y\ r_2$ determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 6x - 5y = 1 \\ z = 1 \\ 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{matrix}\right\}$.

De las ecuaciones segunda y cuarta: $y + 4 = 5 \Rightarrow y = 1$.

$6x - 5 = 1;\ \ 6x = 6 \Rightarrow x = 1.$ El punto de corte es $P(1, 1, 1)$.

Dos vectores directores de π son $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (4, 1, -5)$.

Un vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -12j + k + 3i + 5j \Rightarrow \vec{n} = (3, -7, 1).$$

La recta s pedida tiene como vector director a $\vec{n} = (3, -7, 1)$ y contiene al punto $P(1, 1, 1)$. Su expresión, por ejemplo, dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-1}{1}.}$$

$b)$ El ángulo dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_1} = (5, 6, 0)$.

Un vector director de $r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de los vectores normales de los planos que lo determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (4, 3, 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 4)$.

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12i + 4k - 16j = 12i - 16j + 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3, -4, 1).$$

BY NC SA

Sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{(5,6,0)\cdot(0,1,4)}{\sqrt{5^2+6^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}}\right| = \left|\frac{6}{\sqrt{25+36}\cdot\sqrt{1+16}}\right| = \frac{6}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{1.037}} =$$

$$= \frac{6}{32{,}202} = 0{,}1863 \Rightarrow \alpha = 79^\circ\ 15'\ 43''.$$

No es cierto que el ángulo que forman r_1 y r_2 sea menor de $45°$.

BY NC SA

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información: el 38 % son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera; el 29 % son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera y el 33 % son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera. Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

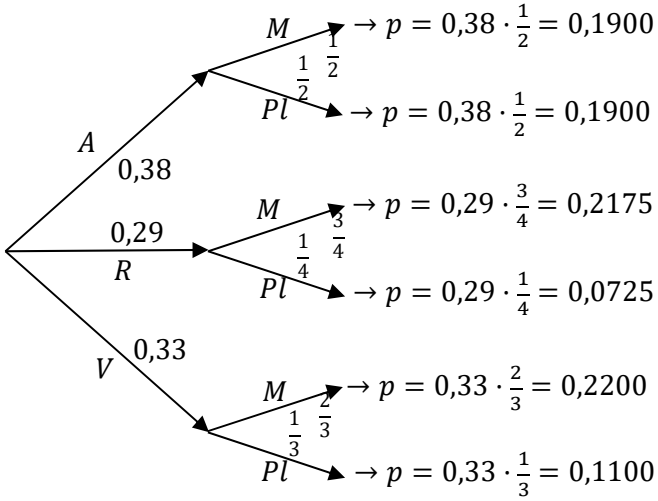
$a)$ Construye el árbol de probabilidades.

$b)$ Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera.

$c)$ Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo?

Solución:

$a)$



$b)$ $P = P(M) = P(A \cap M) + P(R \cap M) + P(V \cap M) =$

$= P(A) \cdot P(M/A) + P(R) \cdot P(M/R) + P(V) \cdot P(M/V) =$

$= 0{,}38 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}29 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}33 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}1900 + 0{,}2175 + 0{,}2200 = \underline{0{,}6275}.$

$c)\ P = P(R/Pl) = \frac{P(R \cap Pl)}{P(Pl)} = \frac{P(R) \cdot P(Pl/R)}{1 - P(M)} = \frac{0{,}29 \cdot \frac{1}{4}}{1 - 0{,}6275} = \frac{0{,}0725}{0{,}3725} = \underline{0{,}1946}.$

BY NC SA

Problema 4B:

4B) El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

$a)$ La probabilidd de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos.

$b)$ Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1.

$c)$ El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo.

Solución:

$Datos:\ \mu = 30;\ \ \sigma = \sqrt{2}.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(30, \sqrt{2}).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{\sqrt{2}}$.

$a)\ P = P(28 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{28-30}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{-2}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= P(-1{,}41 \leq Z \leq 0{,}71) = P(Z \leq 0{,}71) - P(Z \leq -1{,}41) =$

$= P(Z \leq 0{,}71) - [1 - P(Z \leq 1{,}41)] = P(Z \leq 0{,}71) - 1 + P(Z \leq 1{,}41) =$

$= 0{,}7611 - 1 + 0{,}9207 = 1{,}6818 - 1 = \underline{0{,}6818}.$

$$\boldsymbol{P(28 \leq X \leq 31) = \underline{0{,}6818}.}$$

$b)\ P = P(X > 32) = P\left(Z > \frac{32-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 1{,}41) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}41) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793 < 0{,}1.$

$$\boldsymbol{\underline{Cierto: la\ probabilidad\ es\ menor\ de\ 0{,}1}.}$$

$c)\ P = P(X > 29) = P\left(Z > \frac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > -0{,}71) =$

$P(Z \leq 0{,}71) = 0{,}7611 < 0{,}8.$

$$\boldsymbol{\underline{No\ está\ en\ lo\ cierto: la\ probabilidad\ es\ menor\ del\ 80\ \%}.}$$

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

Bloque 1.- Análisis.

1A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular los coeficientes $a, b, c\ y\ d$, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$. Dar la expresión de $f(x)$.

Problema 1B:

1B) Considera las funciones $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$.

$a)$ Representa el recinto que encierran las dos funciones anteriores.

$b)$ Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores.

Problema 2A:

Bloque 2.- Álgebra.

2A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in R$ sea C la matriz dada por $C = A^t + k \cdot B \cdot A$. Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2.

$b)$ Encuentra la matriz X, de dimensión 3×3, que verifica que $M^t \cdot X = I - M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 2B:

2B) Considera el sistema $\left.\begin{matrix} 2x + 6y + kz = 0 \\ kx + 4y + 2z = 2 \\ kx + 6y + 2z = k - 2 \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que puede tomar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k = 0$.

BY NC SA

Problema 3A:

Bloque 3.- Geometría.

3A) Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

$a)$ Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$.

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de la recta y el plan siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$.

$a)$ Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A.

$b)$ Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) El 10 % de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

$a)$ En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$b)$ Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$c)$ En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

Problema 4B:

4B) Una prueba, utilizada para determinar la presencia del plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

$a)$ Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

$b)$ Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5 % de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos?

$c)$ Se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1A:

Bloque 1.- Análisis.

1A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular los coeficientes $a, b, c\ y\ d$, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$. Dar la expresión de $f(x)$.

$b)$ Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Solución:

$a)$ Por contener al punto $P(0,1)$: $f(0) = 1 \Rightarrow \underline{d = 1}$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$ $\qquad$ $f''(x) = 6ax + 2b.$

Por tener un extremo relativo en $P(0,1)$: $f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$.

Por contener al punto $Q(1,-1)$: $f(1) = -1$:

$f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 = -1;\ a + b = -2.$ (1)

Por tener un punto de inflexión en $Q(1,-1) \Rightarrow f''(1) = 0;$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0;\ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{matrix} a+b=-2 \\ 3a+b=0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -a-b=2 \\ 3a+b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a = 2;\ \underline{a = 1}.\ 1 + b = -2 \Rightarrow \underline{b = -3}.$

$$\underline{\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 1.}}$$

$b)$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \frac{e^0+e^{-0}-2}{1-\cos 0} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{sen\ x} = \frac{e^0-e^{-0}}{sen\ 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0+e^{-0}}{\cos 0} = = \frac{1+1}{1} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = 2.}}$$

BY NC SA

Problema 1B:

1B) Considera las funciones $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$.

a) Representa el recinto que encierran las dos funciones anteriores.

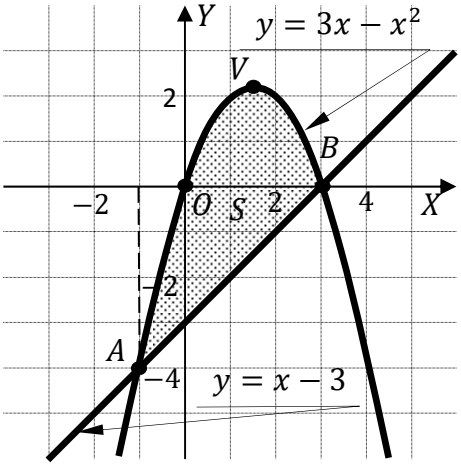
b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores.

Solución:

a) Los puntos de corte de la parábola y la recta son los que tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$3x - x^2 = x - 3;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow A(-1,-4) \\ x_2 = 3 \Rightarrow B(3,0) \end{cases}.$$



La función $y = 3x - x^2$ es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

La representación gráfica de la situación se refleja, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{3} [(3x - x^2) - (x - 3)] \cdot dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] = -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{32}{3} u^2 \cong 10,67\ u^2.}$$

BY NC SA

Problema 2A:

Bloque 2.- Álgebra.

2A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in R$ sea C la matriz dada por $C = A^t + k \cdot B \cdot A$. Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2.

$b)$ Encuentra la matriz X, de dimensión 3×3, que verifica que $M^t \cdot X = I - M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$a) \quad C = A^t + k \cdot B \cdot A = A^t + k \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t + k \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matriz C tendrá rango 2 cuando su determinante sea distinto de cero:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-k)(1+k) = 1 - k^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$\boldsymbol{La\ matriz\ C\ tiene\ rango\ 2\ \forall k \in R - \{-1, 1\}.}$$

$b)$ $M^t \cdot X = I - M$; $(M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M)$;

$I \cdot X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M) \Rightarrow \underline{X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M)}$.

$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de M^t por Gauss-Jordan.

$$(M^t|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ F_3 \rightarrow -F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}}$$

BY NC SA

Problema 2B:

2B) Considera el sistema $\left.\begin{matrix} 2x+6y+kz=0 \\ kx+4y+2z=2 \\ kx+6y+2z=k-2 \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que puede tomar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k=0$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k & 0 \\ k & 4 & 2 & 2 \\ k & 6 & 2 & k-2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{vmatrix}=16+6k^2+12k-4k^2-24-12k=2k^2-8=$$

$$=2(k^2-4)=0;\ \ k^2-4=0\Rightarrow k_1=-2, k_2=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{k\neq -2} \\ \boldsymbol{k\neq 2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ k=-2\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=-C_3\}\Rightarrow\ Rang\ A'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}=-32-24-24-48\neq 0\Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k=-2\Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ k=2\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_1=F_3\}\Rightarrow\ Rang\ A'=2$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k=2\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $k=0\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+6y=0 \\ 4y+2z=2 \\ 6y+2z=-2 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema: $\left.\begin{matrix} x+3y=0 \\ 2y+z=1 \\ 3y+z=-1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3-3}{2-3}=\frac{-6}{-1}=6. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{1+1}{-1}=-2. \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2-3}{-1}=\frac{-5}{-1}=5.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=6,\qquad y=-2,\qquad z=5}}$$

BY NC SA

Problema 3A:

Bloque 3.- Geometría.

3A) Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

$a)$ Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow y=\mu \Rightarrow \begin{matrix} x+z=-1-\mu \\ 2x+3z=2+\mu \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} -2x-2z=2+2\mu \\ 2x+3z=2+\mu \end{matrix} \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4+3\mu;\ \ x=-1-\mu-4-3\mu=-5-4\mu \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-5-4\mu \\ y=\mu \\ z=4+3\mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-5,0,4)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-4,1,3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(-1,1,-1)-(-5,0,4)]=(4,1,-5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 20+6-12-12-12+10 =$$

$$= 36-36=0 \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}=2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cortan.

$b)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$ es $\vec{n}=(2,-1,1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+5 & y & z-4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+5)+6y+4(z-4)-2(z-4)+3(x+4)+4y=0;$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

$4(x+5)+10y+2(z-4)=0;\ \ 2(x+5)+5y+(z-4)=0;$

$$2x+10+5y+z-4=0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta \equiv 2x+5y+z+6=0.}$$

BY NC SA

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de la recta y el plan siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$.

$a)$ Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A.

$b)$ Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Solución:

$a)$ Se determinan un punto y un vector director de la recta r, para lo cual, se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z = -7 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x = -5 + 2\lambda;\ \ x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda;\ \ 3z = -7 + 4\lambda;$$

$$z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1,-1,-1);\ \ \overrightarrow{v_r} = (2,3,4).$$

El punto A de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\pi \equiv 5x - 6y + 7z = -58 \Big\} \\ r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Big\} \Rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda\right) - 6\lambda + 7 \cdot \left(-\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda\right) = -58;$$

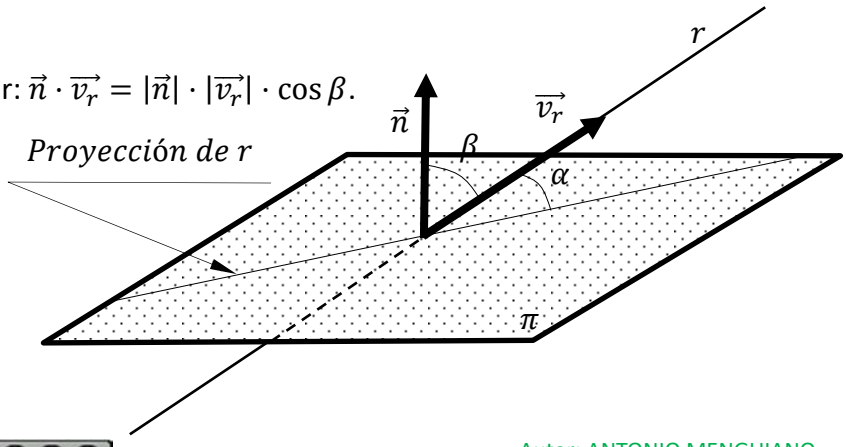
$$-\frac{25}{3} + \frac{10}{3}\lambda - 6\lambda - \frac{49}{3} + \frac{28}{3}\lambda = -58;\ \ -\frac{74}{3} + \frac{38-18}{3}\lambda = -58;\ -74 + 20\lambda = -174;$$

$$20\lambda = -100;\ \ \lambda = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} - \frac{10}{3} = -5 \\ y = -5 \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{20}{3} = -9 \end{cases} \Rightarrow A(-5,-5,-9).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 5x - 6y + 7z = -58$ es $\vec{n} = (5,-6,7)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = -5 + 5\mu \\ y = -5 - 6\mu. \\ z = -9 + 7\mu \end{cases}$

$b)$ Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.



$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\,\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v_r}|}$.

$$sen\,\alpha = \frac{|(5,-6,7)\cdot(2,3,4)|}{\sqrt{5^2+(-6)^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{|10-18+28|}{\sqrt{25+36+49}\cdot\sqrt{4+9+16}} = \frac{20}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{3.190}} =$$

$= 0{,}3541 \Rightarrow \alpha = arc\,sen\,0{,}3541 \Rightarrow \underline{\alpha = 20°\ 44'\ 19''}$.

$$\boldsymbol{\alpha = arc\,sen\,0,3541 = \underline{20°\ 44'\ 19''}}$$

BY NC SA

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) El 10 % de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

$a)$ En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$b)$ Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$c)$ En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 100;\ \ p = 0{,}1;\ \ q = 0{,}9.$$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0{,}9 = 90 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3.$$

$$X = B(100;\ 0{,}1) \approx N(10, 3).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-10}{3}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12{,}5-10}{3}\right) = P\left(Z > \frac{2{,}5}{3}\right) = P(Z > 0{,}83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = \underline{0{,}2033}.$$

$$\boldsymbol{P(X > 12) = \underline{0{,}2033}}$$

$b)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 400;\ \ p = 0{,}1;\ \ q = 0{,}9.$$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 400 \cdot 0{,}1 = 40 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0{,}9 = 360 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}1 = 40.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{36} = 6.$$

$$X = B(400;\ 0{,}1) \approx N(40, 6).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-40}{6}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X < 32) = P\left(Z < \frac{31{,}5-40}{6}\right) = P\left(Z < \frac{-8{,}5}{6}\right) = P(Z < -1{,}42) =$$

$$= P(Z > 1{,}42) = 1 - P(Z \leq 1{,}42) = 1 - 0{,}9222 = \underline{0{,}0778}.$$

BY NC SA

$$\boldsymbol{P(X < 32) = \underline{0,0778}}$$

$c)$ $n = N \cdot q = 500 \cdot 0{,}9 = 450.$

Se espera que 450 individuos no sean alérgicos a la flor del olivo.

Problema 4B:

4B) Una prueba, utilizada para determinar la presencia del plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5 % de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos?

c) Se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10;\ \ p = 0{,}08;\ \ q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P = P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}08^3 \cdot 0{,}92^7 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} \cdot 0{,}000512 \cdot 0{,}557847 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2} \cdot 0{,}000286 = 120 \cdot 0{,}000286 = \underline{0{,}0343}.$$

$$\boldsymbol{P(3) = \underline{0,0343}.}$$

b) La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguno, haya uno o haya dos análisis erróneos:

$$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8\right] =$$

$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0{,}4344 + 10 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}4722 + \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2} \cdot 0{,}0064 \cdot 0{,}5132\right) =$$

$$= 1 - (0{,}4344 + 0{,}3778 + 45 \cdot 0{,}0033) = 1 - (0{,}8122 + 0{,}1478) =$$

$= 1 - 0{,}9600 = 0{,}0400 < 0{,}05$, por lo cual, en efecto:

La probabilidad de que de 10 haya más de 2 erróneos es menor del 5 %.

c) $n = N \cdot q = 100 \cdot 0{,}92 = 92$.

Se espera que 92 sean correctos.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Problema 2:

2º) Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno.

$a)$ Realice un dibujo planteando el problema.

$b)$ Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Problema 3:

3º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértice $A(-1, 2, 3), B(3, -4, 1)$ y $C(1, -4, 5)$.

$a)$ Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

$b)$ Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Problema 4:

4º) En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma. Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar:

$a)$ Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

$b)$ Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

BY NC SA

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que las matrices A y B son regulares.

$b)$ Calcule las matrices inversas de A y B.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

$d)$ Calcule X.

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

$a)$ Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. $b)$ Calcule la primera derivada de $f(x)$.

$c)$ Determine los extremos relativos de $f(x)$.

$d)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 7:

7º) Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

$b)$ Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$c)$ Calcule el área del triángulo ABC.

Problema 8:

8º) En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

$a)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

$b)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

$c)$ Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro t es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t - 2 - t + 2 + t^2 - 1 = t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 1.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $t = 0$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} y - 2z = 0 \\ x + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{0^2 - 1} = \frac{2+1}{-1} = \frac{3}{-1} = -3. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = -3,\ y = 2,\ z = 1.}$$

$$b)\ Para\ t = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ t = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $t = -1$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} -x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} -x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

BY NC SA

$$\left.\begin{matrix} -x+y=2\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y=-1+\lambda;\ \ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda.$$

$$\left.\begin{matrix} x-y=-2\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=-1-3\lambda;\ \ x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda,\ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ z=\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

$$c)\ Para\ t=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2+1+2=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ t=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

BY NC SA

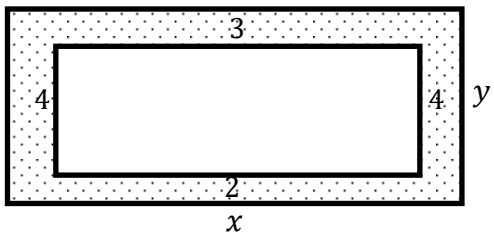
Problema 2:

2º) Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno.

$a)$ Realice un dibujo planteando el problema.

$b)$ Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:



$a)$ La superficie del cartel es $S = x \cdot y$, que tiene que ser mínima para lo cual su derivada tiene que ser cero.

Para poder derivar hemos de expresar una variable en función de la otra, para lo cual tendremos en cuenta que la superficie a imprimir, que es la central, tiene que ser de 90 cm^2.

De la observación de la figura se deduce que:

$$(x-8)(y-5) = 90;\ \ xy - 5x - 8y + 40 = 90;\ \ xy - 5x - 8y = 50;$$

$$xy - 8y = 50 + 5x;\ \ y(x-8) = 50 + 5x \Rightarrow y = \frac{50+5x}{x-8}.$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$$S(x,y) = x \cdot y \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S(x) = x \cdot \frac{50+5x}{x-8} = \frac{5x^2+50x}{x-8}.}$$

$b)$ $$S'(x) = \frac{(10x+50)\cdot(x-8)-(5x^2+50x)\cdot 1}{(x-8)^2} = \frac{10x^2-80x+50x-400-5x^2-50x}{(x-8)^2} = \frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2} = 0;\ 5x^2 - 80x - 400 = 0;\ x^2 - 16x - 80 = 0;$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256+320}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{16 \pm 24}{2} = 8 \pm 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 20 \end{cases}.$$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 20$.

$$y = \frac{50+5x}{x-8} = \frac{50+5\cdot 20}{20-8} = \frac{50+100}{12} = \frac{150}{12} = 12{,}5.$$

La tarjeta de mínimo papel tiene 20 cm de base y 12,5 cm de altura.

Problema 3:

3º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértice $A(-1,2,3), B(3,-4,1)\ y\ C(1,-4,5)$.

$a)$ Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

$b)$ Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

$a)$ Los puntos medios de los lados del triángulo son los siguientes:

$$M_{AB} \Rightarrow \left\{x = \frac{-1+3}{2} = 1;\ \ y = \frac{2-4}{2} = -1;\ \ z = \frac{3+1}{2} = 2\right\} \Rightarrow M_{AB}(1,-1,2).$$

$$M_{AC} \Rightarrow \left\{x = \frac{-1+1}{2} = 0;\ \ y = \frac{2-4}{2} = -1;\ \ z = \frac{3+5}{2} = 4\right\} \Rightarrow M_{AC}(0,-1,4).$$

$$M_{BC} \Rightarrow \left\{x = \frac{3+1}{2} = 2;\ \ y = \frac{-4-4}{2} = -4;\ \ z = \frac{1+5}{2} = 3\right\} \Rightarrow M_{BC}(2,-4,3).$$

Las rectas medianas son las siguientes:

$$\overrightarrow{M_{AB}C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_{AB}} = [(1,-4,5) - (1,-1,2)] = (0,-3,3).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{AB}C} \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}.}$$

$$\overrightarrow{M_{AC}B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_{AC}} = [(3,-4,1) - (0,-1,4)] = (3,-3,-3).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{AC}B} \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{-1}.}$$

$$\overrightarrow{M_{BC}A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_{BC}} = [(-1,2,3) - (2,-4,3)] = (-3,6,0).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{BC}A} \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}.}$$

$b)$ El punto de corte de las medianas de un triángulo, G, se llama baricentro o centro de gravedad.

El punto de corte de $r_{M_{ABC}}$ y $r_{M_{ACB}}$ es el siguiente:

$$r_{M_{ABC}} \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \begin{cases} -x+1=0 \\ y+4=-z+5 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{ABC}} \equiv \begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

$$r_{M_{ACB}} \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} -x+3=y+4 \\ -x+3=z-1 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{ACB}} \equiv \begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=4 \end{cases}.$$

Las rectas $r_{M_{ABC}}$ y $r_{M_{ACB}}$ determinan el sistema $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y+z=1 \\ x+y=-1 \\ x+z=4 \end{matrix}\right\}$, cuya solución es la siguiente: $G(1,-2,3)$.

Se comprueba que el punto de corte de las medianas $r_{M_{ABC}}$ y $r_{M_{BCA}}$ es el mismo.

$$r_{M_{BCA}} \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2=-y+2 \\ -z+3=0 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{BCA}} \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=3 \end{cases}.$$

BY NC SA

Las rectas $r_{M_{ABC}}$ y $r_{M_{BCA}}$ determinan el sistema $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y+z=1 \\ 2x+y=0 \\ z=3 \end{matrix}\right\}$, cuya solución es, como se esperaba, la misma: $G(1,-2,3)$.

$$\underline{\boldsymbol{El\ centro\ de\ gravedad\ del\ triangulo\ ABC\ es\ G(1,-2,3).}}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma. Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar:

$a)$ Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

$b)$ Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Solución:

$Datos:\ \mu = 100;\ \ \sigma = 10.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(100, 10).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-100}{10}$.

$a)$

$$P = P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120-100}{10}\right) = P\left(Z > \frac{20}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

La probabilidad de que salte la alarma es del 2,28 %.

$b)\ P(X \geq \beta) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{\beta-100}{10}\right) = 0{,}01;\ \ 1 - P\left(Z \leq \frac{\beta-100}{10}\right) = 0{,}01;$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-100}{10}\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,99 le corresponde 2,33.

$$\frac{\beta-100}{10} = 2{,}33;\ \ \beta - 100 = 23{,}3;\ \ \beta = 123{,}3.$$

Salta la alarma 1 % de las veces con capacidad del montacarga de 123,3 kg

.

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares.

b) Calcule las matrices inversas de A y B.

c) Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

d) Calcule X.

Solución:

a)

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobada\ que\ las\ matrices\ A\ y\ B\ son\ regulares.}$$

b)

$$|A| = -1;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

$$|B| = 1;\ \ B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

BY NC SA

$c)$

$$AXB = A^t - 3B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1};$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1}}.$$

$d)$

$$A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^t - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión de X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}}.$$

****

BY NC SA

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

$a)$ Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. $b)$ Calcule la primera derivada de $f(x)$.

$c)$ Determine los extremos relativos de $f(x)$.

$d)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = 0.}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = (-\infty)^2 \cdot e^{-(-\infty)} = \infty \cdot e^{\infty} = \underline{+\infty}.$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{+\infty}.}$$

$b)$ $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\underline{f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).}}$$

$c)$ Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 1 \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$$

$$= 2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} =$$

$$= 2 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2).$$

$$f''(0) = e^{-0} \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{Mínimo: O(0,0).}}$$

$$f''(2) = e^{-2} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máximo: A\left(2, \frac{4}{e^2}\right) \cong (2; 0,54).}$$

$d)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Teniendo en cuenta que $y = f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen al dominio en los intervalo $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2).}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 7:

7º) Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

$b)$ Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$c)$ Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z=4\lambda;\ \ x=\tfrac{33}{4}-3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{33}{4}-3\lambda \\ y=0 \\ z=4\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P\left(\frac{33}{4}-3\lambda,0,4\lambda\right)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-3,0,4)$.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left[\left(\tfrac{33}{4}-3\lambda,0,4\lambda\right)-(2,0,0)\right]=\left(\tfrac{25}{4}-3\lambda,0,4\lambda\right).$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow \left(\tfrac{25}{4}-3\lambda,0,4\lambda\right)\cdot(-3,0,4)=0;\ -\tfrac{75}{4}+9\lambda+16\lambda=0;$$

$$25\lambda=\frac{75}{4}\Rightarrow\lambda=\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{33}{4}-3\cdot\dfrac{3}{4}=6 \\ y=0 \\ z=4\cdot\dfrac{3}{4}=3 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C(6,0,3).}$$

$b)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(-1,12,4)-(2,0,0)]=(-3,12,4).$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=[(6,0,3)-(2,0,0)]=(4,0,3).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{(-3,12,4)\cdot(4,0,3)}{\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=$$

$$=\frac{-12+12}{\sqrt{9+144+16}\cdot\sqrt{16+9}}=\frac{0}{\sqrt{169}\cdot\sqrt{25}}=0\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha=90°.}$$

$c)$ Los puntos $A(2,0,0), B(-1,12,4), C(6,0,3)$ determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(-3,12,4)\ y\ \overrightarrow{AC}=(4,0,3).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

BY NC SA

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |36i + 16j - 48k + 9j| =$$

$$= \frac{1}{2}|36i + 25j - 48k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36^2 + 25^2 + (-48)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1.296 + 625 + 2.304} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4.225} = \frac{65}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = 32,5\ u^2.}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 8:

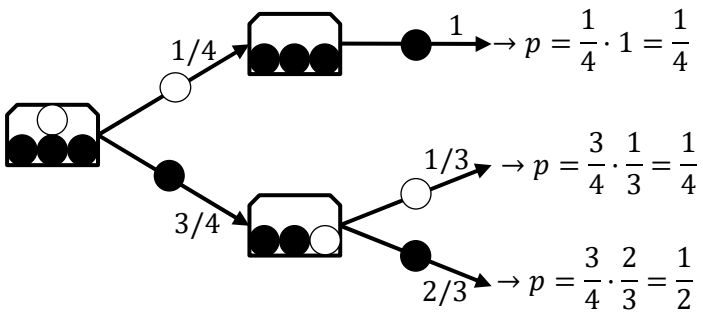
8º) En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

$a)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

$b)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

$c)$ Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Solución:



$a)$ $P = P(B) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}50}.$

$b)$ Necesariamente la segunda bola tiene que ser negra:

$P = P(B) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(N) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{4} = 0{,}75}.$

$c)$ $P = P(N/N) = \frac{P(N \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \underline{\frac{2}{3} = 0{,}67.}$

BY NC SA

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$a)$ Calcule la derivada primera de $f(x)$.

$b)$ Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.

$d)$ Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Problema 3:

3º) Los puntos $A(0, -1, 1)$ y $B(1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta r.

$b)$ Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Problema 4:

4º) El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

$a)$ Para conectar con el siguiente vuelo con destino a Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $t = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

$b)$ Calcule el valor de t para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

BY NC SA

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule A^2 y compruebe que es regular.

$b)$ Calcule la matriz inversa de A^2.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

$d)$ Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

$a)$ Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Halle una primitiva de $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = e$.

Problema 7:

7º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = -1$.

$a)$ Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

$b)$ Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ellos.

Problema 8:

8º) El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad. Se selecciona una persona al azar de dicha población:

$a)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 1 + 1 + t - t - 1 = 0;\ -t^2 + 1 = 0;\ t^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 1.$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$\boldsymbol{(Solución\ única)}$$

$b)$ $Para\ t = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 1 - 4 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ t = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

El sistema resulta $\left.\begin{matrix} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se hace $y = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} -x + z = 4 - \lambda \\ x + z = 1 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z = 5 - 2\lambda;\ z = \frac{5}{2} - \lambda. \qquad x = 1 - \lambda - \frac{5}{2} + \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = -\frac{3}{2}, y = \lambda, z = \frac{5}{2} - \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

BY NC SA

$c)$ $\quad Para\ t = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 1 + 4 - 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ t = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

$a)$ Calcule la derivada primera de $f(x)$.

$b)$ Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

$c)$ Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.

$d)$ Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Solución:

$a)$ $\quad f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}\Rightarrow$

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}.}$$

$b)$ La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(2)=\frac{e^2\cdot(2-1)}{2^2}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m=\frac{e^2}{4}.}$$

$c)$ Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\boldsymbol{La\ recta\ y=0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

$d)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=$$

$$=e^\infty=\infty\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales\ cuando\ x\to+\infty.}$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=-\frac{1}{\infty\cdot e^\infty}=-\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{La\ recta\ y=0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal\ para\ x\to-\infty.}$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) Los puntos $A(0,-1,1)$ y $B(1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta r.

$b)$ Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$ es $\vec{n} = (2,-1,1)$.

Un vector director de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano, por lo cual: $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

$b)$ Un punto genérico de r es $C(1 + 2\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

Los puntos $A(0,-1,1), B(1,1,1)$ y $C(1 + 2\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (0,-1,1)] = (1,2,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(1 + 2\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda) - (0,-1,1)] = (1 + 2\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{matrix} \right\| = 3\sqrt{30};$$

$$\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{matrix} \right\| = 6\sqrt{30};\ \ |2\lambda i + (2-\lambda)k - 2(1+2\lambda)k - \lambda j| = 6\sqrt{30};$$

$$|2\lambda i + (2 - \lambda - 2 - 4\lambda)k - \lambda j| = 6\sqrt{30};\ \ |2\lambda i - \lambda j - 5\lambda k| = 6\sqrt{30};$$

$$\sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-5\lambda)^2} = 6\sqrt{30};\ \ 4\lambda^2 + \lambda^2 + 25\lambda^2 = 36 \cdot 30;\ \ 30\lambda^2 = 36 \cdot 30;$$

$$30\lambda^2 = 36;\ \ \lambda^2 = 36 \Rightarrow \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 6.$$

$$\lambda_1 = -6 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-6) = -11 \\ y = 1 + 6 = 7 \\ z = 1 - 6 = -5 \end{cases} \Rightarrow \underline{C_1(-11,7,-5)}.$$

$$\lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 6 = 13 \\ y = 1 - 6 = -5 \\ z = 1 + 6 = 7 \end{cases} \Rightarrow \underline{C_2(13,-5,7)}.$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

$a)$ Para conectar con el siguiente vuelo con destino a Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $t = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

$b)$ Calcule el valor de t para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 60;\ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(60, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-60}{5}$.

$$P = P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70-60}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228 = 2{,}28\ \%}.$$

$b)$ Se pide $P = P(X > t) = 0{,}1\ \% = 0{,}001.$

$$P = P(X > t) = P\left(Z > \frac{t-60}{5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t-60}{5}\right) = 0{,}001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-60}{5}\right) = 1 - 0{,}001 = 0{,}9990.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$, al valor $0{,}9990$ le corresponde el valor 3:

$$\frac{t-60}{5} = 3;\ \ t - 60 = 15 \Rightarrow t = 75.$$

$\underline{Para\ t = 75\ minutos\ la\ probabilidad\ de\ perder\ el\ vuelo\ es\ del\ 0{,}1\ \%.}$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y compruebe que es regular.

b) Calcule la matriz inversa de A^2.

c) Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

d) Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Solución:

$a)$ $\quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.}$$

$b)$ $|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4$; $(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj.de\ (A^2)^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A^2)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A^2)^t}{|A^2|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{(A^2)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$c)$ $A^2 \cdot X + B = C$; $A^2 \cdot X = C - B$; $(A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B)$;

$$I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B).}$$

$d)$ $\quad X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

Problema 1:

6º) Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Halle una primitiva de $f(x)$.

c) Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = e$.

Solución:

a) El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{0\}.}$$

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

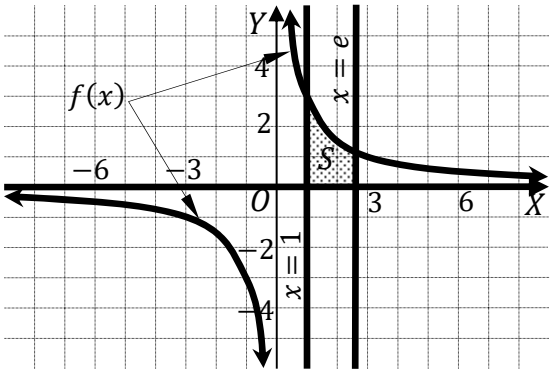
$$\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

b) $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{3}{x} \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F(x) = 3 \cdot L|x| + C.}$$



c) Para facilitar la comprensión del ejercicio se ha hecho la representación gráfica, aproximada de la situación, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{3}{x} \cdot dx = 3 \cdot [L|x|]_1^e = 3 \cdot (Le - L1) = 3 \cdot (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = 3\ u^2.}$$

Problema 1:

7º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = -1$.

$a)$ Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

$b)$ Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ellos.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de la recta son $P(-1,-3,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1,2,1)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1,-2,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ son paralelos (linealmente dependientes) por ser proporcionales sus componentes, lo cual supone que:

La recta r y el plano π son perpendiculares.

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+2 = -y-3 \\ x+1 = -z \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+y = -5 \\ x+z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 2x+y = -5 \\ x+z = -1 \\ x-2y-z = -1 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

(Perpendiculares, como se dedujo anteriormente).

$b)$ El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - 2y - z = -1 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1-\lambda) - 2(-3+2\lambda) - \lambda = -1;$$

BY NC SA

$$-1-\lambda+6-4\lambda-\lambda=-1;\ \ 6\lambda=6;\ \ \lambda=1\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=-1-1=-2\\y=-3+2=-1\\z=1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Q(-2,-1,1)}}.$$

Como se ha determinado anteriormente:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ \text{á}ngulo\ de\ 90°}}.$$

BY NC SA

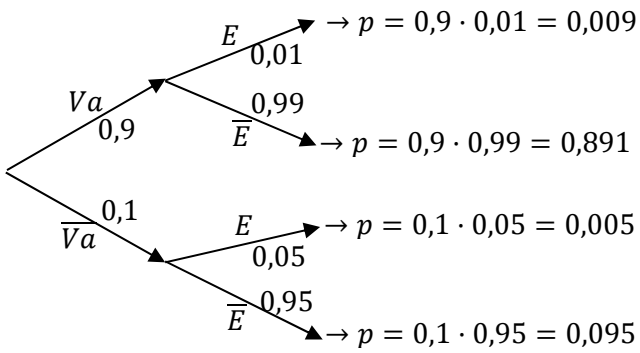
Problema 8:

8º) El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad. Se selecciona una persona al azar de dicha población:

$a)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Solución:



$a)$

$$P = P(E) = P(Va \cap E) + P\left(\overline{Va} \cap E\right) =$$

$$= P(Va) \cdot P(E/Va) + P\left(\overline{Va}\right) \cdot P\left(E/\overline{Va}\right) = 0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 0{,}009 + 0{,}005 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(E) = 0{,}014.}$$

$b)$ $\quad P = P(Va/E) = \frac{P(Va \cap E)}{P(E)} = \frac{P(Va) \cdot P(E/Va)}{P(E)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}014} = \frac{0{,}009}{0{,}014} = 0{,}6429.$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) $a)$ Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, que verifican que $A \cdot X = X \cdot A$.

$b)$ ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Problema 2:

2º) $a)$ Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

$b)$ Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Problema 3:

3º) $a)$ Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

$a_1)$ ¿Qué valores puede tomar $a \in R$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

$a_2)$ Encuentra razonadamente $a \in R$ para que el área de dicho recinto valga 36.

$b)$ Resuelve la siguiente integral: $I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$. El cambio $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Problema 4:

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$, donde λ y μ son los parámetros y $a \in R$.

$a)$ Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

$b)$ Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y sea paralela a r.

BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

$b)$ Enuncia el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Problema 6:

6º) $a)$ Estudia el rango de la matriz $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $m \in R$.

$b)$ Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Problema 7:

7º) $a)$ Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calcula el plano π que pasa por el punto $A(0, 0, 1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$b)$ El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

$b_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?

$b_2)$ Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Problema 8:

8º) $a)$ Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

$a_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

$a_2)$ Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

$b)$ El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

$b_1)$ ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

$b_2)$ ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) $a)$ Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, que verifican que $A \cdot X = X \cdot A$.

$b)$ ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución:

$a)$ Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que se busca.

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a = 2a+b \\ 2b = -b \\ a-c = 2c+d \\ b-d = -d \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 0;\ \ a = 3c+d.$$

La matriz pedida es de la forma:

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.}$$

Por ejemplo, para $\left.\begin{matrix} c = 1 \\ d = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, que se comprueba a continuación:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$b)$ Una matriz simétrica es aquella que es igual a su traspuesta.

Siendo $X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ es $X^t = \begin{pmatrix} 3c+d & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$$X = X^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c+d & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0.$$

La nueva matriz pedida, X_1, es de la forma $X_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$$|X_1| = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = 4;\ \ d^2 = 4 \Rightarrow d_1 = -2, d_2 = 2.$$

Las matrices que satisfacen lo pedido son $\boldsymbol{X_1' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{y\ X_1'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

BY NC SA

Problema 2:

2º) a) Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Solución:

a) Sean x, y, z los precios (en céntimos) de un lápiz, un cuaderno y una agenda, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$\left.\begin{matrix} 3x+y+z=500 \\ 2y+z=500 \end{matrix}\right\}$. Sistema de dos ecuaciones (no proporcionales) con tres incógnitas, por lo cual es compatible indeterminado.

Para resolverlo se parametriza una variable, por ejemplo, $3x=\lambda$, con lo cual el sistema resulta:

$$\left.\begin{matrix} y+z=500-\lambda \\ 2y+z=500 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -y-z=-500+\lambda \\ 2y+z=500 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\lambda;\ \ z=500-2\lambda.$$

$Solución$: $3x=\lambda;\ \ y=\lambda;\ \ z=500-2\lambda$.

Como los precios no pueden ser cero y han de ser múltiplos de 50, la solución que satisface las condiciones del problema son para $\lambda=150$, con lo cual, los precios son los siguientes:

Un lápiz vale 0,5 euros; un cuaderno, 1,5 euros y una agenda, 2 euros.

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\,nº\ e\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to1}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x^2+x}{x^2}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x^2+x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2}}=e^{1}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e.}$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a_1) ¿Qué valores puede tomar $a \in R$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a_2) Encuentra razonadamente $a \in R$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) Resuelve la siguiente integral: $I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$. El cambio $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución:

a)

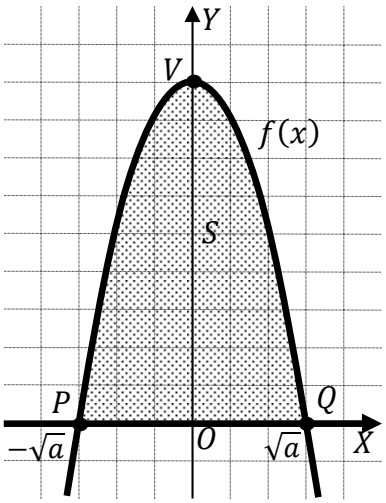
a_1) La curva $f(x) = a - x^2$ es una parábola convexa ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2; simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y cuyo vértice (máximo) es el punto $V(0, a)$.

$$\boldsymbol{f(x)\ forma\ un\ recinto\ cerrado\ con\ OX\ \forall a \in R, a > 0.}$$

a_2) Los puntos de corte de la curva con el eje OX son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow a - x^2 = 0;\ \ x^2 = a \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{a} \rightarrow P(-\sqrt{a}, 0) \\ x_2 = \sqrt{a} \rightarrow Q(\sqrt{a}, 0) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta la simetría de la función, la superficie pedida es la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) \cdot dx = 2 \cdot \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 36;$$

$$\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 18;\ \ \left[a \cdot \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right] - 0 = 18;$$

$$a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = 18;\ \ 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = 54;\ \ 2a\sqrt{a} = 54;$$

$$a\sqrt{a} = 27;\ \ \sqrt{a^3} = 27 = 3^3;\ \ a^3 = 3^6 \Rightarrow a = 3^2 \Rightarrow \underline{a = 9}.$$

La representación gráfica adjunta expresa, muy aproximadamente, la situación.

$$b)\ I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 + 3x^2 = t \\ 2x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t} + C \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1+3x^2} + C}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$, donde λ y μ son los parámetros y $a \in R$.

$a)$ Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

$b)$ Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y sea paralela a r.

Solución:

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,0,a)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-5)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,0,0) - (0,0,a)] = (-1,0,-a)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a - 5 = 0;\ \ 2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -\frac{5}{2} \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 < 3 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.}$$

$$\boldsymbol{\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}}$$

$$\boldsymbol{Para\ a \neq -\frac{5}{2} \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.}$$

$$\boldsymbol{\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}}$$

$b)$ El plano pedido, π, por ser paralelo a la recta r y contener a la recta s, tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$ y a $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-5)$ y contiene a $B(-1,0,0) \in s$.

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0;\ \ 5(x+1) + 2z + 10y = 0;$$

$$5x + 5 + 10y + 2z = 0\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{\pi \equiv 5x + 10y + 2z + 5 = 0.}}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

$b)$ Enuncia el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

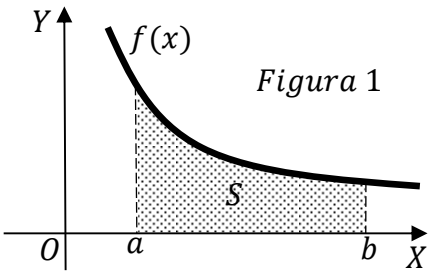
Solución:

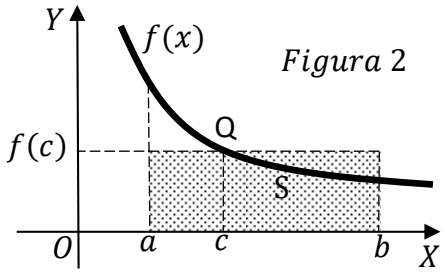
$a)$ $\quad r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x = y + 1 \\ \pi_2 \equiv y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 5 \end{cases}.$

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 5 - 2\lambda;\ \ x = 1 + 5 - 2\lambda \Rightarrow x = 6 - 2\lambda.$$

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}}$$

$b)$ El teorema del Valor Medio del cálculo integral se puede enunciar así: "Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, existe un valor $c \in [a, b]$ que cumple que $\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a)$". La interpretación gráfica se expresa a continuación.





$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 \frac{3}{x^2} \cdot dx = 3 \cdot \int_1^3 x^{-2} \cdot dx = 3 \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = 3 \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 =$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{x}\right]_3^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = 3 - 1 \Rightarrow S = 2\,u^2.$$

$$S = f(c) \cdot (3 - 1) = 2 \Rightarrow f(c) \cdot 2 = 2;\ \ f(c) = 1 = \frac{3}{c^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{3} \in [1, 3].}$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Estudia el rango de la matriz $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $m \in R$.

$b)$ Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

$a)$ Considerando la matriz M formada por las tres primeras columnas de M':

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = m \cdot (2 - 2m) = m \cdot (1 - m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 0, m_1 = 1 \Rightarrow Para \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Rang\ M' = 3\ si\ m \neq 1; Rang\ M' = 2\ si\ m = 1.}$$

$b)$ Los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$ determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 2x + my = 1 \\ 2x + y = m \\ 4x + y + mz = 2 \end{matrix}\right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

Nótese que la matriz M' es la misma del apartado anterior.

Según sean los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$\boldsymbol{Si \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

BY NC SA

$$\boldsymbol{Si\ m = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.}$$

$$\boldsymbol{Si\ m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

Nota: Para $m = 1$ debe tenerse en cuenta que dos planos son coincidentes.

BY NC SA

Problema 7:

7º) $a)$ Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano π que pasa por el punto $A(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$b)$ El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

$b_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?

$b_2)$ Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:

$a)$ $\quad \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k - j = i - k \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1).$

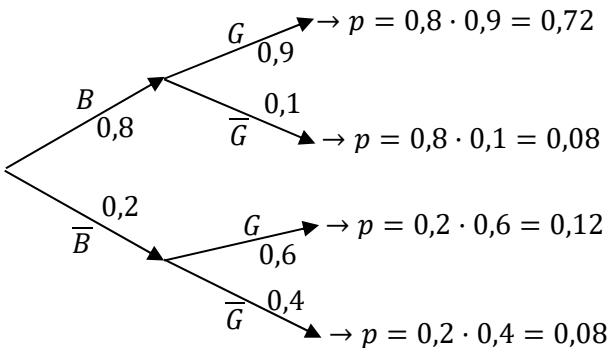
La expresión general del plano pedido es $\pi \equiv x - z + D = 0$.

Como el plano π contiene al punto $A(0,0,1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - z + D = 0 \\ A(0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 - 1 + D = 0;\ \ D = 1 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - z + 1 = 0.}$$

$b)$ El diagrama del árbol que se deduce es el siguiente:



$b_1)$ $\quad P = P(G) = P(B \cap G) + P(\overline{B} \cap G) = P(B) \cdot P(G/B) + P(\overline{B}) \cdot P(G/\overline{B}) =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}72 + 0{,}12 = \underline{0{,}84}.$

$b_2)$ $\quad P = P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \cdot P(G/B)}{P(G)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}84} = \frac{0{,}72}{0{,}84} = \underline{0{,}8571}.$

BY NC SA

Problema 8:

8º) a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a_1) ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a_2) Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b_1) ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b_2) ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

Solución:

a)

a_1) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 4;\ \ p = \frac{1}{5};\ \ q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

Por el suceso contrario, la probabilidad de que haya algún niño con intolerancia alimentaria en la mesa es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya ningún niño en la mesa con intolerancia alimentaria.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{256}{625} = 1 - 0{,}4096 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = 0{,}5904.}$$

a_2)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 8;\ \ p = 0{,}5904;\ \ q = 1 - p = 0{,}4096.$

Como en el apartado anterior, por el suceso contrario, la probabilidad de que haya que poner pan sin gluten en alguna mesa es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya que poner pan sin gluten en ninguna mesa.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot (0{,}5904)^0 \cdot (0{,}4096)^8 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0008 =$$

$$= 1 - 0{,}0008 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P = 0{,}9992.}$$

b) $Datos$: $\mu = 985;\ \ \sigma = 25.$

BY NC SA

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(985, 25)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-985}{25}$.

$b_1)\ P = P(X > 1.000) = P\left(Z > \frac{1.000-985}{25}\right) = P\left(Z > \frac{15}{25}\right) = P(Z > 0{,}6) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743.$

Pesan mas de un kilo el 27,43 % de los paquetes.

$b_2)$ Se nos pide el valor de β, siendo: $P(X > \beta) = 0{,}7$.

$P\left(Z > \frac{\beta-985}{25}\right) = 0{,}7 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{\beta-985}{25}\right) = 0{,}7 \Rightarrow$Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,7 le corresponde un valor: $\left.\begin{matrix}0{,}52 - -0{,}6985\\ 0{,}53 - -0{,}7019\end{matrix}\right\} \cong 0{,}525$:

$-\frac{\beta-985}{25} = 0{,}525;\ \ \beta - 985 = -13{,}125 \Rightarrow \beta = 985 - 13{,}125 = 971{,}875.$

971,875 gramos pesa el más ligero del 70 % de los más pesados.

BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) $a)$ Discute el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=1$, si es posible.

Problema 2:

2º) $a)$ Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in R$ para que la función $f(x)=\frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x=1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

$b)$ Resuelve la integral: $I=\int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$.

Problema 3:

3º) $a)$ Estudia la continuidad en R de la función $f(x)=\frac{2 \cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$.

$b)$ Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2$, donde $x, y, z, a, b, c \in R$. Calcula razonadamente (indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$.

Problema 4:

4º) Sea el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

$a)$ Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

$b)$ Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Problema 5:

5º) $a)$ Sea el plano $\pi \equiv x-3y+z=0$ y los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(1,1,1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

$b)$ Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x)=x^2-4x+5$ y $g(x)=3-x$.

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Sea el tetraedro cuyos vértices son $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)$ y $D(1,1,1)$, con $a \in R$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

$b)$ Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función $f(x) = \frac{2 \cdot e^x - 8x - 3}{x^2 + 1}$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

Problema 7:

7º) $a)$ Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$b)$ Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

Problema 8:

8º) $a)$ En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

$a_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un alumno apruebe?

$a_2)$ Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya asistido a clase.

$b)$ Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

$b_1)$ ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

$b_2)$ ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Discute el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=1$, si es posible.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3a+2-1-4a=0;\ \ 1-a=0 \Rightarrow a=1.$$

$$\boldsymbol{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+2y+3z=2 \\ x+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (primera) y se parametriza una de las incógnitas $(z=\lambda)$.

El sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+\lambda=0 \\ x+y+2\lambda=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=-\lambda;\ \ y=1-\lambda.$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=-\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

BY NC SA

Problema 2:

2º) a) Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in R$ para que la función $f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

b) Resuelve la integral: $I = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$.

Solución:

a) Para que la función $f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x = 1$ tiene que anularse el denominador para este valor:

$$2 \cdot 1 + b = 0;\ \ 2 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -2.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{2x+b} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \underline{a = 4.}$$

$$b)\ I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} u = x \to du = dx \\ cos\,(2x) \cdot dx = dv \to v = \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) - \int \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot sen\,(2x) - \frac{1}{2} \cdot \int sen\,(2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot sen\,(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\,(2x) + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot [2x \cdot sen\,(2x) + cos\,(2x)] + C.}}$$

BY NC SA

Problema 2:

3º) $a)$ Estudia la continuidad en R de la función $f(x)=\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$.

$b)$ Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2$, donde $x,y,z,a,b,c\in R$. Calcula razonadamente (indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)=\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$ es continua en R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador.

$x^2-2x=0;\ x(x-2)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=2.$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\frac{2\cdot e^{-4}-0+14}{0}=\pm\infty.$

Para $x=0$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito

.

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2\cdot e^{2^2-4}-8\cdot 2+14}{0}=\frac{2\cdot e^{0}-2}{0}=\frac{2\cdot 1-2}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{4x\cdot e^{x^2-4}-8}{2x-2}=\frac{4\cdot 2\cdot e^{2^2-4}-8}{2\cdot 2-2}=\frac{8-8}{2}=\frac{0}{2}=0.$

Para $x=2$ la función tiene una discontinuidad evitable de salto finito.

$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=A+B.$

$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2\cdot 2=-4.$

$B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-2\cdot 0=0.$

De lo anterior se deduce que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-4.$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

BY NC SA

Problema 4:

4º) Sea el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

$a)$ Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

$b)$ Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=8$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

La recta r pedida tiene como vector director a $\vec{n}=(1,1,1)$ y contiene al punto $A(1,0,1)$. Su expresión, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}.}$$

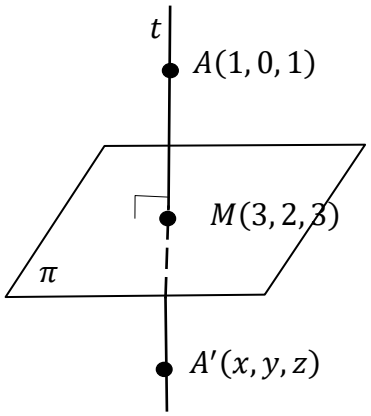
$b)$ El punto M, intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x+y+z=8 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=8;\ \ 3\lambda=6;\ \ \lambda=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1+2=3 \\ y=2 \\ z=1+2=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M(3,2,3).$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x+1}{2}=3 \Rightarrow x=6-1=5 \\ \dfrac{y+0}{2}=2 \Rightarrow y=4 \\ \dfrac{z+1}{2}=3 \Rightarrow z=6-1=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A'(5,4,5).}$$



BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(1,1,1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

$b)$ Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(1,1,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (0,0,-1)] = (1,1,2)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ es $\vec{n} = (1,-3,1)$.

El plano β pedido, perpendicular a π y que contiene a los puntos A y B, es el siguiente, expresado por su ecuación genera:

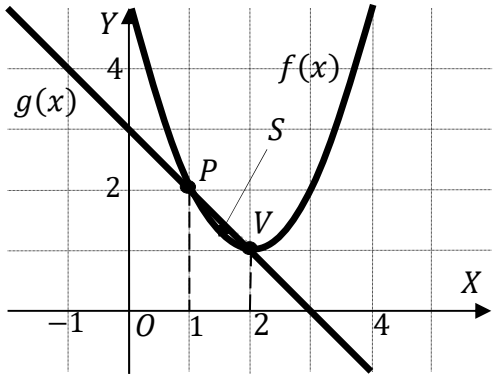
$$\beta\left(\overrightarrow{AB},\ \vec{n};\ A\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$x + 2y - 3(z+1) - (z+1) + 6x - y = 0;\ 5x + y - 4(z+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\beta \equiv 5x + y - 4z - 4 = 0.}}$$

$b)$ La función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0;\ \ x - 2 = 0;\ \ x = 2 \Rightarrow V(2,1).$$



Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 5 = 3 - x;\ x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \to P(1,2) \\ x_2 = 2 \to V(2,1) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(1,2)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^2 [(3-x) - (x^2 - 4x + 5)] \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) = -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 =$$

$$= 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{6}\ u^2 \cong 0,17\ u^2}\ .}$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Sea el tetraedro cuyos vértices son $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)$ y $D(1,1,1)$, con $a \in R$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

$b)$ Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función $f(x) = \frac{2 \cdot e^x - 8x - 3}{x^2 + 1}$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)$ y $D(1,1,1)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,3,0) - (a,0,1)] = (1-a, 3, -1).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (a,0,1)] = (-a, 1, -1).$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (a,0,1)] = (1-a, 1, 0).$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1-a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = 1; \quad \left\| \begin{matrix} 1-a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = 6;$$

$$|a - 3 \cdot (1-a) + (1-a) + (1-a)| = 6; \quad |a - (1-a)| = 6; \quad |2a - 1| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 6 \rightarrow 2a = 7 \rightarrow \underline{a_1 = \frac{7}{2}} \\ -2a + 1 = 6 \rightarrow 2a = -5 \rightarrow \underline{a_2 = -\frac{5}{2}}. \end{cases}$$

$b)$ El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, los valores $x = -2$ y $x = 0$:

$$f(-2) = \frac{2 \cdot e^{-2} - 8 \cdot (-2) - 3}{(-2)^2 + 1} = \frac{\frac{2}{e^2} + 16 - 3}{4+1} = \frac{\frac{2}{e^2} + 13}{5} > 0.$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot e^0 - 8 \cdot 0 - 3}{0^2 + 1} = \frac{2 \cdot 1 - 0 - 3}{1} = \frac{-1}{1} < 0.$$

La función $f(x)$ corta al eje X, al menos una vez, en el intervalo $(-2, 0)$.

BY NC SA

Problema 7:

7º) $a)$ Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo $X, A\ y\ B$ matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$b)$ Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

Solución:

$a)$ $\quad A \cdot X + B = X;\ \ B = X - A \cdot X;\ \ B = I \cdot X - A \cdot X;\ \ B = (I - A) \cdot X;$

$(I - A)^{-1} \cdot B = (I - A)^{-1} \cdot (I - A) \cdot X;\ \ (I - A)^{-1} \cdot B = I \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (I - A)^{-1} \cdot B}.$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad |I - A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$(I - A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.de(I - A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{Adj.de(I-A)^t}{|I-A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow (I - A)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (I - A)^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.}}$$

$b)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 4;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no gane ninguna de las carreras o que gane una.

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^3\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}064) = 1 - (0{,}0256 + 0{,}1536) = 1 - 0{,}1792 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \underline{P = 0{,}8208.}}$$

BY NC SA

Problema 8:

8º) $a)$ En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

$a_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un alumno apruebe?

$a_2)$ Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya asistido a clase.

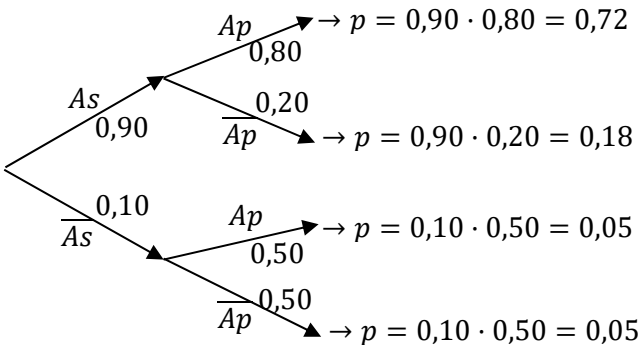
$b)$ Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

$b_1)$ ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

$b_2)$ ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

Solución:

$a)$



$a_1)$ $\quad P = P(Ap) = P(As \cap Ap) + P(\overline{As} \cap Ap) =$

$= P(As) \cdot P(Ap/As) + P(\overline{As}) \cdot P(Ap/\overline{As}) = 0{,}90 \cdot 0{,}80 + 0{,}10 \cdot 0{,}50 =$

$= 0{,}72 + 0{,}05 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(Ap) = 0{,}77.}$$

$a_2)$ $\quad P = P(\overline{As}/\overline{Ap}) = \frac{(\overline{As} \cap \overline{Ap})}{P(\overline{As})} = \frac{P(\overline{As}) \cdot P(\overline{Ap}/\overline{As})}{1 - P(As)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}50}{1 - 0{,}77} = \frac{0{,}05}{0{,}23} = \underline{0{,}2174}.$

$b)$ $Datos:\ \mu = 150;\ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(150, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 150}{5}$.

$b_1) P = P(X \geq 152) = P\left(Z \geq \frac{152 - 150}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{5}\right) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446}.$

$b_2) P = P(149 \leq X \leq 152) = P\left(\frac{152 - 150}{5} \leq Z \leq \frac{149 - 150}{5}\right) =$

$= P\left(\frac{2}{5} \leq Z \leq \frac{-1}{5}\right) = P(0{,}4 \leq Z \leq -0{,}2) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}2) =$

$= P(Z \leq 0{,}4) - [1 - P(Z \leq 0{,}2)] = P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z \leq 0{,}1) =$

$= 0{,}6554 - 1 + 0{,}5793 = 1{,}2347 - 1 = \underline{0{,}2347}.$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) $a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$, según los distintos valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m = -2$.

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a tal que: $A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3º) $a)$ Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

$b)$ Calcule el plano β perpendicular a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$, que pase por el punto $P(1, 2, 3)$.

4º) Considere el punto $P(2, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

$a)$ Halle la recta r que pasa por P y es perpendicular a π.

$b)$ Calcule la distancia del punto $Q(2, 2, -2)$ al plano π.

5º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

6º) Calcule: $a)$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$. $\quad b)$ $I = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx$.

7º) Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{1}{3}x^2$:

$a)$ Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

$b)$ Calcule el área de dicho recinto.

8º) $a)$ Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$b)$ Calcule: $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2 - 2 \cdot \cos x}$.

BY NC SA

9º) Una corporación fabrica herramientas de tres tipos de calidades. Un 10 % de calidad Alta; un 70 % de calidad Estándar y un 20 % de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1 %; el 10 % y el 30 % del total de las herramientas, respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar.

10º) El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1.500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1.000 horas de funcionamiento?

b) Si compramos 500 impresoras, ¿cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1.000 y 2.000 horas de uso?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Discutir el sistema $\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$:

$a)$ Discuta el sistema según los distintos valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m = -2$.

Solución:

$a)$ La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = 4m + m + 2m^2 + 2 + 2m^2 - 2m^2 = 0;$$

$2m^2 + 5m + 2 = 0;\ \ m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow m_1 = -2;\ \ m_2 = -\frac{1}{2}.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$Para \begin{Bmatrix} m \neq -2 \\ m \neq -1/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} m \neq -2 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} el\ sistema\ tiene\ solamente\ la\ solución\ trivial\ x = y = z = 0}$$

.

$$Para\ m = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ m = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} m = -2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

BY NC SA

$b)$ Para $m=-2$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x-4y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} 2x-4y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z=8\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} 2x-4y=8\lambda \\ x+2y=16\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x-2y=4\lambda \\ x+2y=16\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=20\lambda;\ x=10\lambda;\ 2y=-6\lambda;\ y=-3\lambda.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=10\lambda,\ y=-3\lambda,\ z=8\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a tal que: $A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a; \; A^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}; \; Adj.\,de\,A^t = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\,A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}}{a} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = \frac{1}{a} \\ a^2 + a = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a = 1}.$$

BY NC SA

Problema 3:

3º) $a)$ Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

$b)$ Calcule el plano β perpendicular a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$, que pase por el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución:

$a)$ Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta, $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 4)$, y el vector normal del plano, $\vec{n} = (2, 1, m)$, sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow m = 4.$$

$$\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ m = 4.}$$

$b)$ Los vectores normales de $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$ son, respectivamente, los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 1)$.

Un vector normal del plano β pedido es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de los vectores normales de los planos dados.

$$\overrightarrow{n'_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k - k + i - j = 2i - 2k \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (1, 0, -1).$$

La expresión general de β es la siguiente: $\beta \equiv x - z + D = 0$.

Si el plano β contiene al punto $P(1, 2, 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv x - z + D = 0 \\ P(1, 2, 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 2.$$

$$\boldsymbol{\beta \equiv x - z + 2 = 0.}$$

Problema 4:

4º) Considere el punto $P(2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y-3z+6=0$.

$a)$ Halle la recta r que pasa por P y es perpendicular a π.

$b)$ Calcule la distancia del punto $Q(2,2,-2)$ al plano π.

Solución:

$a)$ Un vector normal de π es $\vec{n}=(2,3,-3)$.

El vector $\vec{n}$ es director de la recta r pedida, por lo cual su ecuación es:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 2+3\lambda. \\ z = 1-3\lambda \end{cases}}$$

$b)$ La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $Q(2,2,-2)$ y al plano $\pi \equiv 2x+3y-3z+6=0$:

$$d(Q,\pi)=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 2-3\cdot(-2)+6|}{\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{|4+6+6+6|}{\sqrt{4+9+9}}=\frac{22}{\sqrt{22}}=\sqrt{22}.$$

$$\boldsymbol{d(Q,\pi)=\sqrt{22}\ unidades.}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

Solución:

El dominio de $f(x) = x \cdot e^x$ es R por ser producto de dos funciones continuas en R, por tanto: $D(f) \Rightarrow R$.

La función $f(x) = x \cdot e^x$ es continua en su dominio por ser producto de dos funciones continuas.

No tiene asíntotas verticales por tener R como dominio.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x \cdot e^x) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^x) = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^\infty} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{-e^x}{e^{2x}}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = -e^{-\infty} = -\frac{1}{e^\infty} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

El eje de abscisas es asíntota horizontal en su parte negativa.

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, su dominio, y que, por ejemplo, $f'(0) = e^0(1 + 0) = 1 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty).}$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x \cdot (1 + x) = e^x(2 + x).$$

$$f''(-1) = e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Mínimo\ relativo\ y\ absoluto: P\left(-1, -\frac{1}{e}\right).}$$

BY NC SA

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

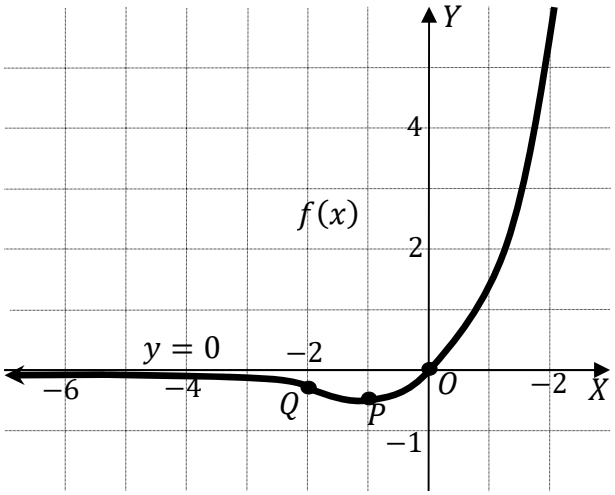
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0;\ \ e^x \neq \forall x \in R \Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2.$

$$\boldsymbol{Concavidad\ (\cap)\colon f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2).}$$

$$\boldsymbol{Convexidad\ (\cup)\colon f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, +\infty).}$$

$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\colon Q\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right).$

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que la función contiene al origen, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura siguiente.



Problema 6:

6º) Calcule: $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$. $\qquad b)\ I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx$.

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{e^0-0-1}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=$$

$$=\frac{e^0-1}{2\cdot 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}.}}$$

$b)\ I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx$.

Se determina, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A=\int x\cdot e^x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=x\to du=dx\\ e^x\cdot dx=dv\to v=e^x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx=$$

$$=x\cdot e^x-e^x\Rightarrow A=e^x(x-1).$$

$$I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx=[e^x(x-1)]_0^1=[e^1(1-1)]-[e^0(0-1)]=$$

$$=e\cdot 0-1\cdot(-1)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx=1.}}$$

BY NC SA

Problema 7:

7º) Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x},\ y = \frac{1}{3}x^2$:

$a)$ Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

$b)$ Calcule el área de dicho recinto.

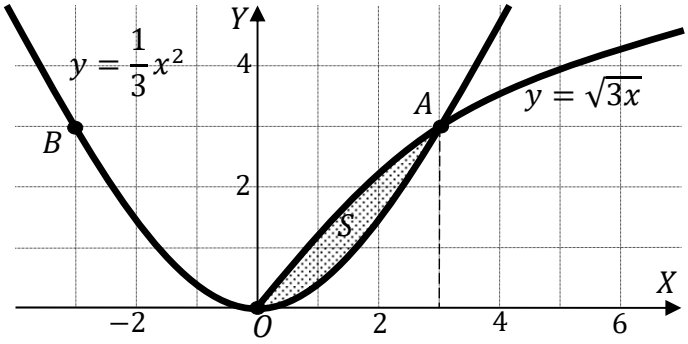
Solución:

$a)$ Los puntos de corte de las dos curvas tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$\sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2;\ 3\sqrt{3x} = x^2;\ 27x = x^4;\ x^4 - 27x = 0;\ x(x^3 - 27) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 3 \to A(3,3) \end{cases}.$$

La curva $y = \sqrt{3x}$ tiene por dominio $[0, +\infty)$ y es creciente en su dominio, por ser $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} > 0$ para cualquier valor perteneciente al dominio de la función.



La curva $y = \frac{1}{3}x^2$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el origen y, por simetría, contiene al punto $B(-3,3)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

$b)$ Por ser las ordenadas de la curva $y = \sqrt{3x}$ mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = \frac{1}{3}x^2$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2\right)\cdot dx = \int_0^3 \left(\sqrt{3}\cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2\right)\cdot dx = \left[\sqrt{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left[\sqrt{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{9}\right]_0^3 = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x\sqrt{x} - \frac{x^3}{9}\right]_0^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3} - \frac{3^3}{9}\right) - 0 = 6 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 3\ u^2}}.$$

Problema 8:

8º) $a)$ Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

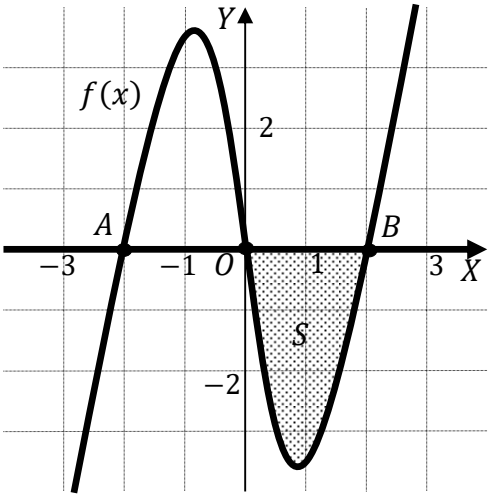
$b)$ Calcule: $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2-2\cdot \cos x}$.

Solución:

$a)$ Para hacer la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ se tiene en cuenta que es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$; sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0;$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2,0) \\ x_2 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_3 = 2 \rightarrow B(2,0) \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

Se ha tenido en cuenta, además de lo anterior, que por ejemplo, $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 < 0$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx = \int_2^0 (x^3 - 4x) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_2^0 =$$

$$0 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{4\cdot 2^2}{2}\right) = -4 + 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 4\, u^2}}.$$

$b)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2-2\cdot \cos x} = \frac{0 \cdot sen\, 0}{2-2\cdot \cos 0} = \frac{0}{2-2\cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot sen\, x + x\cdot \cos x}{2\cdot sen\, x} = \frac{sen\, 0 + 0\cdot \cos 0}{2\cdot sen\, 0} = \frac{0+0\cdot 1}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot sen\, x}{2 \cdot \cos x} = \frac{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot sen\, 0}{2 \cdot \cos 0} = \frac{1 + 1 - 0}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2-2\cdot \cos x} = 1.}}$$

BY NC SA

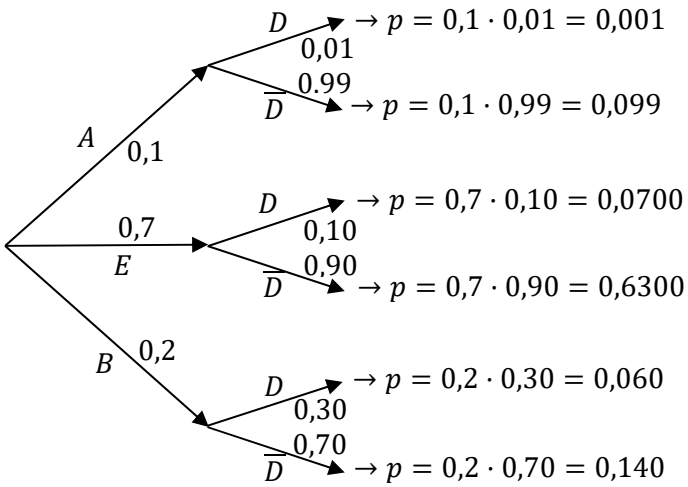
Problema 9:

9º) Una corporación fabrica herramientas de tres tipos de calidades. Un 10 % de calidad Alta; un 70 % de calidad Estándar y un 20 % de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1 %; el 10 % y el 30 % del total de las herramientas, respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar.

Solución:



$a)$ $P = P(D) = P(A \cap D) + P(E \cap D) + P(B \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(E) \cdot P(D/E) + P(B) \cdot P(D/B) =$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}7 \cdot 0{,}10 + 0{,}2 \cdot 0{,}30 = 0{,}001 + 0{,}070 + 0{,}060 = \underline{0{,}131}.$

$b)$ $P = P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}10}{0{,}131} = \frac{0{,}070}{0{,}131} = \underline{0{,}5344}.$

Problema 10:

10º) El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1.500 horas y una desviación típica de 200 horas.

$a)$ ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1.000 horas de funcionamiento?

$b)$ Si compramos 500 impresoras, ¿cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1.000 y 2.000 horas de uso?

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 1.500;\ \ \sigma = 200.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(1.500;\ 200).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1.500}{200}$.

$$P = P(X < 1.000) = P\left(Z < \frac{1.000-1.500}{200}\right) = P\left(Z < \frac{-500}{200}\right) = P(Z < -2{,}5) =$$

$$= P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = \underline{0{,}0062 = 0{,}62\ \%}.$$

$b)$ $P = P(1.000 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{1.000-1.500}{200} \leq Z \leq \frac{2.000-1.500}{200}\right) =$

$$= P\left(\frac{-500}{200} \leq Z \leq \frac{500}{200}\right) = P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq -2{,}5) =$$

$$= P(Z \leq 2{,}5) - [1 - P(Z \leq 2{,}5)] = P(Z \leq 2{,}5) - 1 + P(Z \leq 2{,}5) =$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq 2{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9938 - 1 = 1{,}9876 - 1 = 0{,}9876.$$

$$N = 500 \cdot P = 500 \cdot 0{,}9876 = 493{,}8.$$

Tendrán la primera avería entre 1.000 y 2.000 horas 494 impresoras.

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) $a)$ Discuta el sistema $\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m=2$.

2º) $a)$ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$.

$b)$ Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, explíquese cuáles de los productos $M\cdot N, M\cdot P, N\cdot P$ pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

3º) $a)$ Calcule el plano π que pasa por el punto $P(1,0,1)$ y es paralelo a los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,2,3)$.

$b)$ Calcule el plano β paralelo al plano $\alpha\equiv 3x+2y+2z+1=0$ que pase por el punto $Q(1,2,3)$.

4º) $a)$ Encuéntrense las ecuaciones de la recta t que está contenida en el plano $\alpha\equiv x-y=0$, es paralela al plano $\beta\equiv 2x-3y+z=4$ y pasa por el punto $P(1,1,3)$.

$b)$ Hállese la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r\equiv x-1=y+2=\frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A(0,3,1)$ y $B(-2,1,-1)$.

5º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

$a)$ Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene.

$b)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene.

6º) $a)$ Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{e^x-1}$.

$b)$ Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$.

BY NC SA

7º) $a)$ Enuncie el teorema de Bolzano.

$b)$ Averigüe si la función $f(x) = x + sen\, x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8º) $a)$ Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

9º) Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

--- El 28 % de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.

--- El 24 % son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.

--- El 48 % son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R: "ser ruso"; E: "ser estadounidense"; M: "no ser ruso ni estadounidense" y GM: "ser gran maestro".

$a)$ Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$; $P(GM/E)$; $P(GM/M)$.

$b)$ Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro.

$c)$ Se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?

10º) La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1,1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"?

$b)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2,9 cpg?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Discuta el sistema $\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-1-4m+2+m+4-2=0;\ \ 3-3m=0;$$

$1-m=0\Rightarrow m=1.$

$$\boldsymbol{Para\ a\neq 1\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=C_3\}\Rightarrow\ Rang\ A'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-16+3+4+6=-3\neq 0\Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1\Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$ Para $m=2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y+2z=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{3-3\cdot 2}=\frac{-4-12+16-3}{-3}=\frac{-3}{-3}=1. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3+8-6-8}{-3}=\frac{-3}{-3}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-16+3+4+6}{-3}=\frac{-3}{-3}=1.$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=1,\ y=1,\ z=1.}$$

Problema 2:

2º) $a)$ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$.

$b)$ Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, explíquese cuáles de los productos $M\cdot N, M\cdot P, N\cdot P$ pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

Solución:

$a)$ $\quad A\cdot X+B=C;\ A\cdot X=C-B;\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B);$

$I\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(C-B)}.$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(C-B)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}}.$$

$b)$ Para que sea posible el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera sea igual que el número de filas de la segunda.

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

$$M\cdot P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I}.$$

$$N\cdot P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

Problema 3:

3º) $a)$ Calcule el plano π que pasa por el punto $P(1,0,1)$ y es paralelo a los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,2,3)$.

$b)$ Calcule el plano β paralelo al plano $\alpha \equiv 3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pase por el punto $Q(1,2,3)$.

Solución:

$a)$ La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\vec{u}, \vec{v};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3(x-1) + y + 2(z-1) - (z-1) - 2(x-1) - 3y = 0;$$

$$(x-1) - y + (z-1) = 0;\ \ x - 1 - y - z - 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - y - z - 2 = 0.}$$

$b)$ El haz de planos, γ, paralelos al plano $\alpha \equiv 3x + 2y + 2z + 1 = 0$ tiene por expresión general $\gamma \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz γ, el plano β pedido es el que contiene al punto $Q(1,2,3)$.

$$\left.\begin{matrix} \gamma \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0 \\ Q(1,2,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + D = 0;$$

$$3 + 4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -13 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta \equiv 3x + 2y + 2z - 13 = 0.}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) $a)$ Encuéntrense las ecuaciones de la recta t que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P(1, 1, 3)$.

$b)$ Hállese la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{x-1}{2}$ y pasa por los puntos $A(0, 3, 1)$ y $B(-2, 1, -1)$.

Solución:

$a)$ El vector director de la recta t es perpendicular al vector normal del plano α por estar contenida en él y, también es perpendicular la vector normal del plano β por ser paralela a él, por lo cual, es perpendicular a los vectores normales a los planos. Un vector perpendicular a dos vectores dados es linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores, es decir: $\overrightarrow{v_t}$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{n_\alpha}$ y $\overrightarrow{n_\beta}$.

$$\overrightarrow{n_\alpha} = (1, -1, 0) \; y \; \overrightarrow{n_\beta} = (2, -3, 1).$$

$$\overrightarrow{v'_t} = \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3k + 2k - j = -i - j - k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda. \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}$$

$b)$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = [(0, 3, 1) - (-2, 1, -1)] = (2, 2, 2).$

$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2).$

$$\pi(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{v_r};\, A) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$4x + 2(y - 3) + 2(z - 1) - 2(z - 1) - 2x - 4(y - 3) = 0;\;\; 2x - 2(y - 3) = 0;$

$$x - (y - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - y + 3 = 0.}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene.

Solución:

a) Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador:

$$2-x=0;\ \ x=2 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{2\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2-x}=\pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2-x=0;\ \ x=2 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x=2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=-1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x}=-2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua: y=-x-2.}}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}=0;\ x(4-x)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=4.$$

Como quiera que el denominador de la derivada es positivo para los valores reales de x pertenecientes al dominio de R, el signo de $f'(x)$ es el que tenga el numerador, al cual lo dividen las raíces de la derivada en los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,4)$ y $(4,+\infty)$, donde la $f'(x)$ es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, $x=1\in(0,4)$:

$f'(1) = \frac{1\cdot(4-1)}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} > 0.$

Teniendo en cuanta el dominio de la función y de lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup (4, +\infty).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, 2) \cup (2, 4).}}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^2-(4x-x^2)\cdot[2\cdot(2-x)\cdot(-1)]}{(2-x)^4} = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)+2(4x-x^2)}{(2-x)^3} =$$

$$= \frac{8-4x-4x+2x^2+8x-2x^2}{(2-x)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}.$$

$f''(0) = \frac{8}{(2-0)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow$ Mín. relativo para $x = 0$.

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mín: O(0,0).}$

$f''(4) = \frac{8}{(2-4)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow$ Máx. relativo para $x = 4$.

$f(4) = \frac{4^2}{2-4} = \frac{16}{-2} = -8 \Rightarrow \underline{Máx: A(4,-8).}$

Problema 6:

6º) $a)$ Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{e^x-1}$.

$b)$ Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$.

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{e^x-1}=\frac{L(1+0)}{e^0-1}=\frac{L1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\cdot e^x}=\frac{1}{(1+0)\cdot e^0}=\frac{1}{1\cdot 1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{e^x-1}=1.}$$

$b)$ Teniendo en cuenta que $f(-x)=(-x)^3-9\cdot(-x)=-x^3+9x=-f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función son los siguientes:

$$f(x)=0\Rightarrow x^3-9x=0;\ \ x(x^2-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3\rightarrow A(-3,0)\\x_2=0\rightarrow O(0,0)\\x_3=3\rightarrow B(3,0)\end{cases}.$$

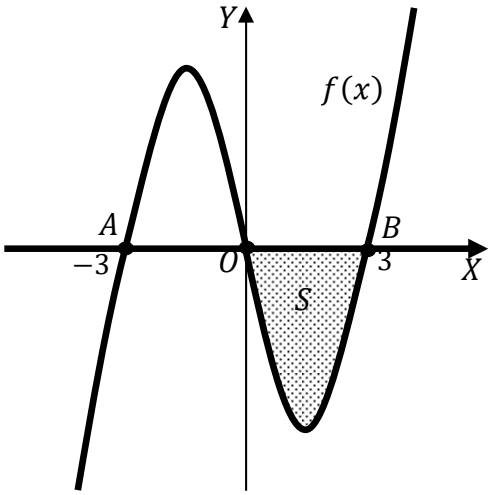
Teniendo en cuenta que $f(1)=1-9=-8<0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.

$$S=\int_3^0 f(x)\cdot dx+\int_3^0(x^3-9x)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_3^0=0-\left(\frac{3^4}{4}-\frac{9\cdot 3^2}{2}\right)=$$

$$=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=-\frac{81+162}{4}=\frac{81}{4}.$$

$$\boxed{S=\frac{81}{4}u^2=20,25\ u^2.}$$



Problema 1:

7º) $a)$ Enuncie el teorema de Bolzano.

$b)$ Averigüe si la función $f(x) = x + sen\, x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

$a)$ El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$b)$ La función $f(x) = x + sen\, x - 2$ es continua en su dominio, que es R, por ser suma de funciones continuas en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

$$f(0) = 0 + sen\, 0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + sen\, \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que:

A la función $f(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

BY NC SA

Problema 8:

8º) $a)$ Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

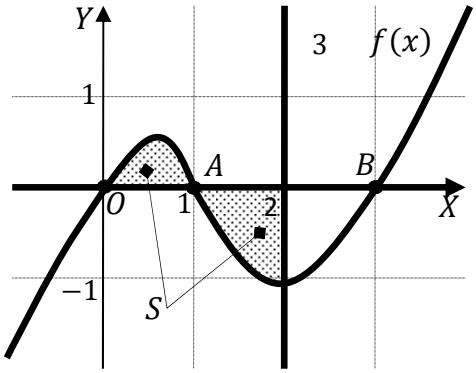
Solución:

$a, b)$ La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, tiene los siguientes puntos de corte con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0;\ \ x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \rightarrow A(1,0) \\ x_3 = 3 \rightarrow B(3,0) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta, por ejemplo, que $f(2) = 8 - 16 + 6 = -2 < 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_2^1 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2). \quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $F(x)$ en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - 4 + \frac{32}{3} - 6 = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 3 - 10 + \frac{32}{3} = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{3}{2} u^2 = 1,5\ u^2.}$$

Problema 9:

9º) Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

--- El 28 % de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.

--- El 24 % son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.

--- El 48 % son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

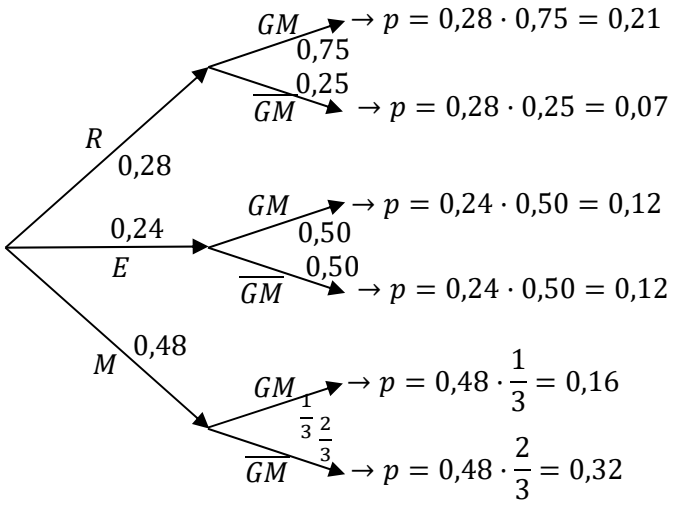
Considerando los sucesos: R: "ser ruso"; E: "ser estadounidense"; M: "no ser ruso ni estadounidense" y GM: "ser gran maestro".

$a)$ Indique cuáles son los valores de $P(GM/R);\ P(GM/E);\ P(GM/M)$.

$b)$ Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro.

$c)$ Se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?

Solución:



$a)$ $P = P(GM/R) = \frac{3}{4} = 0{,}75.$ $P(GM/E) = \underline{0{,}5}.$ $P = P(GM/M) = \underline{\frac{1}{3} \cong 0{,}33}.$

(Sorprendente la pregunta: son datos del ejercicio)

$b)\ P = P(GM) = P(R \cap GM) + P(E \cap GM) + P(M \cap GM) =$

$= P(R) \cdot P(GM/R) + P(E) \cdot P(GM/E) + P(M) \cdot P(GM/M) =$

$= 0{,}28 \cdot 0{,}75 + 0{,}24 \cdot 0{,}50 + 0{,}48 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}16 = \underline{0{,}49}.$

$b)$ $P = P(R/GM) = \frac{P(R \cap GM)}{P(GM)} = \frac{P(R) \cdot P(GM/R)}{P(GM)} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}75}{0{,}49} = \frac{0{,}21}{0{,}49} = \underline{0{,}4286}.$

Problema 10:

10º) La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1,1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"?

$b)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2,9 cpg?

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 2;\ \ \sigma = 1.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(2,1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2}{1}$.

$$P = P(X < 1{,}1) = P\left(Z < \frac{1{,}1-2}{1}\right) = P(Z < -0{,}9) = P(Z > 0{,}9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}9) = 1 - 0{,}8159 = \underline{0{,}1841 = 18{,}41\ \%}.$$

$b)$ $P = P(2 < X < 2{,}9) = P\left(\frac{2-2}{1} < Z < \frac{2{,}9-2}{1}\right) = P(0 < Z < 0{,}9) =$

$$= P(Z < 0{,}9) - P(Z < 0) = 0{,}8159 - 0{,}5 = \underline{0{,}3159 = 31{,}59\ \%}.$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

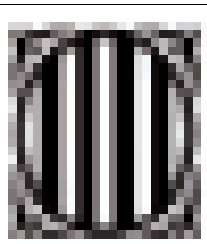
www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

$a)$ Si sabemos que $f(x)$ corta al eje de abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de $f(x)$.

$b)$ Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

$c)$ Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$ es 15 u^2. Calcule el valor de a.

2º) Considere el sistema $\left.\begin{matrix} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{matrix}\right\}$, dependiente del parámetro real a.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $a = 2$.

3º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

$a)$ Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si el paralela, calcule la distancia de r a π, si es secante, calcule el punto de corte.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta a la recta r en un punto P, la primera coordenada de éste es 5 veces mayor que la segunda.

4º) $a)$ Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte al eje de ordenadas en el punto $A(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

$b)$ Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

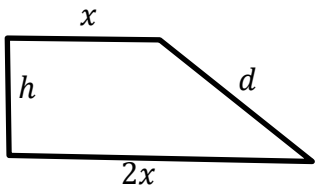
BY NC SA

5º) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros $a, b\ y\ c$.

a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de $a, b\ y\ c$ para que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6º) En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, por lo que la base mayor mida el doble de la base menor, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto de las bases (d) se tan corto como sea posible.



a) Justifique que se satisfacen las relaciones $h = \frac{20}{x}$ y $d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para los que la longitud del lado d es mínima.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si sabemos que $f(x)$ corta al eje de abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de $f(x)$.

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

c) Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$ es 15 u^2. Calcule el valor de a.

SOLUCIÓN

a) $f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 - 12x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + C = x^3 - 6x^2 + C.$

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0;\ \ 1 - 6 + C = 0 \Rightarrow C = 5.$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.}$$

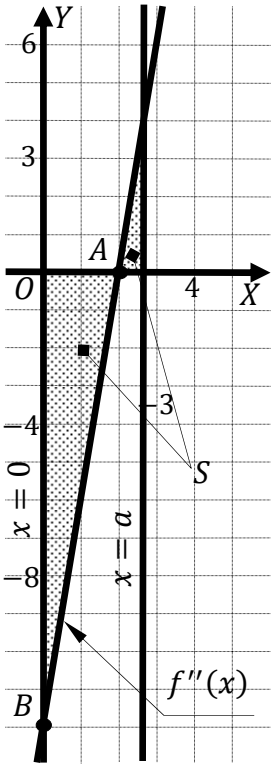
b) Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 6x - 12 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 24 + 5 = -11 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P.I. \rightarrow P(2, -11).}$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.



$$\boldsymbol{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \in (-\infty, 2).}$$

$$\boldsymbol{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \in (2, +\infty).}$$

c) La función $f''(x) = 6x - 12$ es una recta que contiene a los puntos $A(2, 0)$ y $B(3, 6)$. La representación gráfica de la situación se indica, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$$S = \int_2^0 (6x - 12) \cdot dx + \int_2^a (6x - 12) \cdot dx = 15;$$

$$\left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^0 + \left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^a = 15;$$

$$[3x^2 - 12x]_2^0 + [3x^2 - 12x]_2^a =$$

$$= 0 - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) + (3a^2 - 12a) - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) =$$

$$= -12 + 24 + 3a^2 - 12a - 12 + 24 = 15;$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0;\ a^2 - 4a + 3 = 0;$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

La solución $a = 1$ no cumple la condición de $a > 2$, por lo cual:

$$\boldsymbol{a = 3.}$$

BY NC SA

2º) Considere el sistema $\left.\begin{matrix} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{matrix}\right\}$, dependiente del parámetro real a.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $a=2$.

SOLUCIÓN

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4a^2+6+2-3a-a-16=4a^2-4a-8=0;$$

$a^2-a-2=0;\ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$

$$\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{matrix} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_1+F_2=-F_3\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=C_4\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{matrix} a=-1 \\ a=2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} 2x+2y+3z=2 \\ 2x+2y+z=2 \\ x+y+4z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (primera).

$\left.\begin{matrix} 2x+2y+3z=2 \\ x+y+4z=1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ Haciendo $y=\lambda$:

$\left.\begin{matrix} 2x+3z=2-2\lambda \\ x+4z=1-\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -2x-3z=-2+2\lambda \\ 2x+8z=2-2\lambda \end{matrix}\right\}\Rightarrow 5z=0;\ z=0.\ x=1-\lambda.$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=1-\lambda,\ y=\lambda,\ z=0,\ \forall\lambda\in R.}$$

BY NC SA

3º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

a) Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si el paralela, calcule la distancia de r a π, si es secante, calcule el punto de corte.

b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta a la recta r en un punto P, la primera coordenada de éste es 5 veces mayor que la segunda.

SOLUCIÓN

a) Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (1, 3, 1)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, 4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son paralelos por no ser proporcionales sus componentes.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 3, 1) \cdot (1, -2, 4) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son perpendiculares, por lo cual:

$\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv x - 2 = \frac{y+1}{3} = z - 3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - 6 = y + 1 \\ x - 2 = z - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \\ x - 2y + 4z = 4 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 4 = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$\boldsymbol{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) = 4;$$

BY NC SA

$$2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda=4;\ \ \lambda=-12 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2+12=14 \\ y=-1+36=35 \\ z=3+12=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Q(14,35,15)}}.$$

$b)$ Un punto genérico de r es $A'(2+\lambda,-1+3\lambda,3+\lambda)$ y de ellos, el que tiene la primera coordenada 5 veces mayor que la segunda es el siguiente:

$$2+\lambda=5\cdot(-1+3\lambda);\ \ 2+\lambda=-5+15\lambda;\ \ 7=14\lambda;\ \ \lambda=\frac{1}{2}.$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ y=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \\ z=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right).$$

La recta s pedida tiene como vector director al vector normal del plano, que es $\vec{n}=(1,-2,4)$, y que contiene al punto $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\boldsymbol{s\equiv}\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{5}{2}+\mu} \\ \boldsymbol{y=\frac{1}{2}-2\mu.} \\ \boldsymbol{z=\frac{7}{2}+4\mu} \end{cases}$$

BY NC SA

4º) $a)$ Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte al eje de ordenadas en el punto $A(0,5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

$b)$ Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0,4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

SOLUCIÓN

$a)$ Sea la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por cortar al eje de ordenadas en el punto $A(0,5)$: $g(0) = 5 \Rightarrow d = 5$.

Por ser horizontal la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ se cumple que: $g'(1) = 0$.

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$g'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0;\ 3a + 2b + c = 0.$ (1)

$g''(x) = 6ax + 2b$.

$g''(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 6a = 2 \\ 2b = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow a = \frac{1}{3};\ b = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + c = 0;\ 1 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5.}$$

$b)$ $f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 16 = -8 + 24 - 16 = 0$.

$$\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ x = 2\ es\ una\ raíz\ de\ f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16.}$$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0;\ -3x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$.

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow (Creciente) \Rightarrow \forall x \in (0,4), como\ había\ que\ comprobar.}$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = -16 < 0$ y que $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16 =$

$= -64 + 96 - 16 = 96 - 80 = 16 > 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx + \int_2^4 f(x) \cdot dx = [F(x)]_2^0 + [F(x)]_2^4 =$

$= F(0) - F(2) + F(4) - F(2) \Rightarrow S = F(0) + F(4) - 2 \cdot F(2).$ (*)

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^3 + 6x^2 - 16) \cdot dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 16x \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x$. Sustituyendo este valor en (*):

$$S = 0 + \left(-\frac{4^4}{4} + 2 \cdot 4^3 - 16 \cdot 4\right) - 2 \cdot \left(-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2\right) = -64 + 128 - 64 + 8 - 32 + 64 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = 40\ u^2.}$$

BY NC SA

5º) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros $a, b\ y\ c$.

a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de $a, b\ y\ c$ para que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

$a)\ X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a = 1 \rightarrow b = -1; c = 1 \\ a = -1 \rightarrow b = 1; c = -1 \end{Bmatrix}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluciones}: \boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}.}$$

$b)$ Sabiendo que $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I$:

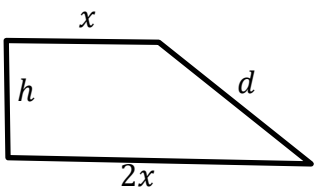
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{b}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{c}{2} \\ 0 & b & 1+c \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2, b = 1, c = -1.}}$$

BY NC SA

6º) En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, por lo que la base mayor mida el doble de la base menor, tal como muestra la figura, y el lado oblicuo respecto de las bases (d) se tan corto como sea posible.



$a)$ Justifique que se satisfacen las relaciones $h = \frac{20}{x}$ y $d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

$b)$ Encuentre las dimensiones del trapecio para los que la longitud del lado d es mínima.

SOLUCIÓN

$a)$ La superficie del trapecio rectángulo es $S = \frac{Base+base}{2} \cdot Altura$:

$S = \frac{2x+x}{2} \cdot h = 30;\ \frac{3x}{2} \cdot h = 30;\ \frac{x}{2} \cdot h = 10 \Rightarrow \underline{h = \frac{20}{x}}.$

De la observación de la figura se deduce, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se puede formar en el trapecio:

$$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{x}\right)^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}.}}$$

$b)$ Para que el lado d sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$d'(x) = \frac{\frac{-400 \cdot 2x}{x^4} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{-400 \cdot 2x}{x^4} + 2x = 0;\ \frac{-400}{x^3} + x = 0;\ x = \frac{400}{x^3};$$

$x^4 = 400;\ x^2 = 20;\ x = +\sqrt{20} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}.$ $\quad h = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} \Rightarrow h = 2\sqrt{5}.$

$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = d = 2\sqrt{5}\ unidades;\ \ h = 2\sqrt{10}\ unidades.}}$$

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) El palo central que sostiene la lona de la carpa de un circo se ubica perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi \equiv x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el palo) está en el punto de coordenadas $P(30, 1, 0)$.

$a)$ Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el palo.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto de contacto del palo con el suelo, y la longitud del palo.

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{9}{x^2+x-2}$.

$a)$ Discuta el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$b)$ Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

Problema 3:

3º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende del parámetro a.

$a)$ Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 4:

4º) $a)$ Considere la función $f(x) = \begin{cases} Lx \;\; si \;\; \in (0, e) \\ ax + b \;\; si \;\; x \in [e, 4) \end{cases}$, siendo a y b números reales. Halla los valores de a y b tal que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0, 4)$.

$b)$ Calcule la función $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto $P(0, -1)$.

BY NC SA

Problema 5:

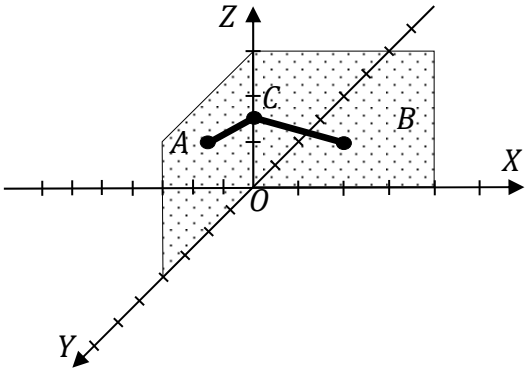
5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Para el caso de $a = 3$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo B la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Problema 6:

6º) La imagen adjunta muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una parte es el plano $y = 0$ y la otra parte es el plano $x = 0$.



En el punto $A(2, 0, 2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, que está situado en la otra pared, en el punto $B(0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C(0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Debido a que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

$a)$ Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dado por la siguiente expresión:

$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto C por donde ha de pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima del cable.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) El palo central que sostiene la lona de la carpa de un circo se ubica perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi \equiv x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el palo) está en el punto de coordenadas $P(30, 1, 0)$.

$a)$ Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el palo.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto de contacto del palo con el suelo, y la longitud del palo.

Solución:

$a)$ La recta r pedida es perpendicular al plano $\pi \equiv x - z = 6$ y contiene al punto $P(30, 1, 0)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - z = 6$ es $\vec{n} = (1, 0, -1)$, que también es director de la recta r, por lo cual:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}.}$$

$b)$ $\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - z = 6 \\ r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (30 + \lambda) - (-\lambda) = 6;\ \ 30 + \lambda + \lambda = 6;\ \ 30 + 2\lambda = 6;$

$$2\lambda = -24;\ \ \lambda = -12 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 30 - 12 = 18 \\ y = 1 \\ z = -(-12) = 12 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Q(18, 1, 12).}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x)=\frac{9}{x^2+x-2}$.

$a)$ Discuta el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$b)$ Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=4$. Represente en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

Solución:

$a)$ Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2+x-2=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow x_1=-2, x_2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D(f)\ \Rightarrow R-\{-2,1\}.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x^2+x-2}=0\Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y=0\ (eje\ X)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$\boldsymbol{\underline{Asíntotas\ verticales: x=-2, x=1.}}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2+x-2)-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

Por ser $(x^2+x-2)^2>0, \forall x\in D(f)$, el signo de la primera derivada es el de su numerador.

$$-9\cdot(2x+1)=0;\ \ 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

$$Para\ x<-\frac{1}{2}\Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty,-2)\cup\left(-2,-\frac{1}{2}\right)}.$$

$$Para\ x>-\frac{1}{2}\Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow \underline{Decrecimiento: \left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x)=\frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}.\qquad f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

$$f''(x)=\frac{-18\cdot(x^2+x-2)^2+9\cdot(2x+1)\cdot[2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x-2)^4}=\frac{-18\cdot(x^2+x-2)+18\cdot(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^3}=$$

$$=\frac{-18\cdot(x^2+x-2-4x^2-8x-1)}{(x^2+x-2)^3}=\frac{-18\cdot(-3x^2-7x-3)}{(x^2+x-2)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{18\cdot(3x^2+7x+3)}{(x^2+x-2)^3}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{18\cdot\left[3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right]}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2\right]^3}=\frac{18\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3}=\frac{18\cdot\frac{3-14+12}{4}}{\left(\frac{1-2-8}{4}\right)^3}=\frac{\frac{9}{2}}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3}<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=-\frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{9}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2}=\frac{9}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}=\frac{9}{\frac{1-2-8}{4}}=\frac{9}{\frac{-9}{4}}=-4\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo: A\left(-\frac{1}{2},-4\right).}}$$

$b)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}.\qquad Para\ x=4\Rightarrow m=f'(4)=\frac{-81}{18^2}=-\frac{1}{4}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(4)=\frac{9}{4^2+4-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow P\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(4,\frac{1}{2}\right)$ con $m=-\frac{1}{4}$:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-4);\ \ 4y-2=-x+4.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t\equiv x+4y-6=0.}}$$

Para facilitar la representación gráfica de la situación se determinan los puntos de corte con los ejes, que son los siguientes:

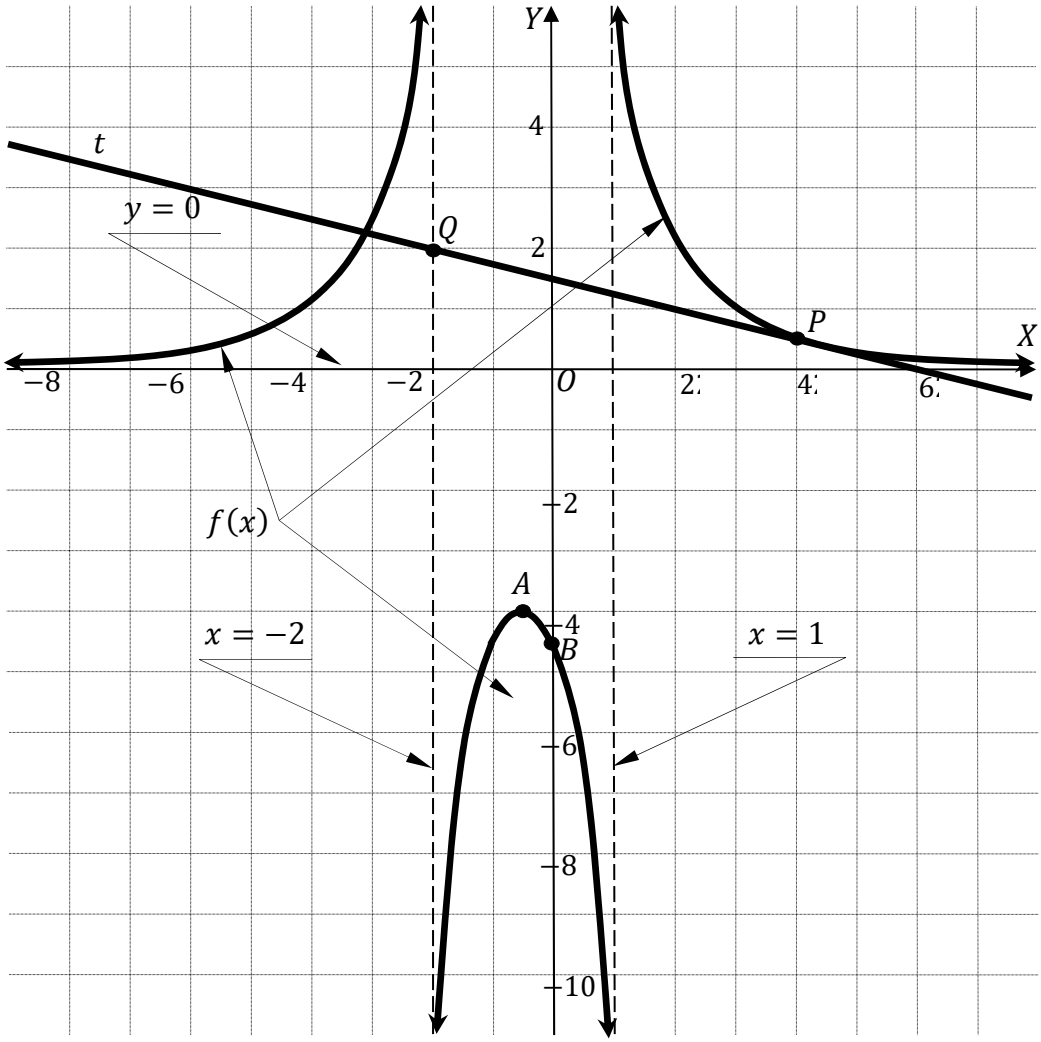
$$Eje\ X\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\frac{9}{x^2+x-2}=0\Rightarrow x\notin R\Rightarrow \underline{No\ corta\ al\ eje\ X}.$$

$$Eje\ Y\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{9}{0+0-2}=-\frac{9}{2}\Rightarrow B\left(0,-\frac{9}{2}\right).$$

Para la representación gráfica de la tangente se tiene en cuenta que contiene al punto $Q(-2,2)$.

BY NC SA

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura siguiente.



Problema 3:

3º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende del parámetro a.

$a)$ Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 =$

$= -65 + 15a^2 = 0;\ -13 + 3a^2 = 0;\ \ 3a^2 = 13 \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{39}}{3}.$

Se calcula el rango por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2a \cdot F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7 \cdot F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & 3a - 6a \\ 0 & 4a - 7a & 9 - 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \\ 0 & -3a & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - \tfrac{5-2a^2}{a} \cdot F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5a^2-20}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{5a^2-20}{a} = 0;\ \ 5a^2 - 20 = 0;\ \ a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a \neq -2} \\ \boldsymbol{a \neq 2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\Rightarrow Rang\ A = 3;}\ \ \boldsymbol{Para}\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a = -2} \\ \boldsymbol{a = 2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\Rightarrow Rang\ A = 2.}}$$

$b)$ De la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se deduce el sistema de ecuaciones lineales homogéneo: $\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema que resulta de restar a cada ecuación la anterior:

$\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{matrix}\right\}$, que a su vez, es equivalente al sistema: $\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}$.

Para su resolución se parametriza, por ejemplo, $z = \lambda$;

$\left.\begin{matrix} x + 2y = -3\lambda \\ x + y = -\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} x + 2y = -3\lambda \\ -x - y = \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -2\lambda.\ \ x = -y - \lambda = 2\lambda - \lambda \Rightarrow x = \lambda.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = \lambda;\ \ y = -2\lambda;\ \ z = \lambda, \forall \lambda \in R.}}$$

BY NC SA

Problema 4:

4º) $a)$ Considere la función $f(x) = \begin{cases} Lx \ \ si \ \ \in (0,e) \\ ax+b \ \ si \ \ x \in [e,4) \end{cases}$, siendo $a \ y \ b$ números reales. Halla los valores de $a \ y \ b$ tal que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0,4)$.

$b)$ Calcule la función $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto $P(0,-1)$.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en $(0,4)$, excepto para $x = e$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a \ y \ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x = e \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e} Lx = 1 \\ \lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e} (ax+b) = ae + b = f(e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^+} f(x) = f(e) \Rightarrow ae + b = 1. \quad (*)$$

La función $f(x)$ es derivable en $(0,4)$, excepto para $x = e$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a \ y \ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ \ si \ \ \in (0,e) \\ a \ \ si \ \ x \in [e,4) \end{cases} \Rightarrow x = e \ \Rightarrow f'(e) = \begin{cases} \frac{1}{e} \ \ si \ \ \in (0,e) \\ a \ \ si \ \ x \in [e,4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(e^-) = f'(e^+) \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow ae = 1. \quad \text{Sustituyendo en (*): } b = 0.$$

$$\boldsymbol{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ y \ derivable \ en \ (0,4) \ para \ a = \frac{1}{e} \ y \ b = 0.}$$

$$b) \ g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x^3}{9x^4+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 9x^4 + 1 = t \\ 36x^3 \cdot dx = dt \\ x^3 \cdot dx = \frac{1}{36} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{36} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot Lt + C \Rightarrow g(x) = \frac{1}{36} \cdot L(9x^4+1) + C.$$

$$g(0) = -1 \Rightarrow \frac{1}{36} \cdot L(9 \cdot 0^4 + 1) + C = 1; \ \frac{1}{36} \cdot L1 + C = 1; \ \frac{1}{36} \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{36} \cdot L(9x^4+1) + C.}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Para el caso de $a = 3$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a \cdot [(-a^2 - 4a - 3) + (2a^2 - a - 1) + (2a + 6)] = 0;\ \ a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible}\ \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{0, 1, 2}\}.}$$

$$b)\ B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B - 3I = I.$$

$$A \cdot X = B - 3I = I;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I;\ \ I \cdot X = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$$

Para $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. $\ |A| = -72 + 42 + 36 \Rightarrow |A| = 6.$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

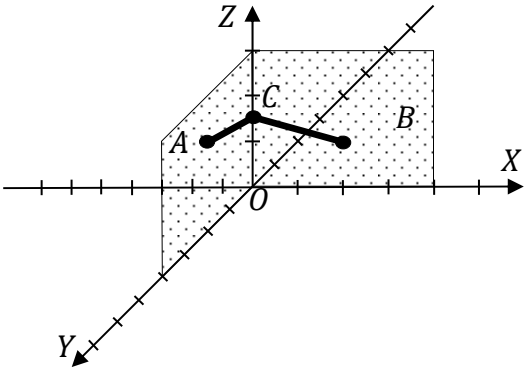
$$= \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.\ A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = A^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-\frac{14}{3}} & \boldsymbol{\frac{7}{2}} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

Problema 6:

6º) La imagen adjunta muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una parte es el plano $y = 0$ y la otra parte es el plano $x = 0$.



En el punto $A(2,0,2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, que está situado en la otra pared, en el punto $B(0,2,1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C(0,0,h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Debido a que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

$a)$ Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dado por la siguiente expresión:

$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto C por donde ha de pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima del cable.

Solución:

$a)$ $\quad L(h) = \overline{AC} + \overline{CB} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (2-h)^2} \\ \overline{CB} = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 + (1-h)^2} \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4 + 4 - 4h + h^2} + \sqrt{4 + 1 - 2h + h^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}.}}$$

$b)$ $\quad$ Para que la longitud sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2\cdot\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2\cdot\sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = \frac{-h+1}{\sqrt{h^2-2h+5}}; \ \frac{h^2-4h+4}{h^2-4h+8} = \frac{h^2-2h+1}{h^2-2h+5};$

$(h^2 - 4h + 4)(h^2 - 2h + 5) = (h^2 - 4h + 8)(h^2 - 2h + 1);$

$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$

$= h^4 - 2h^3 + h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 4h + 8h^2 - 16h + 8;$

$-20h - 8h + 20 = -4h - 16h + 8; \ -28h + 20 = -20h + 8; \ \ 12 = 8h \Rightarrow h = \frac{3}{2}.$

La longitud del cable es mínima cuando $h = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{C\left(0,0,\frac{3}{2}\right)}$.

Para $h = \frac{3}{2} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{3}{2} + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2} + 5} =$

BY NC SA

$$= \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 8} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 5} = \sqrt{\frac{9}{4} + 2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{9+4}{4}} = \sqrt{13}.$$

$$\boldsymbol{La\ longtidud\ mínima\ del\ cable\ es\ L = \sqrt{13}\ m \cong 3,61\ m.}$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprobar, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$; $B^t \cdot C$; $B \cdot C$, cuando B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Hallar $a \in R$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de las tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo pare ese valor de a.

2º) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$.

3º) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$:

$a)$ Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r.

$b)$ Calcular la distancia del origen a la recta r.

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$:

$a)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta r.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta r.

5º) Calcular el valor de $a \in R$ para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ a & si \;\; x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

6º) Dada la función $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$:

$a)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.

$b)$ Calcular el intervalo donde la función permanece constante.

7º) Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x}$.

8º) Calcular el área encerrada por la función $f(x) = sen\, 2x$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \pi$.

BY NC SA

9º) En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celíaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además, el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ Tenga solo una de las dos alergias.

$b)$ Sea celíaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa.

10º) Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde a todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien:

$a)$ Cinco preguntas. $b)$ Alguna pregunta.

$c)$ Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$a)$ Comprobar, cuando sea posible, las matrices $C\cdot B^t;\ B^t\cdot C; B\cdot C$, cuando B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Hallar $a\in R$ para que el sistema $x\cdot A+y\cdot B=C$ de las tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo pare ese valor de a.

Solución:

$a)$

$$C\cdot B^t=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot(3\quad -1\quad -4)=\underline{\begin{pmatrix}3&-1&-4\\6&-2&-8\\3&-1&-4\end{pmatrix}}.$$

$$B^t\cdot C=(3\quad -1\quad -4)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\underline{(-3)}.$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

Para que dos matrices se puedan multiplicar es necesario que el número de columnas del multiplicando sea igual al número de filas del multiplicador y, en este caso, el multiplicando tiene una columna y el multiplicador tiene tres filas.

$b)$ $$x\cdot A+y\cdot B=C\Rightarrow x\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x+3y=1\\x-y=2\\ax-4y=1\end{matrix}\right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\\a&-4\end{pmatrix}\text{ y }M'=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-1&2\\a&-4&1\end{pmatrix}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales e iguales al número de incógnitas.

En el caso que nos ocupa, ambos rangos tienen que ser dos, por ser dos el número de incógnitas.

$Rang\ M'=2\Rightarrow|M'|=0$:

$$\begin{vmatrix}2&3&1\\1&-1&2\\a&-4&1\end{vmatrix}=0;\ -2-4+6a+a+16-3=0;\ \ 7a+7=0\Rightarrow\underline{a=-1}.$$

BY NC SA

El sistema resulta: $\left.\begin{matrix} 2x+3y=1 \\ x-y=2 \\ -x-4y=1 \end{matrix}\right\}$. Para su resolución son suficiente dos de sus ecuaciones, por ejemplo, segunda y tercera:

$$\left.\begin{matrix} x-y=2 \\ -x-4y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -5y=3;\ y=-\frac{3}{5}. \qquad x+\frac{3}{5}=2;\ 5x+3=10 \Rightarrow x=\frac{7}{5}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}:\ \boldsymbol{x=\frac{7}{5}, y=-\frac{3}{5}.}}$$

BY NC SA

2º) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$. Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M\cdot X-N=2X$.

Solución:

$$M\cdot X-N=2X;\ \ M\cdot X-2X=N;\ \ (M-2I)\cdot X=N;$$

$$(M-2I)^{-1}\cdot(M-2I)\cdot X=(M-2I)^{-1}\cdot N;\ \ I\cdot X=(M-2I)^{-1}\cdot N\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=(M-2I)^{-1}\cdot N.\quad (*)$$

$$M-2I=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $(M-2I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(M-2I|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2-2F_1\\F_3\to F_3-F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&2&1&-1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&3&-2&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(M-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}.\quad \text{Sustituyendo en (*):}$$

$$X=(M-2I)^{-1}\cdot N=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\-4&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-2&-2\\-4&2&7\end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

3º) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$:

$a)$ Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r.

$b)$ Calcular la distancia del origen a la recta r.

Solución:

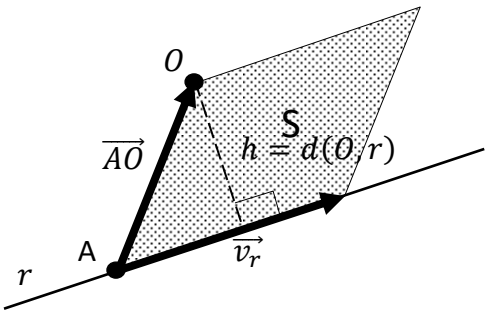
$a)$ El punto de intersección del plano π y la recta r es la solución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan: $\left.\begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ -2x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$. Resolviendo por sustitución:

$$z = x \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2y - x = 0 \\ -2x + y = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 0;\ \ x = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).}}$$

$b)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace el esquema de la situación adjunto.



$$\left.\begin{matrix} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(O,r) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{v_r}|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = \lambda \Rightarrow y = 1 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $A(0,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,2,1)$.

$\overrightarrow{AO} = [O - A] = [(0,0,0) - (0,1,0)] = (0,-1,0)$.

Aplicando la fórmula al punto O y a la recta r:

$$d(O,r) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|-k+i|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|i-k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(O,r) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ u.}}$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r es el siguiente: $\alpha \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $O(0,0,0)$ es el que satisface

BY NC SA

su ecuación:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \equiv 2y+3z+D=0\\ O(0,0,0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \beta \equiv x+2y+z=0.$$

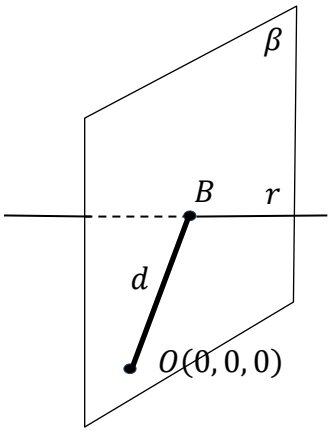
El punto B, intersección de la recta r con el plano β es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{matrix}\beta \equiv x+2y+z=0\\ r \equiv \begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases}\end{matrix}\right\} \begin{matrix} x+2y+z=0 \\ -2x+y=1 \\ x-z=0 \end{matrix} \Rightarrow x=z \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+x=0 \\ -2x+y=1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+2y=0 \\ -2x+y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3};\ -2x+\frac{1}{3}=1;\ -6x+1=3;\ -6x=2;$$

$$3x=-1;\ \ x=-\frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

La distancia pedida del punto O a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos O y B, o sea el módulo de $|\overrightarrow{OB}|$:



$$d(O,r)=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(O,r)=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u.}$$

BY NC SA

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$:

$a)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta r.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta r.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de r son $P(1,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,3,1)$.

$\overrightarrow{OP} = [(1,-1,2) - (0,0,0)] = (1,-1,2)$.

El plano π que contiene al origen y a r es el siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{OP};\ P\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$6(x-1) + (y+1) - 2(z-2) - 3(z-2) + (x-1) - 4(y+1) = 0;$

$7(x-1) - 3(y+1) - 5(z-2) = 0;\ \ 7x - 7 - 3y - 3 - 5z + 10 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv 7x - 3y - 5z = 0.}}$$

$b)$ El haz de planos perpendiculares a r es el siguiente: $\alpha \equiv 2x + 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $O(0,0,0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \equiv 2x + 3y + z + D = 0 \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv 2x + 3y + z = 0.}}$$

BY NC SA

5º) Calcular el valor de $a \in R$ para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} & si\ \ x \neq 0 \\ a & si\ \ x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

Solución:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^x - sen\, x}{x^2} = \frac{0\cdot e^0 - sen\, 0}{0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot e^x + x\cdot e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0\cdot e^0 - \cos 0}{2\cdot 0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1\cdot e^x + x\cdot e^x + sen\, x}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x + x\cdot e^x + sen\, x}{2} = \frac{2e^0 + 0\cdot e^0 + sen\, 0}{2} = \frac{2+0+0}{2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow a = 1.$$

$$\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = 0\ para\ el\ valor\ a = 1.}$$

BY NC SA

6º) Dada la función $f(x)=|x+1|+|x-2|$:

$a)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.

$b)$ Calcular el intervalo donde la función permanece constante.

Solución:

La función $f(x)=|x+1|+|x-2|$ puede redefinirse de la forma siguiente:

$$|x+1| \Rightarrow x+1=0;\ \ x=-1 \Rightarrow |x+1|=\begin{cases}-x-1 & si\ \ x\leq -1\\ x+1 & si\ \ x>-1\end{cases}.$$

$$|x-2| \Rightarrow x-2=0;\ \ x=2 \Rightarrow |x-2|=\begin{cases}-x+2 & si\ \ x\leq 2\\ x-2 & si\ \ x>2\end{cases}.$$

$$|x+1| \Rightarrow \quad \overset{-x-1}{\qquad\qquad} \Big| \overset{x+1}{\qquad\qquad}$$

$$|x-2| \Rightarrow \quad \overset{-x+2}{\qquad\qquad} \Big| \overset{x-2}{\qquad\qquad}$$

$$|x-1|+|x-2| \Rightarrow \quad \overset{-2x+1}{\qquad} \Big| \overset{3}{\qquad} \Big| \overset{2x-1}{\qquad}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1 \qquad\quad 2$$

$$f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1 & si\ \ x<-1\\ 3 & si\ \ -1\leq x\leq 2.\\ 2x-1 & si\ \ x>2\end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto quizás para $x=-1$ y $x=2$ cuya continuidad es dudosa; se estudian ambos casos a continuación.

$$x=-1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} 3=3=f(-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

$$x=2 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 3=3=f(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x=2$

La función $f(x)$ es continua en R.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x=-1$ y $x=2$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales en dicho punto.

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & si\ \ x<-1\\ 0 & si\ \ -1\leq x\leq 2.\\ 2 & si\ \ x>2\end{cases}$$

Para $x=-1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}f'(-1^-)=-2\\ f'(-1^+)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)\neq f'(-1^+) \Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x=-1$.

Para $x = 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} f'(2^-) = 0 \\ f'(2^+) = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x = 2$.

$$\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{-1, 2\}.}$$

$b)$ De la explicación del apartado anterior se deduce que:

$$\boldsymbol{La\ funcion\ f(x)\ permanece\ constante\ en\ [-1, 2].}$$

BY NC SA

7º) Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1)\cdot e^{-x}$.

Solución:

Sea la función $f(x)$. Se cumple que $f(x) = \int (2x+1)\cdot e^{-x}\cdot dx$.

Procediendo por el método "por partes":

$$f(x) = \int (2x+1)\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x+1 = u \rightarrow du = 2\cdot dx \\ e^{-x}\cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)\cdot(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\cdot(2\cdot dx) = -(2x+1)\cdot e^{-x} + 2\cdot\int e^{-x}\cdot dx =$$

$$= -(2x+1)\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-x} + C = -e^{-x}\cdot(2x+1+2) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}\cdot(2x+3) + C.$$

Por pasar por el origen de coordenadas:

$$f(0) = 0 \Rightarrow -e^{-0}\cdot(2\cdot 0+3) + C = 0;\ -3 + C = 0 \Rightarrow C = 3.$$

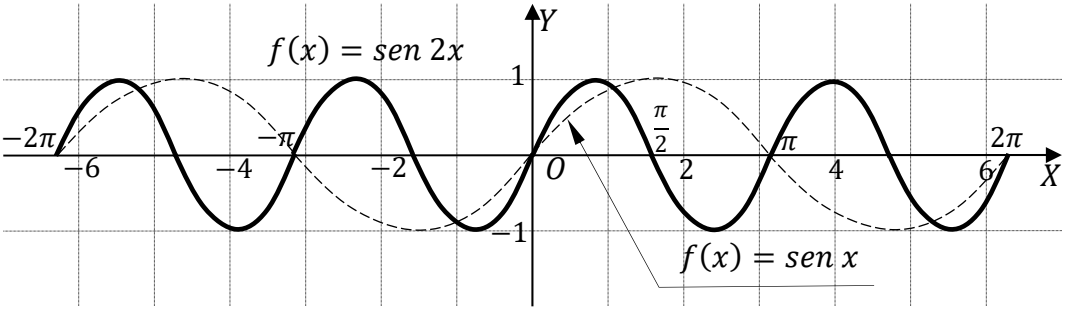
$$\underline{\boldsymbol{f(x) = -e^{-x}\cdot(2x+3)+3.}}$$

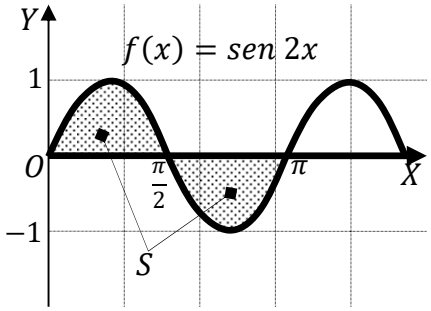
BY NC SA

8º) Calcular el área encerrada por la función $f(x) = sen\ 2x$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

Conviene recordar cómo es la función $f(x) = sen\ 2x$ y su relación con la función $f(x) = sen\ x$.





De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ 2x \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot 2 \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x = t \\ 2 \cdot dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = \int_0^{\pi} sen\ t \cdot dt =$$

$$[-\cos t]_0^{\pi} = [\cos t]_{\pi}^0 =$$

$$= \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 2\ u^2}}.$$

BY NC SA

9º) En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celíaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además, el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ Tenga solo una de las dos alergias.

$b)$ Sea celíaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa.

Solución:

$$Datos:\ P(C) = 0{,}10;\ \ P(L) = 0{,}15;\ \ P(C \cup L) = 0{,}20.$$

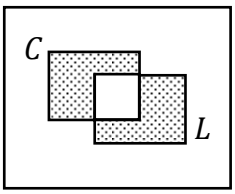
$a)$ $\quad P(C \cup L) = P(C) + P(L) - P(C \cap L) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(C \cap L) = P(C) + P(L) - P(C \cup L) =$$

$$= 0{,}15 + 0{,}10 - 0{,}20 = 0{,}25 - 0{,}20 = 0{,}05.$$

$$P(C\ o\ L) = P(C \cup L) - P(C \cap L) = 0{,}20 - 0{,}05 \Rightarrow$$

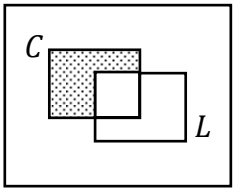
$$\underline{\boldsymbol{P(C\ o\ L) = 0{,}15.}}$$



$P(A\ o\ C) = 1 - P(A \cap B)$

$b)\ P(C/\overline{L}) = \frac{P(C \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(C) - P(C \cap L)}{1 - P(L)} = \frac{0{,}10 - 0{,}05}{1 - 0{,}15} =$

$$= \frac{0{,}05}{0{,}85} = \underline{0{,}0588.}$$



$P(C \cap \overline{L}) = P(C) - P(C \cap L)$

BY NC SA

10º) Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde a todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien:

$a)$ Cinco preguntas. $b)$ Alguna pregunta.

$c)$ Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10;\ \ p = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ \ q = 1 - 0{,}0{,}25 = 0{,}75. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$a)\ r = 5 \Rightarrow P(5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5 = \frac{10!}{(10-5)\cdot 5!} \cdot 0{,}0010 \cdot 0{,}2373 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \cdot 0{,}00023 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 0{,}00023 = \underline{0{,}0584}.$$

$b)$ Utilizando la probabilidad del suceso contrario: la probabilidad de que conteste bien alguna pregunta es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que conteste mal las diez.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0563 = \underline{0{,}9437}.$$

$c)$ Cuando se quiere aproximar una distribución binomial a otra normal tiene que cumplirse que $\begin{cases} n \cdot p > 5 \\ n \cdot q > 5 \end{cases}$.

Distribución normal: $X = (\mu, \sigma)$.

Distribución binomial: $X'\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)$.

$$n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5 < 5;\ \ n \cdot q = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}5 > 5$$

$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\mu = 2{,}5}. \qquad \sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \Rightarrow \underline{\sigma = \frac{\sqrt{30}}{4} \cong 1{,}37}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2.

$b)$ Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2º) Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$, según los valores reales del parámetro λ.

3º) Dados los puntos $A(0,0,2)$ y $B(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$:

$a)$ Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

5º) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$:

$a)$ Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$.

$b)$ Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

6º) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - L(x^2 + 1)$.

7º) Calcular la integral $I = \int \frac{1}{x^3 - x} \cdot dx$.

BY NC SA

8º) Hallar el parámetro positivo $a \in R$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3.

9º) El 50 % de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running?

c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"?

10º) El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar, ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2.

$b)$ Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución

$a)$ $\quad A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0;$$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$; $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\,(A - \lambda I) = 2.}$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\,(A - \lambda I) = 1.}$$

$b)$ Para $\lambda = 2 \Rightarrow A \cdot X = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x - y = 0.$$ Sistema compatible indeterminado.

Haciendo $y = \mu \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Solución: x = y = \mu, \forall \mu \in R.}$$

BY NC SA

2º) Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x+y-2az=a \\ ax-y+z=0 \\ y-az=-1 \end{cases}$, según los valores reales del parámetro λ.

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2a & a \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix}=4a+2a^2-4+a^2=0;\ \ 3a^2+4a-4=0;$$

$$a=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm8}{6}=\frac{-2\pm4}{3}\Rightarrow a_1=-2, a_2=\frac{2}{3}.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq 2/3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4+4-2=6\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=\frac{2}{3}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 4 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a=-2 \\ a=2/3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

3º) Dados los puntos $A(0,0,2)$ y $B(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

Solución

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$

Un punto genérico de r es $P(1,\lambda,\lambda)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,0) - (0,0,2)] = (1,1,-2).$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(1,\lambda,\lambda) - (0,0,2)] = (1,\lambda,\lambda-2).$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (1,1,-2) \cdot (1,\lambda,\lambda-2) = 0;\ \ 1 + \lambda - 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 5.$

$$\boldsymbol{El\ punto\ pedido\ es\ P(1,5,5).}$$

BY NC SA

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$:

$a)$ Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución

$a)$ La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow y = \lambda;\ \ x = 2 - 2\lambda;\ \ z = -1 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, 0, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, -2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 3, -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 3, -1) - (2, 0, -1)] = (-1, 3, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

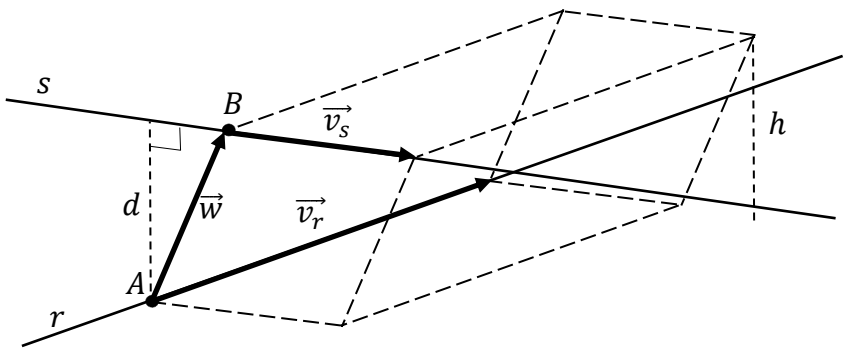
$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 2 + 12 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cruzan.

$b)$ Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\vec{w} = (-1, 2, 0)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



BY NC SA

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{|-4|}{|2i-4j+2k+2k+2i+4j|} = \frac{4}{|4i+4k|} = \frac{1}{|i+k|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2} u.}$$

BY NC SA

5º) Dada la función $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$:

a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución

a) Por tratarse de una función racional, su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$1-x^2=0;\ x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}$.

Teniendo en cuanta que $f(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=\frac{-x^3}{1-x^2}=-\frac{x^3}{1-x^2}=-f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores que toma la función cuando la variable tiende a más infinito y menos infinito.

$y=k=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\infty \Rightarrow$ *No tiene síntotas horizontales*.

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$1-x^2=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$.

Son asíntotas verticales las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=-1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=0.$$

Asíntota oblicua: $y=-x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(1-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Para estudiar el signo de la derivada (crecimiento y decrecimiento) se tiene en cuenta que $\frac{x^2}{(1-x^2)^2}>0, \forall x\in D(f)$, el signo de $f'(x)$ es el que tenga $3-x^2$:

$3-x^2=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}$.

Las raíces halladas dividen al dominio de la función en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3}),(-\sqrt{3},\sqrt{3})\ y\ (\sqrt{3},+\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=2\in(\sqrt{3},+\infty)$:

$$x=2 \Rightarrow f'(2)=\frac{2^2\cdot(3-2^2)}{(1-2^2)^2}=\frac{-4}{9}<0 \Rightarrow Decrec.$$

BY NC SA

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right).}$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0;\ \ x^2(3-x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)^2 - x^2(3-x^2)\cdot[2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)]}{(1-x^2)^4} = \frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)+4x\cdot x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x-6x^3-4x^3+4x^5+12x^3-4x^5}{(1-x^2)^3} = \frac{6x+2x^3}{(1-x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

$$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}\cdot(3+3)}{(1-3)^3} = \frac{-22\sqrt{3}}{-8} > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\sqrt{3}.$$

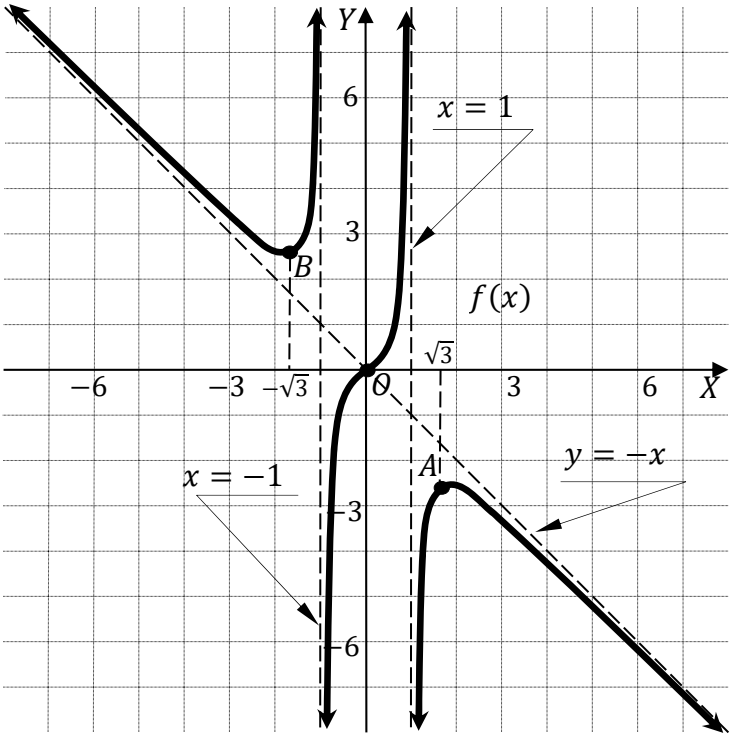
Por simetría con respecto al origen: $Máximo\ relativo\ para\ x = \sqrt{3}$.

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{-2} \cong -2{,}6 \Rightarrow Máx. \Rightarrow A\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \approx A(1{,}7; -2{,}6).$$

Por simetría: $Mín. \Rightarrow B\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \approx B(-1{,}7; 2{,}6).$

$$f''(0) = \frac{2\cdot 0\cdot(3+0^2)}{(1-0^2)^3} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ (punto\ inflexión).$$

$b)$



La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.

6º) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - L(x^2+1)$.

Solución

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot[(x^2+1)-x(x-1)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1-x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0;\ \ 2(x^2-1) = 0;\ \ x^2-1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f(-1) = -1 - L[(-1)^2+1] = -1 - L2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P.I.: A(-1, -1-L2).}$$

$$f(1) = 1 - L(1^2+1) = 1 - L2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P.I.: B(1, 1-L2).}$$

BY NC SA

7º) Calcular la integral $I = \int \frac{1}{x^3-x} \cdot dx$.

Solución

$$I = \int \frac{1}{x^3-x} \cdot dx = \int \frac{1}{x(x^2-1)} \cdot dx = \int \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x+(-A)}{x(x+1)(x-1)} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B+C=0 \\ -B+C=0 \\ -A=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=-1;$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} B+C=1 \\ -B+C=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2C=1;\ C=\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{2}.$$

$$I = \int \frac{1}{x^3-x} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right) dx = -L|x| + \frac{1}{2}L|x+1| + \frac{1}{2}L|x-1| + C =$$

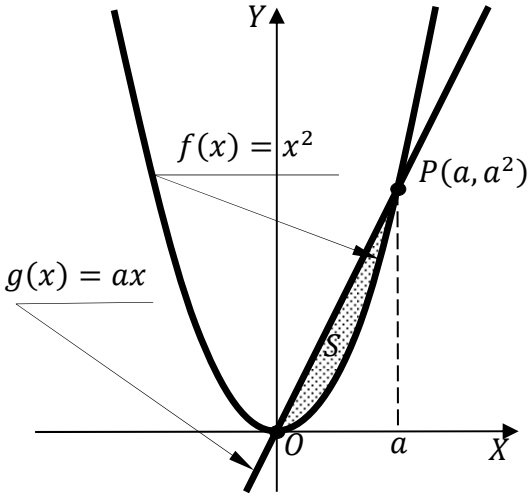
$$= \frac{1}{2} \cdot [L|x+1| + L|x-1|] - L|x| + C = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-1| - L|x| + C.$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{1}{x^3-x} dx = L\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + C.}$$

BY NC SA

8º) Hallar el parámetro positivo $a \in R$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3.

Solución



Los puntos de corte de ambas funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = ax;\ \ x^2 - ax = 0;$$

$$x(x - a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = a.$$

Los puntos de corte son el origen de coordenadas y el punto $P(x, x^2)$, que también puede expresarse como $P(a, a^2)$.

De la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_0^a [g(x) - f(x)] \cdot dx = \frac{4}{3};\ \ \int_0^a (ax - x^2) \cdot dx = \frac{4}{3};\ \ = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3};$$

$$\left(\frac{a \cdot a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3};\ \ \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3};\ \ 3a^3 - 2a^3 = 8;\ \ a^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a = 2\ u.}$$

BY NC SA

9º) El 50 % de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

$a)$ La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

$b)$ Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"?

Solución

Llamamos: $R \rightarrow Runnnig\ y\ B \rightarrow Bicicleta.$

$Datos: P(R) = 0{,}5;\ \ P(B) = 0{,}3;\ \ P(R \cup B) = 0{,}7.$

$a)$

$$P = P\left(\overline{R \cup B}\right) = 1 - P(R \cup B) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3 = 30\ \%}.$$

$b)$ $$P = P(R/B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{P(R)+P(B)-P(R \cup B)}{P(B)} = \frac{0{,}5+0{,}3-0{,}7}{0{,}3} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}3333}.$$

$c)$ Dos sucesos R y B son independientes si $P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$.

$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}5 \cdot 0{,}3 \neq 0{,}1 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes.}}$$

BY NC SA

10º) El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar, ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm?

Solución

$a)\ Datos:\ \mu = 2{,}5;\ \ \sigma = 0{,}2.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(2{,}5; 0{,}2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2{,}5}{0{,}2}$.

Nos piden elegir el 10 % de las más grandes, o sea, eliminar el 90 % de las cerezas más pequeñas.

$P = P(X < 0{,}9) = P\left(Z < \frac{X-2{,}5}{0{,}2}\right) = 0{,}9.$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ al valor 0,9 le corresponde, aproximadamente, 1,28:

$\frac{X-2{,}5}{0{,}2} = 1{,}28;\ \ X - 2{,}5 = 0{,}2 \cdot 1{,}28;\ \ X = 2{,}5 + 0{,}256 = 2{,}756.$

Las cerezas elegidas deben tener un diámetro igual o mayor que 2,756 cm

.

$b)\ P = P(2{,}2 < X < 2{,}8) = P\left(\frac{2{,}2-2{,}5}{0{,}2} < Z < \frac{2{,}8-2{,}5}{0{,}2}\right) = P\left(\frac{-0{,}3}{0{,}2} < Z < \frac{0{,}3}{0{,}2}\right) =$

$= P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5) =$

$= P(Z < 1{,}5) - [1 - P(Z < 1{,}5)] = P(Z < 1{,}5) - 1 + P(Z < 1{,}5) =$

$= 2 \cdot P(Z < 1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 1{,}8664 - 1 = 0{,}8664.$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA USC	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 8 preguntas, de las que puede responder un máximo de 5, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 5 primeras respondidas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X siendo las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases}x+(m-3)y+mz=1\\(m-3)y+(m^2-m)z=1\\x+m^2z=0\end{cases}$ según los valores de m.

3º) a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen\,x}$ y $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot Lx)$, donde Lx es el logaritmo neperiano de x.

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que $f(0)=0, f(3)=0, f''(x)>0$ en el intervalo $(0,1), f''(x)<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4º) Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

5º) a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-1\\z=0\end{cases}, \lambda\in R$.

b) Calcule los dos puntos de la recta $s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}, \lambda\in R$, cuya distancia al plano de ecuación $\pi\equiv x-1=0$ es igual a 2.

BY NC SA

6º) $a)$ Halle los valores de $k\ y\ de\ m$ que hacen que los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

$b)$ Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$, estudie su posición relativa. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7º) $a)$ Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}\ y\ P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

$b)$ En una cierta ciudad, el 21 % de las personas leen ciencia ficción, el 63 % leen novela negra, y el 17 % leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

1.- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

2.- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8º) $a)$ Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

$b)$ Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X siendo las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Solución:

$$A\cdot B\cdot(X-I)=C;\ \ A\cdot B\cdot X-AB\cdot I=C;\ \ A\cdot B\cdot X=C+A\cdot B;$$

$$(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B);$$

$$I\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I\Rightarrow \underline{X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $A\cdot B$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A\cdot B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&4&6&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\4&4&6&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-4F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&4&-2&1&0&-4\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-4F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&-4&-4\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&-4&-4\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_3\to-\tfrac{1}{2}F_3\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2&2\end{array}\right)\Rightarrow(A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}.$$

$$X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&2\\-2&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}}}.$$

BY NC SA

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases} x+(m-3)y+mz=1 \\ (m-3)y+(m^2-m)z=1 \\ x+m^2z=0 \end{cases}$ según los valores de m.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix}=$$

$$=m^2(m-3)+m(m-1)(m-3)-m(m-3)=0;$$

$$=(m-3)\cdot[m^2+m(m-1)-m]=(m-3)\cdot(m^2+m^2-m-m)=0;$$

$$(m-3)(2m^2-2m)=0;\ \ 2m(m-3)(m-1)=0\Rightarrow m_1=0, m_2=1, m_3=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m\neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=0\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_2,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-3+3=0\Rightarrow Rang.\ A'=2.$$

$$Para\ m=1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2+2=0\Rightarrow Rang.A'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ m=3\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}=3-6-9=-12\neq 0\Rightarrow Rang.\ A'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ m=3\Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

3º) $a)$ Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen\,x}$ y $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot Lx)$, donde Lx es el logaritmo neperiano de x.

$b)$ Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que $f(0)=0, f(3)=0, f''(x)>0$ en el intervalo $(0,1), f''(x)<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen\,x}=\frac{0\cdot\cos 0}{sen\,0}=\frac{0\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\cos x-x\cdot sen\,x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos 0-0\cdot sen\,0}{\cos 0}=\frac{1-0\cdot 0}{1}\Rightarrow$$

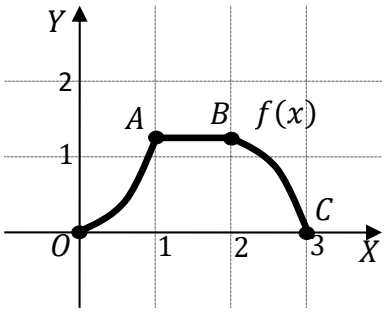
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen\,x}=1.}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot Lx)=0\cdot(-\infty)\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\frac{L0^+}{\frac{1}{0}}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}x\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot Lx)=0.}$$

$b)$ Para la realización de la gráfica de $f(x)$ se ha tenido en cuenta que una función es convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es mayor que cero, intervalo $(0,1)$, y que una función es cóncava $(\cap)$ cuando su segunda derivada es menor que cero, intervalo $(2,3)$, así como, que la función es constante en el intervalo $(1,2)$.



BY NC SA

4º) Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Solución:

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int (2x - e^{-x}) \cdot dx = 2 \cdot \int x \cdot dx - \int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - A = x^2 - A. \qquad (*)$$

$$A = \int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x = t \\ dx = -dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\int e^t \cdot dt = -e^t + K_1 = -e^{-x} + K_1.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$f'(x) = x^2 - (-e^{-x} + K_1) \Rightarrow f'(x) = x^2 + e^{-x} + K_1.$$

La pendiente de la recta $y = 3x - 1$ es $m = 3$.

Sabiendo que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = f'(0) = 3 \Rightarrow 0^2 + e^{-0} + K_1 = 3; \;\; 0 + 1 + K_1 = 3 \Rightarrow K_1 = 2.$$

La función derivada resulta: $f'(x) = x^2 + e^{-x} + 2$.

El punto de tangencia es: $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow T(0, -1)$, teniendo en cuenta que el punto de tangencia pertenece a la función $f(x)$ y a la tangente $y = 3x - 1$.

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^2 + e^{-x} + 2) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x + K_2.$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1$:

$$f(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + 2 \cdot 0 + K_2 = -1; \;\; 0 - 1 + 0 + K_2 = -1 \Rightarrow K_2 = 0.$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x.}$$

BY NC SA

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in R.$

$b)$ Calcule los dos puntos de la recta $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in R$, cuya distancia al plano de ecuación $\pi \equiv x - 1 = 0$ es igual a 2.

Solución:

$a)$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,0,0)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a r tienen por vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta; su expresión general es de la forma: $\beta \equiv x + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $P(1,-1,0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv x + D = 0 \\ P(1,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 + D = 0;\ \ D = -1 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - 1 = 0.}$$

$b)$ Un punto genérico de la recta $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ es $Q(\lambda,\lambda,\lambda)$.

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $Q(\lambda,\lambda,\lambda)$ y al plano $\pi \equiv x - 1 = 0$:

$$d(Q,\pi) = \frac{|1\cdot\lambda-1|}{\sqrt{1^2}} = 2;\ \ |\lambda - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 2 \rightarrow \lambda_1 = 3 \\ -\lambda + 1 = 2 \rightarrow \lambda_2 = -1 \end{cases}.$$

Los puntos pedidos son $\boldsymbol{Q_1(3,3,3)\ y\ Q_2(-1,-1,-1).}$

BY NC SA

6º) $a)$ Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

$b)$ Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$, estudie su posición relativa. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes, o sea, que tengan proporcionales sus componentes.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2) - (k,3,m)] = (2-k,-3,2-m).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(k,2,0) - (k,3,m)] = (0,-1,-m).$$

$$\frac{2-k}{0} = \frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{k = 2.}$$

$$-3m = 2 - m;\ -2m = 2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = -1.}$$

$b)$ Un punto y un vector director de la recta r son $A(1,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,3,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-2,-3,-1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,2,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-2,-3,-1) - (1,-1,2)] = (-3,-2,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte expresamos las rectas por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases};\ s \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\delta \\ y = -3 + 2\delta. \\ z = -1 + 3\delta \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 + 2\lambda = -2 + 3\delta \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\delta \\ 2 + 2\lambda = -1 + 3\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\lambda - 3\delta = -3 \\ 3\lambda - 2\delta = -2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -4\lambda + 6\delta = 6 \\ 9\lambda - 6\delta = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\lambda = 0;\ \lambda = 0.$$

El punto de corte de las rectas r y s es $A(1,-1,2)$.

BY NC SA

7º) $a)$ Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

$b)$ En una cierta ciudad, el 21 % de las personas leen ciencia ficción, el 63 % leen novela negra, y el 17 % leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

1.- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

2.- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

Solución:

$a)$ Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$P(A) = P(A \cup B) - P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

Si los sucesos A y B son incompatibles: $\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{12}}$.

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - P(A) \cdot \frac{1}{4}$;

$4 = 12 \cdot P(A) + 3 - 3 \cdot P(A)$; $9 \cdot P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{9}$.

Si los sucesos A y B son independientes: $\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{9}}$.

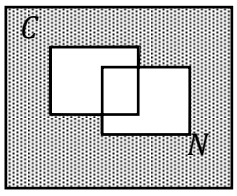
$b)$ $Datos: P(C) = 0{,}21$; $P(N) = 0{,}63$; $P(C \cap N) = 0{,}17$.

1.-

$$P = P(N/C) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}17}{0{,}21} = 0{,}8095.$$

2.-

$$P = P\left(\overline{C} \cap \overline{N}\right) = 1 - P(C \cup N) =$$



$P(\overline{C} \cap \overline{N}) = 1 - P(C \cup N)$

$= 1 - [P(C) + P(N) - P(C \cap N)] = 1 - (0{,}21 + 0{,}63 - 0{,}17) =$

$= 1 - (0{,}84 - 0{,}17) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$.

8º) $a)$ Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

$b)$ Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 1;\ \sigma = 3.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(1, 3).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1}{3}$.

$$P = P(-2 \leq X \leq 7) = P\left(\frac{-2-1}{3} \leq Z \leq \frac{7-1}{3}\right) = P\left(\frac{-3}{3} \leq Z \leq \frac{6}{3}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 1) = 0{,}9772 - 1 + 0{,}8413 = 1{,}8185 - 1 = \underline{0{,}8185}.$$

$b)$ $X \to N(\mu, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{4}$.

$$P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(\frac{\mu-\alpha-\mu}{4} \leq Z \leq \frac{\mu+\alpha-\mu}{4}\right) = P\left(\frac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}8064.$$

$$P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0{,}8064;$$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1{,}8064;\ P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}9032$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,9032 le corresponde exactamente 1,3, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{4} = 1{,}3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{\alpha = 5{,}2.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 8 preguntas, de las que puede responder un máximo de 5, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 5 primeras respondidas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) $a)$ Obtenga la matriz antisimétrica de A de 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcula su inversa en caso de que exista. Nota: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A.

$b)$ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix}$, halle los valores b_{12} y b_{21} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B + A) = -1$.

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$ según los valores de m.

3º) $a)$ Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

$b)$ Halle los valores de $a\ y\ b$ que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leq 1 \\ ax^2 + bx & si\ \ x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4º) Calcule las siguientes integrales:

$a)\ I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx.$

$b)\ I = \int sen\, x \cdot sen\, (\cos x) \cdot dx.$

$c)\ I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx.$

$d)\ I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx.$

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

$b)$ Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6º) Estudie la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi \equiv ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros $k\ y\ a$. Luego, si es posible, diga cuando r es perpendicular a π.

BY NC SA

7º) $a)$ En una famosa biblioteca, el 70 % de los libros son novelas, el 40 % son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60 % de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

$b)$ En un cierto país, el 80 % de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de estos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos uno.

8º) $a)$ Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

$b)$ Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0{,}2128$.

8º) $a)$ Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

$b)$ Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) $a)$ Obtenga la matriz antisimétrica de A de 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcula su inversa en caso de que exista. Nota: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A.

$b)$ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix}$, halle los valores b_{12} y b_{21} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B + A) = -1$.

Solución:

$a)$

Una matriz antisimétrica es toda matriz cuadrada cuya traspuesta es igual a su negativa, es decir: M es antisimétrica si $M^t = -M$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta que la matriz pedida es, precisamente, la matriz $\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

La inversa de A, que existe: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}}$$

$b)$ Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{vmatrix} = -b_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b_{12} = 0.}}$$

$$|A^{-1}B + A| = -1 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1;$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & -b_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1; \; \begin{vmatrix} -1 & 1 - b_{21} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \; 1 - b_{21} = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b_{21} = 2.}}$$

BY NC SA

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases}(m+1)x+my+z=0\\ y+(m-2)z=-2\\ (m+1)x+my+(m-1)z=-3\end{cases}$ según los valores de m.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}m+1 & m & 1\\ 0 & 1 & m-2\\ m+1 & m & m-1\end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix}m+1 & m & 1 & 0\\ 0 & 1 & m-2 & -2\\ m+1 & m & m-1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}m+1 & m & 1\\ 0 & 1 & m-2\\ m+1 & m & m-1\end{vmatrix}=$$

$$=(m+1)(m-1)+m(m-2)(m+1)-(m+1)-m(m-2)(m+1)=0;$$

$$=(m+1)(m-1)-(m+1)=0;\ \ (m+1)[(m-1)-1]=0;$$

$$(m+1)(m-2)=0\Rightarrow m_1=-1, m_2=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases}m\neq -1\\ m\neq 2\end{cases}\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=-1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2+C_3=C_4\}\Rightarrow Rang.\ A'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ m=-1\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ m=2\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_2,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-4+4+3=3\neq 0\Rightarrow Rang.A'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ m=2\Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

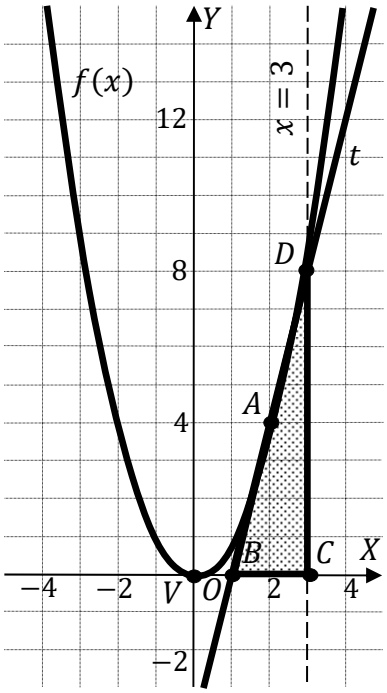
BY NC SA

3º) $a)$ Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

$b)$ Halle los valores de $a\ y\ b$ que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \le 1 \\ ax^2 + bx & si\ \ x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

Solución:

$a)$



La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(2) = 2 \cdot 2 \Rightarrow m = 4.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow A(2,4).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(2,4)$ con $m = 4$:

$$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) = 4x - 8.$$

$$\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 4x - y - 4 = 0.}$$

El punto de corte de la tangente con el eje X se obtiene para $y = 0$:

$$4x - 0 - 4 = 0;\ \ 4x - 4 = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow B(1,0).$$

Teniendo en cuenta que la base del triángulo rectángulo es 2, es extremo del cateto base es $C(3,0)$.

El otro vértice del triángulo, D, se obtiene como intersección de la tangente y la recta $x = 3$:

$$\left.\begin{matrix} 4x - y - 4 = 0 \\ x = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12 - y - 4 = 0;\ \ y = 8 \Rightarrow D(3,8).$$

$b)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx) = a + b = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b = 1. \quad (1)$$

BY NC SA

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x < 1 \\ 2ax + b \ si \ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 1 \\ 2a + b \ si \ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a + b = 0. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{matrix}\right\} \ \left.\begin{matrix} -a - b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = -1;\ \ b = 2.}}$$

BY NC SA

4º) Calcule las siguientes integrales:

$a)\ I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx.$ $\quad b)\ I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx.$

$c)\ I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx.$ $\quad d)\ I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx.$

Solución:

$a)\ I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \sqrt{t} \cdot dt = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt =$

$= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot t \cdot \sqrt{t} + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1} + C.}}$$

$b)\ I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ sen\, x \cdot dx = -dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\int sen\, t \cdot dt = \cos t + C$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx = \cos(\cos x) + C.}}$$

$c)\ I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ sen\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot (-\cos x) - \int -cos\, x \cdot 2x \cdot\ dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \cdot dx =$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2B = I_1.\ \ (*)$

$$I_1 = \int x \cdot cos\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ cos\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx \Rightarrow I_1 = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x.$

Sustituyendo en (*) el valor de I_1:

$I = -x^2 \cos x + 2\,(x \cdot senx + \cos x) = -x^2 \cos x + 2\,x \cdot sen\, x + 2 \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx = (2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot sen\, x + C.}}$$

$d)\ I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} =$

$= \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -A = 1;\ A = -1;\ B = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx =$

$= -L|x-1| + L|x-2| + C \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = L\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.}}$$

BY NC SA

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

$b)$ Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de r son $A(-1,-2,-2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3,2,1)$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (-1,-2,-2)] = (1,3,2)$.

La ecuación general del plano π es el siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$4x + (y-1) + 9z - 2z - 3x - 6(y-1) = 0;\ \ 4x - 5(y-1) + 7z = 0;$

$$4x - 5y + 5 + 7z = 0 \Rightarrow$$

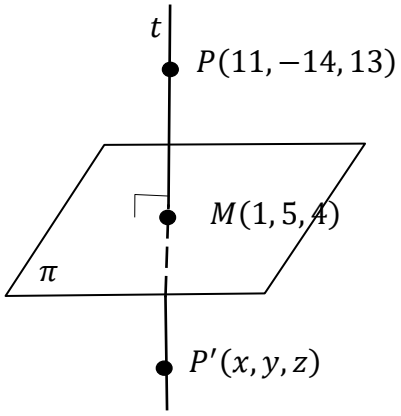
$$\boldsymbol{\pi \equiv 4x - 5y + 7z + 5 = 0.}$$

$b)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$ es $\vec{n} = (3,-8,7)$.

La recta t, perpendicular a π y que contiene al punto $P(11,-14,13)$ tiene la siguiente expresión por unas ecuaciones paramétricas: $t \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\delta \\ y = -14 - 8\delta \\ z = 13 + 7\delta \end{cases}$.

El punto M, intersección de la recta t con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x - 8y + 7z = -8 \\ t \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\delta \\ y = -14 - 8\delta \\ z = 13 + 7\delta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow 3(11 + 3\delta) - 8(-14 - 8\delta) + 7(13 + 7\delta) = -8;$

$33 + 9\delta + 112 + 64\delta + 91 + 49\delta = -8;$

$122\delta + 236 = -8;\ \ 122\delta = -244 \Rightarrow \delta = -2 \Rightarrow$

$\left.\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(5,2,-1).$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+11}{2} = 5 \Rightarrow x = 10 - 11 = -1 \\ \frac{y-14}{2} = 2 \Rightarrow y = 4 + 14 = 18 \\ \frac{z+13}{2} = -1 \Rightarrow z = -2 - 13 = -15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P'(-1, 18, -15\ ).}$$

BY NC SA

6º) Estudie la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi \equiv ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros $k\ y\ a$. Luego, si es posible, diga cuando r es perpendicular a π.

Solución:

Vector director de r: $\overrightarrow{v_r} = (1, k, 3)$. Vector normal de π: $\vec{n} = (a, 4, 3a)$.

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o coincidentes, según que el plano contenga a la recta, o no.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, k, 3) \cdot (a, 4, 3a) = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 0;\ \ 5a + 2k = 0.$$

$$\underline{Si\ 5a + 2k \neq 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ secantes}.$$

$$\underline{Si\ 5a + 2k = 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos\ o\ el\ plano\ \pi\ contiene\ a\ r}.$$

Para diferenciar el caso se tiene en cuenta que el plano π contiene a la recta r cuando contiene a uno de sus puntos.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + k\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$.

Un punto de r es, por ejemplo: $\lambda = 0 \Rightarrow P(-1, 1, 0)$.

El plano π contiene al punto P cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv ax + 4y + 3az = -2 \\ P(-1, 1, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a + 4 + 0 = -2 \Rightarrow a = 6.$$

Resumen:

$$\underline{\boldsymbol{Si\ 5a + 2k \neq 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ secantes.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ 5a + 2k = 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 6 \rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos \\ a = 6 \rightarrow La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi \end{cases}}}$$

La recta r es perpendicular al plano π cuando los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son linealmente dependientes, es decir: sus componentes son proporcionales:

$$\frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ \perp\ para\ a \cdot k = 4.}}$$

BY NC SA

7º) $a)$ En una famosa biblioteca, el 70 % de los libros son novelas, el 40 % son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60 % de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

$b)$ En un cierto país, el 80 % de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de estos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos uno.

Solución:

$a)$ La forma más adecuada para hacer este ejercicio es mediante una tabla de contingencia, considerando "clásicos" a los libros editados antes del siglo XIX y "no clásicos" a los editados después del siglo XIX, pudiendo ser, en ambos casos, novela o no novela. Si el 40 % son libros clásicos y el 60 % de los clásicos son novelas, se deduce que el $(0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24)$ 24 % son novelas clásicas.

La tabla de contingencia que se deduce es la siguiente:

	Clásico	*No clásico*	*Total*
Novela	24	46	70
No novela	16	14	30
Total	40	60	100

Aplicando ahora la regla de Laplace a las dos preguntas que se hacen:

$$P_1 = \frac{(no\ sea\ novela\ pero\ si\ clásico)}{Total\ de\ libros} = \frac{16}{100} = \underline{0{,}16}.$$

$$P_2 = \frac{(novela\ clásica)}{Total\ de\ novelas} = \frac{24}{70} = \underline{0{,}3429}.$$

$b)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 3;\ \ p = 0{,}2;\ \ q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no se resuelva ninguno de los tres delitos:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^3 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}512 = \underline{0{,}488}.$$

BY NC SA

8º) $a)$ Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

$b)$ Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - a < X < 25 + a) = 0{,}2128$.

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 60;\ \ p = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ \ q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}25 = 15 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}75 = 45 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}25 = 15.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}354.$$

$$X = B(60;\ 0{,}25) \approx N(15;\ 3{,}354).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-15}{3{,}354}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X \geq 16) = P\left(Z \geq \frac{15{,}5-15}{3{,}354}\right) = P\left(Z \geq \frac{0{,}5}{3{,}354}\right) \cong P(Z \geq 0{,}15) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}15) = 1 - 0{,}5596 = \underline{0{,}4404}.$$

$b)$ $Datos:\ \mu = 25;\ \ \sigma = 2.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(25, 2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{2}$.

$$P = P(X < 24) = P\left(Z < \frac{24-25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{-1}{2}\right) = P(Z < -0{,}5) =$$

$$= P(Z \geq 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \underline{0{,}3085}.$$

$$P(25 - a < X < 25 + a) = P\left(\frac{25-\alpha-25}{2} \leq Z \leq \frac{25+\alpha-25}{2}\right) = P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}2128.$$

$$P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0{,}2128;$$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}2128;\ \ P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}6064$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,6064 le corresponde exactamente 0,27, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}27 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = 0{,}54.}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Dada la curva $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$.

$a)$ Halla los puntos de la curva en los que recta tangente a ésta pase por $O(0,0)$.

$b)$ Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

2º) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = x \cdot sen\, x$ y el eje de las abscisas en el intervalo que va de $x = 0$ al menor valor $b > 0$ tal que $g(b) = 0$.

3º) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

$a)$ $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+ax+1} - (3x-1)\right] = 2.$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x = e.$

4º) Estudia el sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a, y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determina para que valores de a la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

$b)$ Resuelve, para $a = 0$, la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

6º) Determina los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$ para que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ sea solución del sistema $\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$.

7º) Halla la ecuación de una recta r, paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

BY NC SA

8º) Determina los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que el plano $\pi \equiv ax + y + z = b$ contenga a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

9º) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5 %, 12 % y del 18 %, respectivamente. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

$a)$ Finalice sus estudios.

$b)$ Estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

10º) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que: $P(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0{,}5934$ (véase la tabla simplificada de la normal tipificada).

BY NC SA

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Dada la curva $f(x)=\frac{1}{4}x^2+4x+4$.

$a)$ Halla los puntos de la curva en los que recta tangente a ésta pase por $O(0,0)$.

$b)$ Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

Solución

$a)$ Los puntos de la curva tienen por expresión general $P\left(a,\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)$.

$$\overrightarrow{OP}=\left(a,\frac{1}{4}a^2+4a+4\right)\Rightarrow m=\frac{\frac{1}{4}a^2+4a+4}{a}=\frac{1}{4}a+4+\frac{4}{a}.$$

Por otra parte, la pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1}{2}x+4. \qquad m=f'(a)=\frac{1}{2}a+4.$$

$$\frac{1}{4}a+4+\frac{4}{a}=\frac{1}{2}a+4;\ \frac{1}{4}a+\frac{4}{a}=\frac{1}{2}a;\ a^2+16=2a^2;\ a^2=16\Rightarrow\begin{cases}m_1=-4\\m_2=4\end{cases}.$$

$$m_1=-4\Rightarrow P_1(-4,4-16+4)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P_1(-4,-8).}$$

$$m_2=4\Rightarrow P_2(4,4+16+4)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P_2(4,24).}$$

$b)$ La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $O(0,0)$ con las pendientes obtenidas es:

$$t_1\Rightarrow y-0=-4(x-0)=-4x\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{t_1\equiv 4x+y=0.}$$

$$t_2\Rightarrow y-0=4(x-0)=4x\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{t_2\equiv 4x-y=0.}$$

BY NC SA

2º) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = x \cdot sen\, x$ y el eje de las abscisas en el intervalo que va de $x = 0$ al menor valor $b > 0$ tal que $g(b) = 0$.

Solución

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$g(x) = 0 \Rightarrow x \cdot sen\, x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi, \forall k N.$

El menor valor de $b > 0, b \in N$ es $b = \pi$.

Se trata de hallar el área de la función $g(x) = x \cdot sen\, x$ entre los valores 0 y 1.

En el intervalo $(0, 1)$ todas las ordenadas de la función $g(x)$ son positivas, por lo cual la superficie a calcular es $S = \int_0^{\pi} g(x) \cdot dx = \int_0^{\pi} x \cdot sen\, x \cdot dx$.

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida de la función.

$$\int x \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ sen\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = -cos\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx = -x \cdot cos\, x + \int cos\, x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x.$$

$$S = \int_0^{\pi} x \cdot sen\, x \cdot dx = [-x \cdot \cos x + sen\, x]_0^{\pi} =$$

$$= (-\pi \cdot \cos \pi + sen\, \pi) - (-0 \cdot \cos 0 + sen\, 0) = -\pi \cdot (-1) + 0 - 0 = \pi.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \pi\, u^2}}.$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

3º) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]=2.$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e.$

Solución

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]=\infty-\infty\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+ax+1-\left(9x^2-6x+12\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+ax+1-9x^2+6x-12}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+6)x-11}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(a+6)x-11}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6-\frac{11}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}}{x}+3-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6-\frac{11}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+6-\frac{11}{x}}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{a+6-\frac{11}{\infty}}{\sqrt{9+\frac{a}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+3-\frac{1}{\infty}}=2;\ \frac{a+6-0}{\sqrt{9+0+0}+3-0}=2;$$

$$\frac{a+6}{\sqrt{9}+3}=2;\ \frac{a+6}{6}=2;\ a+6=12\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=6.}}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+a+1-1}{3x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-1}+\frac{a+1}{3x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a+1}{3x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{a+1}}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{a+1}}\right)^{x\cdot\frac{3x-1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{a+1}}\right)^{\frac{3x-1}{a+1}\cdot\frac{ax+x}{3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{a+1}}\right)^{\frac{3x-1}{a+1}}\right]^{\frac{ax+x}{3x-1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{a+1}}\right)^{\frac{3x-1}{a+1}}\right]^{\frac{ax+x}{3x-1}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+x}{3x-1}}=e\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+x}{3x-1}=1\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=3.}}$$

BY NC SA

4º) Estudia el sistema $\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+z=a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a, y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=a+a^3+1-a^2-a-a=0;$$

$a^3-a^2-a+1=0$. Resolviendo por Ruffini:

	1	−1	−1	1
1		1	0	−1
	1	0	−1	0
1		1	1	
	1	1	0	

$a_1=a_2=1;\ a_3=-1.$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_1\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

(Con un grado de libertad)

$$Para\ a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

(Con dos grados de libertad)

Resolvemos ahora en los casos de compatibilidad.

En primer lugar para $a\neq -1\ y\ a\neq 1$, que el sistema es compatible determinado. Resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-aF_1 \\ F_3 \to F_3-F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3-F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow y=1;\ z=1.$$

$x+y+az=a;\ x+1+a=a \Rightarrow x=-1.$

$$\boldsymbol{Solución: x=-1, y=1, z=1.}$$

BY NC SA

Para $a=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y-z=-1 \\ -x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x+y-z=-1 \\ x-y+z=-1 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x+y=-1+\lambda \\ x-y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=-2;\ \ x=-1;\ \ y=\lambda.$$

$$\boldsymbol{\underline{Solución: x=-1, y=\lambda, z=\lambda, \forall \lambda \in R.}}$$

Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado; y equivalente a la ecuación: $x+y+z=1$. Haciendo $y=\mu, z=\lambda$:

$$\boldsymbol{\underline{Solución: x=1-\mu-\lambda, y=\mu, z=\lambda, \forall \mu, \lambda \in R.}}$$

BY NC SA

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determina para que valores de a la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

$b)$ Resuelve, para $a = 0$, la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

Solución

$a)$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a + 6 - 2(2a+4) = 0;\ \ a + 6 = 4a + 8;$$

$3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{La\ matriz\ A \cdot B\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{-\frac{2}{3}\right\}.}$$

$b)$ $ABX = 3I;\ \ (A \cdot B) \cdot X = 3I;\ \ (A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot X = 3 \cdot (A \cdot B)^{-1} \cdot I;$

$I \cdot X = 3 \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow \underline{X = 3 \cdot (A \cdot B)^{-1}}.$

Para $a = 0 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad |A \cdot B| = -2.\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$X = 3 \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\underline{X = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.}}$$

BY NC SA

6º) Determina los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$ para que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ sea solución del sistema $\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$.

Solución

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{array}\right\}.$$

De lo anterior resulta el sistema: $\left.\begin{array}{c} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{array}\right\}$.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-36-36+48+48+72-18}{24-12+60+60-48-6} = \frac{168-90}{144-66} = \frac{78}{78} = 1.$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{78} = \frac{18-12-90+45-48+9}{78} = \frac{72-150}{78} = \frac{-78}{78} = -1.$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{78} = \frac{32-12+30+60-24-8}{78} = \frac{122-44}{78} = \frac{78}{78} = 1.$$

Solución: $a = 1,\ b = -1,\ c = 1.$

BY NC SA

7º) Halla la ecuación de una recta r, paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1, 0, 1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

Solución

El haz de planos, γ, paralelos a π, tiene por expresión $\gamma \equiv x + y + z + D = 0$. De los infinitos planos de haz γ, el plano β que contiene al punto $P(1, 0, 1)$ es el que satisface su ecuación: $\left.\begin{matrix} \gamma \equiv x + y + z + D = 0 \\ P(1, 0, 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 + 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \equiv x + y + z - 2 = 0$.

Un punto de β es $Q(0, 0, 2)$. La recta r puede ser, por ejemplo, la que contiene a los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(1, 0, 1) - (0, 0, 2)] = (1, 0, -1).$$

La expresión de r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}.$$

Existen infinitas rectas que cumplen la condición: todas las que estén contenidas en el plano β que pasen por el punto $P(1, 0, 1)$.

BY NC SA

8º) Determina los valores de los parámetros a y b para que el plano $\pi \equiv ax + y + z = b$ contenga a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Solución

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 1 - \lambda \\ -x - 2y = -\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow -y = 1 - 2\lambda;$$

$$y = -1 + 2\lambda. \; x - 1 + 2\lambda + \lambda = 1 \Rightarrow x = 2 - 3\lambda. \qquad r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P(2, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-3, 2, 1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (a, 1, 1)$.

Para que el plano π contenga a la recta r es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea 0:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (a, 1, 1) \cdot (-3, 2, 1) = 0; \; -3a + 2 + 1 = 0; \; 3a = 3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a = 1}.$$

Si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos, por lo cual, contiene al punto $P(2, -1, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x + y + z = b \\ P(2, -1, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 - 1 + 0 = b \Rightarrow$$

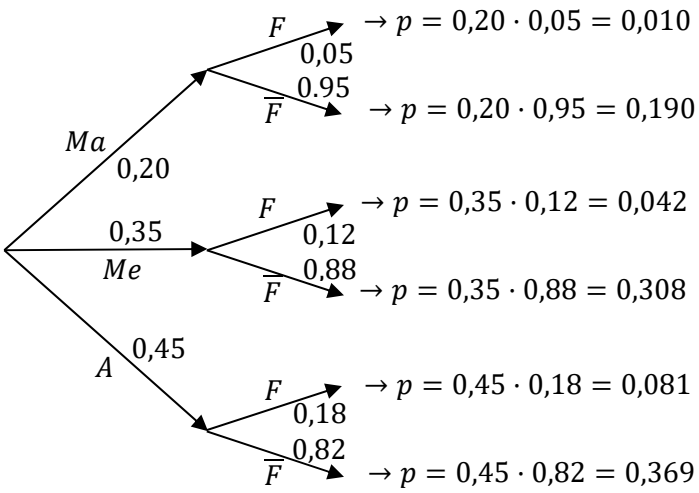
$$\boldsymbol{b = 1}.$$

BY NC SA

9º) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5 %, 12 % y del 18 %, respectivamente. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

$a)$ Finalice sus estudios. $b)$ Estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

Solución



$a)$ $P = P(F) = P(Ma \cap F) + P(Me \cap F) + P(A \cap F) =$

$= P(Ma) \cdot P(F/Ma) + P(Me) \cdot P(F/Me) + P(A) \cdot P(F/A) =$

$= 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}45 \cdot 0{,}18 = 0{,}010 + 0{,}042 + 0{,}081 = \underline{0{,}133}$.

$b)$ $P = P\left(\frac{Me}{\overline{F}}\right) = \frac{P(Me \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(Me) \cdot P\left(\frac{\overline{F}}{Me}\right)}{1 - P(F)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}88}{1 - 0{,}133} = \frac{0{,}308}{0{,}867} =$

BY NC SA

10º) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que: $P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0{,}5934$ (véase la tabla simplificada de la normal tipificada).

Solución

Datos: $\mu = 4;\ \ \sigma = 20.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(4,2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-4}{2}$.

$P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0{,}5934 \Rightarrow P\left(\frac{4-a-4}{2} \leq Z \leq \frac{4+a-4}{2}\right) = 0{,}5934;$

$= P\left(\frac{-a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right)\right] =$

$= P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0{,}5934;\ \ 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 1{,}5934;$

$P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0{,}7967 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa: $\frac{a}{2} = 0{,}83 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = 1{,}66.}$$

BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sea $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$.

a) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f, en caso de que existan.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

2º) Hallar los valores de $a\ y\ b$ para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $P(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

3º) Calcula los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x - sen\ x}$. b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

4º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a y resuélvalo en los casos en que es compatible.

5º) Calcula, sin desarrollar, el valor del determinante: $D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$. Justifica en cada paso la propiedad de los determinantes que has utilizado.

6º) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

BY NC SA

7º) Determina, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 6x + 5y - 3z = 2$.

8º) Estudia, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de las siguientes rectas: $r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$.

9º) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los casos siguientes:

$a)$ A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.

$b)$ B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

10º) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

$a)$ La probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132.

$b)$ La probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sea $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$.

a) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f, en caso de que existan.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

Solución:

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$(x+1)^2=0;\ \ x+1=0\Rightarrow x=-1.$$

$$\boldsymbol{D(f)\Rightarrow R-\{-1\}.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty\Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\boldsymbol{\underline{La\ recta\ x=-1\ es\ asíntota\ vertical}.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{y}\ n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right].$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\cdot(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3+2x^2-x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+3x^2-x}{(x+1)^2}=0.$$

$$\boldsymbol{\underline{La\ recta\ y=x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+1)^2-x^3\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4}=\frac{3x^2\cdot(x+1)-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}=0\Rightarrow x^2(x+3)=0\Rightarrow x_1=x_2=0;\ x_3=-3.$$

BY NC SA

Las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ y $(0,+\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva y negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=1\in(0,+\infty)$ es: $f'(1)=\frac{1^2\cdot(1+3)}{(1+1)^3}=$

$=\frac{4}{8}>0\Rightarrow Creciente.$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$f'(x)>0\Rightarrow \underline{Crecimiento: x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)}.$

$f'(x)<0\Rightarrow \underline{Decrecimiento: x\in(-3,-1)\cup(-1,0)}.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)\cdot(x+1)^3+x^2(x+3)\cdot[3\cdot(x+1)^2\cdot 1]}{(x+1)^6}=\frac{(3x^2+6x)\cdot(x+1)+3x^2(x+3)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{3x^3+3x^2+6x^2+6x+3x^3+9x^2}{(x+1)^4}=\frac{6x^3+18x^2+6x}{(x+1)^4}\Rightarrow f''(x)=\frac{6x(x^2+3x+1)}{(x+1)^4}.$$

$=\frac{6(2x^4-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$

$f''(0)=0\Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ relativos.$

$f''(-3)=\frac{6\cdot(-3)\cdot[(-3)^2+3\cdot(-3)+1]}{(-3+1)^4}=\frac{-18\cdot(9-6+1)}{16}<0\Rightarrow Máx.para\ x=-3.$

$f(-3)=\frac{(-3)^3}{(-3+1)^2}=-\frac{27}{16}\Rightarrow \underline{Máximo: A\left(-3,-\frac{27}{16}\right)}.$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$f''(x)=0\Rightarrow\frac{6x(x^2+3x+1)}{(x+1)^4}=0\Rightarrow 6x(x^2+3x+1)=0;\ \ x=0$. Se ha tenido en cuenta que $x^2+3x+1\neq 0,\forall x\in R$.

$f(0)=\frac{0^3}{(0+1)^2}=0\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Punto\ de\ inflexión: O(0,0)}}.$$

BY NC SA

2º) Hallar los valores de $a\ y\ b$ para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $P(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Solución:

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b. \qquad y'' = 6x + 2a.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0;\ \ 3x + a = 0 \Rightarrow x \Rightarrow x_0 = -\frac{a}{3}.$$

Por contener al punto $P\left(-\frac{a}{3}, -1\right)$ se cumple que: $y\left(-\frac{a}{3}\right) = -1$:

$$y\left(-\frac{a}{3}\right) = -1 \Rightarrow \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + 1 = -1;$$

$$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + 2 = 0;\ -a^3 + 3a^3 - 9ab + 54 = 0;\ \ 2a^3 - 9ab + 54 = 0. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada, se cumple que $y'\left(-\frac{a}{3}\right) = 1$;

$$y'\left(-\frac{a}{3}\right) = 1 \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + b = 1;\ \ \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = 1;$$

$$a^2 - 2a^2 + 3b = 3;\ \ -a^2 + 3b - 3 = 0;\ \ a^2 - 3b + 3 = 0. \quad (2)$$

Resolviendo es sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ a^2 - 3b + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ -3a^3 + 9ab - 9a = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = 0;$$

$a^3 + 9a - 54 = 0$. Resolviendo por la regla de Ruffini:

	1	0	9	−54
3		3	9	54

$$a^2 + 3a + 18 = 0;\ \ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-72}}{2} \Rightarrow a \notin R.$$ Única solución real: $\underline{a = 3}$.

$$a^2 - 3b + 3 = 0 \Rightarrow 9 - 3b + 3 = 0;\ \ 12 - 3b = 0;\ \ 4 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

BY NC SA

3º) Calcula los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-sen\,x}$. b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Solución:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-sen\,x}=\frac{tg\,0-0}{0-sen\,0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cos^2x}{cos^2x}}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen^2x}{cos^2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{tag^2x}{1-\cos x}=\frac{tag^20}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot tg\,x\cdot\frac{1}{cos^2x}}{sen\,x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{cos^3x}}{sen\,x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos^3x}=2\cdot\frac{1}{cos^30}=2\cdot\frac{1}{1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-sen\,x}=2.}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.\ tipo\ nº\ e\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-1+1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-1}{4x^3-1}+\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}\cdot\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{x^2+1-6x^4-6x^2}{4x^4-x}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x}}=e^{-\frac{6}{4}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{\sqrt{e}}{e^2}.}$$

BY NC SA

4º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+az=8 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a y resuélvalo en los casos en que es compatible.

Solución:

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas; para su resolución se elimina la ecuación del parámetro (segunda) y se resuelve el sistema formado por las tres ecuaciones restantes, que es: $\left.\begin{matrix} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=0 \end{matrix}\right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1-2-1+1-1-2=-6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\boldsymbol{Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-2-1+2-2-2-1}{-6}=\frac{-6}{-6}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{1-4-2-1-2-4}{-6}=\frac{-12}{-6}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{2-4+1+2+1+4}{-6}=\frac{6}{-6}=-1.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de x, y, z en la ecuación despreciada:

$x+2y+az=8\Rightarrow 1+2\cdot 2-a=8;\ \ 5-a=8\Rightarrow a=-3.$

$$\boldsymbol{Para\ a=-3\Rightarrow S.C.D\Rightarrow x=1, y=2, z=-1.}$$

$$\boldsymbol{Para\ a\neq -3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

5º) Calcula, sin desarrollar, el valor del determinante: $D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$. Justifica en cada paso la propiedad de los determinantes que has utilizado.

Solución:

Si a una línea de un determinante se le suma (o resta) otra línea paralela, el valor del determinante no varía.

Se va a restar la primera fila a las otras dos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b+c-c-a \\ 0 & c-b & a+b-c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix}.$$

Se va a sumar a la segunda columna la tercera:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a+b+c & c+a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix}.$$

Se ha transformado el determinante de una matriz triangular inferior (que es aquella matriz que tiene todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal ceros).

El valor del determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal, por lo cual:

$D = 2 \cdot 0 \cdot (b-c) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{D = 0.}$$

BY NC SA

6º) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Solución:

Llamando $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

$A\cdot X=B;\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B;\ I\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot B}$.

$|A|=\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=6-5=1.\qquad A^t=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -5\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}}.$$

BY NC SA

7º) Determina, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 6x + 5y - 3z = 2$.

Solución:

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = 2 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3a - 20 + 18 - 12 - 5a + 18 =$$

$$= -2a + 4 = 0;\ -a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 12 - 20 - 20 + 18 - 4 = 36 - 44 = -8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}$$

.

$$\boldsymbol{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi}$$

.

BY NC SA

8º) Estudia, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de las siguientes rectas: $r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$.

Solución:

La expresión de s por dos planos es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{4};\ \left.\begin{matrix} x - 5 = -3y + 3 \\ 4x - 20 = 3z - 18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 4x - 3z = 2 \end{cases}.$$

Las rectas $r\ y\ s$ forman el sistema $\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - z = 6 \\ x + 3y = 8 \\ 4x - 3z = 2 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\ y\ M' = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

4º -- $Rang\ M = 3;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$Rang\ M \Rightarrow \{F_2, F_3, F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 12 + 15 = 9 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

$$|M'| = \begin{vmatrix} a & 3 & -2 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 3F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ -2 & -15 & 0 & -16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \\ -2 & -15 & -16 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \cdot [6(a-4) - 14 - 15(a-4) + 14] = -8 \cdot [-9(a-4)] =$$

$$= 72 \cdot (a-4) = 0 \Rightarrow a - 4 = 0;\ \ a = 4.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Las\ rectas\ son\ secantes.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ M = 3;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan.}}$$

BY NC SA

9º) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los casos siguientes:

$a)$ A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.

$b)$ B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

Solución:

$a)$ Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

Dos sucesos son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como es $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$:

$A\ y\ B\ son\ independientes\ cuando$: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$A\ y\ B\ son\ dependientes\ cuando$: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Como quiera que $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes.}$$

$b)$ Si B está incluido en A: $P(A \cap B) = P(B) \neq 0$.

Cualquiera que sea $P(B) \neq 0$, siendo $B \subset A$, se cumple que $P(A) \neq 0$ y, en consecuencia:

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes.}$$

BY NC SA

10º) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

$a)$ La probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132.

$b)$ La probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 120;\ \ \sigma = 12.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(120, 12).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-120}{12}$.

$$P = P(X \geq 132) = P\left(Z \geq \frac{132-120}{12}\right) = P\left(Z \geq \frac{12}{12}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

$b)$ $P = P(96 \leq X \leq 144) = P\left(\frac{96-120}{12} \leq Z \leq \frac{144-120}{12}\right) = P\left(\frac{-24}{12} \leq Z \leq \frac{24}{12}\right) =$

$= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 2)] =$

$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 2) = 2 \cdot P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 =$

$= 1{,}9544 - 1 = \underline{0{,}9544}.$

BY NC SA

Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real m:

$a)$ Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$.

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \ \ si \ \ x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

$c)$ Calcule la siguiente integral: $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} \cdot dx$.

3º) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

$a)$ Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

$b)$ Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

$c)$ Determine el ángulo entre el plano de ecuación $\pi \equiv x + y = 2$ y la recta r.

4º) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2.020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros:

$a)$ Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

$b)$ Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

$c)$ Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina?

BY NC SA

5º) Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9.450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

6º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

$a)$ Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

$b)$ Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.

$c)$ Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

7º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in R \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

$a)$ Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

$b)$ Halle una ecuación de la recta s contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

$c)$ Calcule una ecuación de la recta r_2 que pase por P y sea paralela a la recta r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

8º) De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

$b)$ Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

$c)$ Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real m:

$a)$ Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el valor $m=\frac{1}{2}$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2-m+2m-2-1+2m^2=2m^2+m-1=0;$$

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}\Rightarrow m_1=-1, m_2=\frac{1}{2}.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} m\neq-1 \\ m\neq\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=-1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_4\}\Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$Para\ m=\frac{1}{2}\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_3=C_4\}\Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $m=\frac{1}{2}$ el sistema resulta $\begin{cases} x-y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x-y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+2y-z=-1 \end{cases}$. Haciendo $x=2\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} -y+z=1-2\lambda \\ 2y-z=-1-\lambda \end{matrix}\right\}\Rightarrow y=-3\lambda;\ \ z=1-2\lambda-3\lambda=1-5\lambda.$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=2\lambda, y=-3\lambda, z=1-5\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

BY NC SA

2º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \ si \ x\neq 0 \\ 0 \quad si \quad x=0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

$b)$ Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

$c)$ Calcule la siguiente integral: $I=\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\cdot dx$.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\frac{0}{e^{\frac{1}{\infty}}}=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R.}$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(3x^2+2)\ si\ x\neq 0 \quad (*) \\ 0 \quad si \ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} 0 \ si \ x<0 \\ 0 \ si \ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R.}$

$(*)\ f(x)=x^3\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow f'(x)=3x^2\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+x^3\cdot\frac{1\cdot 2x}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=$

$=3x^2\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+2e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(3x^2+2).$

$b)\qquad f(x)=\frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}}.\qquad f(-x)=\frac{(-x)^3}{e^{\frac{1}{(-x)^2}}}=-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}}=-f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \underline{La\ función\ f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ origen.}$

$c)\ I=\int_1^2\frac{f(x)}{x^6}\cdot dx=\int_1^2\frac{x^3\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}\cdot dx=\int_1^2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\cdot dx=\int_1^2 x^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot dx\Rightarrow$

BY NC SA

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} -\frac{1}{x^2} = t \\ 2x^{-3}\cdot dx = dt \\ x^{-3}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{cases}\right| \begin{matrix} x = 2 \rightarrow t = -\frac{1}{4} \\ x = 1 \rightarrow t = -1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} e^t \cdot dt = \frac{1}{2}\cdot [e^t]_{-1}^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \left(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e} - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\cdot dx = \frac{\sqrt[4]{e^3}-1}{2e}.}$$

BY NC SA

3º) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

$a)$ Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

$b)$ Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

$c)$ Determine el ángulo entre el plano de ecuación $\pi \equiv x + y = 2$ y la recta r.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,2,1)$.

La posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$ es el punto Q, intersección de la recta r con el plano $z = 0$:

$$r \equiv \left.\begin{matrix} z = 0 \\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 90 + \lambda = 0;\ \ \lambda = -90.$$

$$\lambda = -90 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -90 \\ y = -10 + 2 \cdot (-90) = -190 \\ z = 90 - 90 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Q(-90,-190,0).}$$

$b)$ El haz de planos, β, perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$ tiene por expresión general $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 + 1 + D = 0;\ 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0.$$

El punto P' buscado es la intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$ y el plano $\gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0$:

$$\left.\begin{matrix} \gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot (-10 + 2\lambda) + (90 + \lambda) - 4 = 0;$$

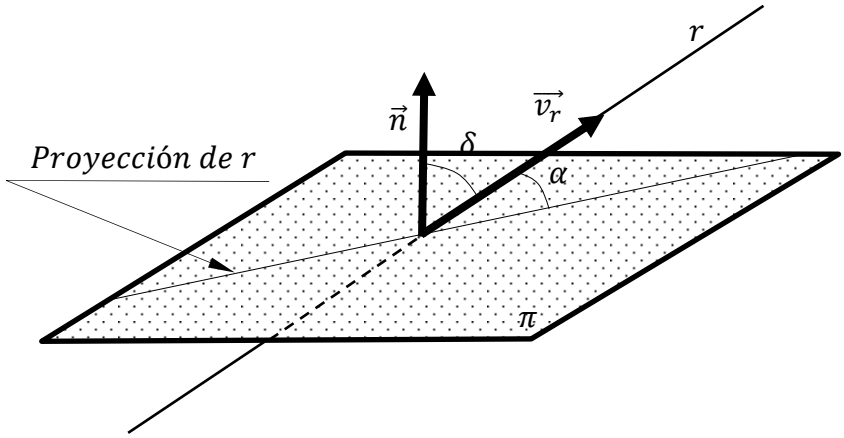
$$\lambda - 20 + 4\lambda + 90 + \lambda - 4 = 0;\ \ 6\lambda = -66;\ \ \lambda = -11.$$

BY NC SA

$$\lambda = -11 \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -10 - 22 = -32 \\ z = 90 - 11 = 79 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P'(-11, -32, 79).}$$

$c)$



Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y = 2$ es $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\delta$.

$\cos\delta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser α y δ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{|(1,1,0)\cdot(1,2,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|1+2+0|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = 0{,}8660 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}8660 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = 60°.}$$

BY NC SA

4º) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2.020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros:

a) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10;\ \ p = 0{,}277;\ \ q = 1 - 0{,}277 = 0{,}723. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P = P(5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}277^5 \cdot 0{,}723^5 = \frac{10!}{(10-5)!\cdot 5!} \cdot 0{,}0016 \cdot 0{,}1976 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5!} \cdot 0{,}000322 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 0{,}000322 = \underline{0{,}0812.}$$

b) La probabilidad de que un consejero sea hombre es la unidad menos la probabilidad de que sea mujer: $p = 1 - 0{,}277 = 0{,}723$.

$Datos$: $n = 10;\ \ p = 0{,}723;\ \ q = 0{,}277.$

La probabilidad de que hubiese al menos un hombre es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no hubiera ningún hombre:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}723^0 \cdot 0{,}277^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}000002659 =$$

$$= 1 - 0{,}000002659 = \underline{0{,}99999734}.$$

c) El 35 % de 200 es: $n = 0{,}35 \cdot 200 = 70$.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 200;\ \ p = 0{,}277;\ \ q = 0{,}723.$$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 70 \cdot 0{,}277 = 18{,}39 > 5 \\ n \cdot q = 70 \cdot 0{,}723 = 50{,}61 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}277 = 55{,}4.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0{,}277 \cdot 0{,}723} = \sqrt{40{,}05} \cong 6{,}329.$$

$$X = B(200;\ 0{,}277) \approx N(55{,}4;\ 6{,}329).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-55{,}4}{6{,}329}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X > 70) = P\left(Z > \frac{69{,}5-55{,}4}{6{,}329}\right) = P\left(Z > \frac{14{,}1}{6{,}329}\right) \cong P(Z > 2{,}23) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = \underline{0{,}0129}.$$

BY NC SA

5º) Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9.450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:

Sean x, y, z las edades de Pablo, Alejandro y Alicia, respectivamente.

La cantidad que corresponde a un año de edad es: $\frac{9.450}{45} = 210$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} x+y-3=2z \\ x+y+z=45 \\ x=z+2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ x+y+z=45 \\ x-z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=z+2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} (z+2)+y-2z=3 \\ (z+2)+y+z=45 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} y-z=1 \\ y+2z=43 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -y+z=-1 \\ y+2z=43 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3z=42;\ \ z=14;\ \ x=16;\ \ y=z+1=15.$$

$Pablo$ tiene 16 años; $Alejandro$ tiene 15 años y $Alicia$ tiene 14 años.

$Pablo$: $16 \cdot 210 = 3.360$.

$Alejandro$: $15 \cdot 210 = 3.150$.

$Alicia$: $14 \cdot 210 = 2.940$.

Reciben: $Pablo$, 3.360 euros; $Alejandro$, 3.150 euros y $Alicia$, 2.940 euros.

BY NC SA

6º) Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$:

$a)$ Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$.

$b)$ Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.

$c)$ Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

Solución:

$a)$ El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$".

La función $f(x)$ es continua en R por ser $x^2+1\neq 0, \forall x\in R$, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}<0.$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>0.$$

$Queda\ comprobado\ que\ f(x)\ satisface\ el\ teorema\ de\ Bolzano\ en\ [-1,1].$

$b)$ La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$1-x^2=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^4}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(-1)=\frac{2(-1)\cdot[(-1)^2-3]}{[(-1)^2+1]^4}=\frac{-2\cdot(-2)}{16}=\frac{1}{4}>0\Rightarrow Mín.\ relativo\ para\ x=-1.$$

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$Mínimo: A\left(-1,-\frac{1}{2}\right).$

$$f''(1)=\frac{2\cdot 1\cdot(1^2-3)}{1^2+1}=\frac{2\cdot(-2)}{2}=-2<0\Rightarrow Máx.\ relativo\ para\ x=1.$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$Máximo: B\left(1,\frac{1}{2}\right).$

$c)$ Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen; que contiene al origen de coordenadas y que $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + 1 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_1^2 = L2 - L1 = L2 - 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = L2\ u^2}}.$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

7º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in R \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

$a)$ Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

$b)$ Halle una ecuación de la recta s contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

$c)$ Calcule una ecuación de la recta r_2 que pase por P y sea paralela a la recta r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

$a)$ Una recta está contenida en un plano cuando lo están dos de sus puntos.

Dos puntos de $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ son: $A(1, 1, -1)$ y $B(2, 0, -1)$.

La recta r_1 está contenida en el plano π si lo están sus puntos A y B:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ A(1, 1, -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 + 1 - 1 = 1 \Rightarrow Si \Rightarrow A \in \pi.$$

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ B(2, 0, -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 + 0 - 1 = 1 \Rightarrow Si \Rightarrow B \in \pi.$$

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ P(0, 1, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 + 1 - 0 = 1 \Rightarrow Si \Rightarrow P \in \pi.$$

Queda verificado que r_1 y P están contenidos en el plano π.

$b)$ Un punto genérico de r_1 es $Q(1 + \lambda, 1 - \lambda, -1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(1 + \lambda, 1 - \lambda, -1) - (0, 1, 0)] = (1 + \lambda, -\lambda, -1).$$

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 0)$.

Si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{v_1}$ son perpendiculares, entonces, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es linealmente dependiente del vector director de la recta s pedida.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \Rightarrow (1 + \lambda, -\lambda, -1) \cdot (1, -1, 0) = 0; \;\; 1 + \lambda + \lambda - 0 = 0;$$

$$2\lambda = -1; \;\; \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Para $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \approx \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, 1, -2)$.

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}.}$$

$c)$ La recta r_2, por ser paralela a r_1, tienen vectores directores linealmente dependientes, por lo

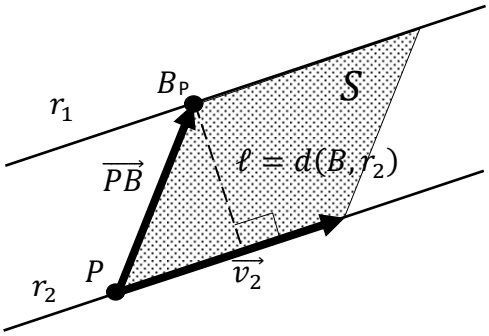
cual, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$.

$$\boldsymbol{r_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}.}$$

El lado del cuadrado ℓ es la distancia del punto $B(1, 1, -1) \in r_1$ a la recta r_2.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



n punto y un vector director de r_2 son $P(0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} S = \left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_2}| \cdot \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right| = |\overrightarrow{v_2}| \cdot \ell \Rightarrow \ell = d(B, r_2) = \frac{|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{v_2}|}.$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = [(1, 1, -1) - (0, 1, 0)] = (1, 0, -1).$$

$$\ell = d(B, r_2) = \frac{|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{v_2}|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|i+k+j|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|i+j+k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{6}}{2}\, u. \; S = \ell^2 = \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{3}{2}\, u^2 = 1{,}5\, u^2.}$$

BY NC SA

8º) De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

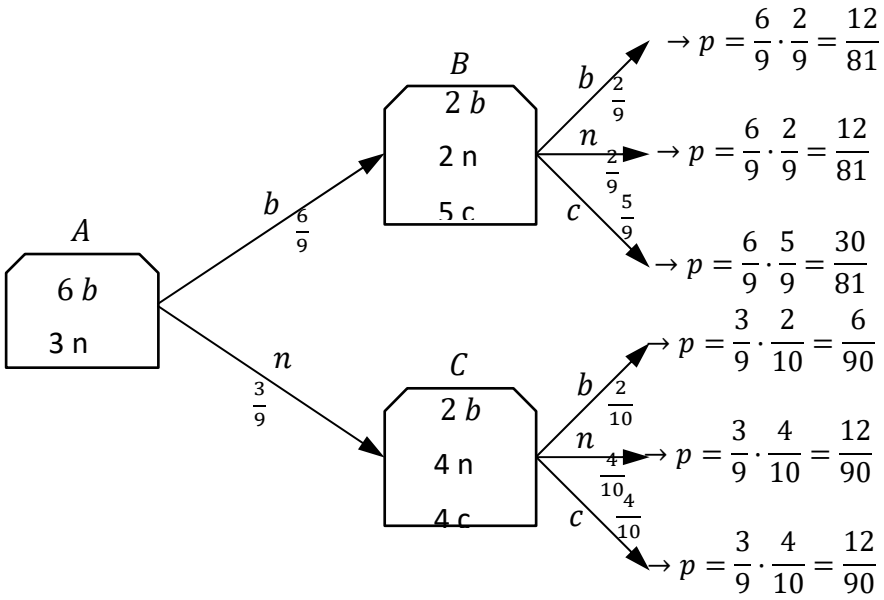
a) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución:

Sea A la cesta que contiene 6 sombreros blancos y 3 negros, B el cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros y C el cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 4 con cuadros blancos y negros.



$a)$ $P = P(s_b \cap p_n) + P(s_b \cap p_c) + P(s_n \cap p_b) + P(s_n \cap p_c) =$

$= P(s_b) \cdot P(p_n/s_b) + P(s_b) \cdot P(p_c/s_b) + P(s_n) \cdot P(p_b/s_n) + P(s_n) \cdot P(p_c/s_n) =$

$= \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{81} + \frac{30}{81} + \frac{6}{90} + \frac{12}{90} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} = \frac{14}{27} + \frac{1}{5} = \frac{70+27}{5 \cdot 27} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = \frac{97}{135} = 0,7185.}$$

$b)$ La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que el sombrero y el pañuelo sean blancos:

$$P = 1 - P(s_b \cap p_b) = 1 - \left[P(s_b) \cdot P\left(\frac{p_b}{s_b}\right)\right] = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} = 1 - \frac{12}{81} = 1 - \frac{4}{27} =$$

$$= \frac{27-4}{27} \Rightarrow \underline{P = \frac{23}{27} = 0,8519.}$$

BY NC SA

$c)$ $P = P(s_n/p_c) = \frac{P(s_n \cap p_c)}{P(p_c)} = \frac{P(s_n)\cdot P(p_c/s_n)}{P(s_b \cap p_c)+P(s_n \cap p_c)} = \frac{P(s_n)\cdot P(p_c/s_n)}{P(s_b)\cdot P(p_c/s_b)+P(s_n)\cdot P(p_c/s_n)} =$

$$= \frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30}{81}+\frac{12}{90}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30\cdot 90+12\cdot 81}{81\cdot 90}} = \frac{12\cdot 81}{30\cdot 90+12\cdot 81} = \frac{4\cdot 9}{10\cdot 10+4\cdot 9} = \frac{36}{136} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = \frac{9}{34} = 0,2647.}}$$

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarías ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & si\ \ x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad $f(x)$ en R.

$b)$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

$c)$ Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

$d)$ Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

3º) Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π.

$a)$ Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices A, B, C y D que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

$b)$ Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

4º) En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

$b)$ Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

$c)$ Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

BY NC SA

5º) Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz $A \cdot B$. Calcule la matriz inversa de $A \cdot B$ para $k = 1$.

$b)$ Calcule $B \cdot A$ y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

$c)$ En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea $B \cdot A$.

6º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ x \cdot Lx & si \quad x > 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

$c)$ Calcule $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

7º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, \lambda \in R. \\ z = t \end{cases}$

$a)$ Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcula la distancia entre ellas.

$b)$ Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

$c)$ Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

8º) Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

$b)$ Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarías ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:

Sean x, y, z el número de ensayos, novelas y biografías que hay en la estantería de la biblioteca, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{3}{16}\cdot(x+y+z) \\ z+\frac{x}{3}-2=y \\ \frac{x}{2}+\frac{4y}{5}+z=105 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 16x = 3x+3y+3z \\ 3z+x-6=3y \\ 5x+8y+10z=1.050 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 13x-3y-3z=0 \\ x-3y+3z=6 \\ 5x+8y+10z=1.050 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1.050 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-144-9.450-9.450+180}{-390-24-45-45-312+30} = \frac{-18.864}{-786} = 24.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1.050 & 10 \end{vmatrix}}{-786} = \frac{780-3.150+90-40.950}{-786} = \frac{-43.230}{-786} = 55.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 8 & 1.050 \end{vmatrix}}{-786} = \frac{-40.950-90-624+3.150}{-786} = \frac{-38.514}{-786} = 49.$$

En la estantería hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

BY NC SA

2º) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x} & si\ x<0\\ x^2-4x+3 & si\ x\geq 0\end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad $f(x)$ en R.

$b)$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x=0$? Justifique la respuesta.

$c)$ Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

$d)$ Determine para $x\in(0,\infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+1}{x}=\frac{0+1}{0}=\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x^2-4x+3)=3=f(0)\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\Rightarrow f(x)$ no es continua para $x=0$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R-\{0\}.}}$$

$b)$ La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$. Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, por ser discontinua para $x=0$:

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R-\{0\}.}}$$

$c)$ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1}=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ horizontal\ para\ y=2\ en\ su\ parte\ negativa.}}$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ vertical\ para\ x=0\ en\ su\ parte\ negativa.}}$$

$d)$ La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

Para $x\in(0,\infty)\Rightarrow f'(x)=2x-4$.

BY NC SA

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow \underline{P(2, -1)}.$

Por ser $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{El\ punto\ P(2,-1)\ es\ un\ mínimo\ relativo.}}$$

BY NC SA

3º) Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

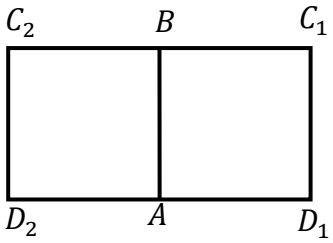
$a)$ Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices A, B, C y D que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

$b)$ Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

Solución:

$a)$

Los puntos del plano $\pi \equiv x - z = 0$ son de la forma $P(a,b,a)$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (0,-1,0)] = (0,2,0).$

$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(a,b,a) - (0,1,0)] = (a,b-1,a).$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (0,2,0) \cdot (a,b-1,a) = 0;\ \ 2b-2=0;\ \ b-1=0 \Rightarrow b=1.$

El vector $\overrightarrow{BC_1}$ resulta ser de la forma: $\overrightarrow{BC_1} = (a,1,a)$.

Por tratarse de un cuadrado: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC_1}\right| \Rightarrow \sqrt{2^2} = \sqrt{a^2+a^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{2a^2};$

$$4 = 2a^2;\ \ a^2 = 2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C_1(\sqrt{2},1,\sqrt{2})\ y\ C_2(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}).}$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1}$ y siendo $D_1(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC_1} = \left[(\sqrt{2},1,\sqrt{2}) - (0,1,0)\right] = (\sqrt{2},0,\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{AD_1} = [(x,y,z) - (0,-1,0)] = (x,y+1,z)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x = \sqrt{2} \\ y+1=0 \rightarrow y=-1 \\ z = \sqrt{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D_1(\sqrt{2},-1,\sqrt{2}).}$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{AD_2}$ y siendo $D_2(x,y,z)$:

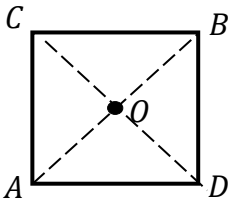
$$\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{AD_2} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC_2} = \left[(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}) - (0,1,0)\right] = (-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{AD_1} = [(x,y,z) - (0,-1,0)] = (x,y+1,z)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x = -\sqrt{2} \\ y+1=0 \rightarrow y=-1 \\ z = -\sqrt{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D_2(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2}).}$$

$b)$

BY NC SA



El punto medio de $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ es $O(0,0,0)$.

Siendo $C(x,y,x) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (x,y,x)$. $\quad \overrightarrow{OA} = (0,-1,0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OA}$ son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (x,y,x) \cdot (0,-1,0) = 0;\ -y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

El punto C es de la forma $C(x,0,x)$ y $\overrightarrow{OC} = (x,0,x)$.

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \Rightarrow \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{(-1)^2} = 1;\ \ 2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nótese que los puntos C y D son simétricos con respecto al origen, por lo cual, las soluciones son:

$$\boldsymbol{C_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ y\ D_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\ \textbf{o bien:}\ \boldsymbol{C_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ y\ D_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

BY NC SA

4º) En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 6;\ \ p = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$P = P(4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 = \frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!} \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot 0{,}0207 =$

$= 15 \cdot 0{,}0207 = \underline{0{,}3110}.$

b) La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^6 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0041 = \underline{0{,}9959}.$

c) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 120;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 0{,}4.$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 120 \cdot 0{,}6 = 72 > 5 \\ n \cdot q = 120 \cdot 0{,}4 = 48 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}6 = 72.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{120 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{28{,}8} \cong 5{,}367.$

$X = B(120;\ 5{,}367) \approx N(72;\ 5{,}367).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-72}{5{,}367}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60{,}5-72}{5{,}367}\right) = P\left(Z > \frac{-11{,}5}{5{,}367}\right) \cong P(Z > -2{,}14) =$

$= P(Z \leq 2{,}14) = \underline{0{,}9838}.$

BY NC SA

5º) Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz $A \cdot B$. Calcule la matriz inversa de $A \cdot B$ para $k = 1$.

$b)$ Calcule $B \cdot A$ y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

$c)$ En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea $B \cdot A$.

Solución:

$a)$ $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2k = 0;\ \ k^2 - 3k = 0;\ \ k(k-3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 3$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A \cdot B\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{0,3\}.}}$$

Para $k = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$|A \cdot B| = -2;\ \ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow$

$$\underline{(\boldsymbol{A \cdot B})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}.}$$

$b)\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B \cdot A = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.}}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -2k(1+k) + (k-1)^2 + 2(k-1) + (k+1)^2 =$$

$$= -2k - 2k^2 + k^2 - 2k + 1 + 2k - 2 + k^2 + 2k + 1 = 0.$$

De lo anterior se deduce que $Rang\ (B \cdot A) \leq 2$.

Todos los menores que se pueden formar tienen el factor $(1+k)$, por lo cual:

BY NC SA

$1 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow Para\ k \neq -1 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.$

Para el valor $k = -1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.$

$$\boldsymbol{Rang\ (B \cdot A) = 2, \forall k \in R.}$$

$c)$ Para $k = 1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se trata de encontrar una matriz ampliada cuyo rango sea 3.

Por ejemplo: $(B \cdot A)' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ (B \cdot A)' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a \neq 0, \forall a \in R, a \neq 0.$

El sistema puede ser, por ejemplo, para $a = 1$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{2x = 1} \\ \boldsymbol{y - z = 0} \\ \boldsymbol{x - y + z = 0} \end{aligned}\right\}.$$

BY NC SA

6º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x \quad si \quad x\le 0 \\ x\cdot Lx \ \ si \ \ x>0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

$b)$ Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

$c)$ Calcule $I=\int_1^2 f(x)\cdot dx$.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot Lx)=0=f(0) \quad (*) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ es\ contnua\ para\ x=0.}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot Lx)=0\cdot(-\infty)\Rightarrow Ind.\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow L'Hopital\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0} x=-0=0.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \ si\ x<0 \\ Lx+1\ si\ \ x\ge 0 \end{cases}\ (*)\quad \Rightarrow x=0\ \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} 1\ si\ \ x<0 \\ -\infty\ \ si\ \ x\ge 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=0.}}$$

(*) $g(x)=x\cdot Lx\Rightarrow g'(x)=1\cdot Lx+x\cdot\frac{1}{x}=Lx+1.$

$b)$ Para $x<0$ la función es $f(x)=x$, que es monótona creciente.

Para $x\ge 0$ la función es $f(x)=x\cdot Lx$, cuya derivada es $f'(x)=Lx+1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=0\Rightarrow Lx+1=0;\ \ Lx=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

BY NC SA

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y de lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right).}$$

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0, \frac{1}{e}\right).}$$

La función tiene un mínimo relativo para $x = \frac{1}{e}$, como se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento; no obstante, se justifica a través de la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo, como se quería justificar.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = \frac{1}{e} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Mín.: A\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right).}$$

$$c)\ I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (x \cdot Lx) \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = Lx \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1)\right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{4} \cdot (2L2 - 1)\right] - \left[\frac{1^2}{4} \cdot (2 \cdot L1 - 1)\right] = 2L2 - 1 - \frac{1}{4} \cdot (-1) =$$

$$= 2L2 - 1 + \frac{1}{4} = 2L2 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = L4 - \frac{3}{4}.}$$

BY NC SA

7º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \lambda \in R. \\ z=t \end{cases}$

$a)$ Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcula la distancia entre ellas.

$b)$ Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

$c)$ Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda;\ \ y=-1+2\lambda;\ \ x=-2-y=-2+1-2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1-2\lambda \ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(2,-2,-1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2,5,0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,-2,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente dependientes por ser proporcionales (iguales) sus componentes; esto implica que las rectas r y s son paralelas o coincidentes.

Para diferenciar el caso hacemos comprobamos si el punto $B(2,5,0) \in s$ pertenece también a r: $\left.\begin{matrix} 2=-1-2\lambda \\ 5=-1+2\lambda \\ 0=\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda \Rightarrow B \notin r.$

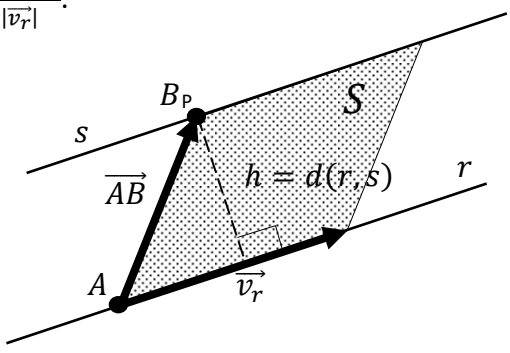
Las rectas r y s son paralelas.

La distancia entre las restas r y s es la misma que la del punto $B(2,5,0) \in s$ a la recta r. La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

$$\left.\begin{matrix} S=\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| \\ S=|\overrightarrow{v_r}| \cdot h \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \ \Rightarrow h=d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{v_r}|}.$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(2,5,0)-(-1,-1,0)]=(3,6,0).$$



Aplicando la fórmula al punto $B(2,5,0)$ y a la recta r:

$$d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{v_r}|}=\frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{|-3j+12k+6k+6i|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|6i-3j+18k|}{\sqrt{9}}=$$

$$=\frac{|6i-3j+18k|}{3}=|2i-j+6k|=\sqrt{2^2+(-1)^2+6^2}=\sqrt{4+1+36} \Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow \boldsymbol{d(r,s) = \sqrt{41}\, u.}$$

$b)$ El plano π pedido contiene a un punto de una de las rectas, por ejemplo, $B(2,5,0) \in s$ y tiene como vectores directores al vector director de las rectas r y s y el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,5,0) - (-1,-1,0)] = (3,6,0)$. Su ecuación general es la siguiente:

$$\pi(B;\, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(y-5) + 12z + 6z + 6(x-2) = 0;\;\; 2(x-2) - (y-5) + 6z = 0;$$

$$2x - 4 - y + 5 + 6z = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0.}}$$

$c)$ $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P(-1,-1,0).$

$$s \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q(2,5,0).$$

Sea φ la recta que pasa por los puntos P y Q.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,5,0) - (-1,-1,0)] = (3,6,0) \Rightarrow \overrightarrow{v_\varphi} = (1,2,0).$

La expresión de φ por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{\varphi \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{0}.}}$$

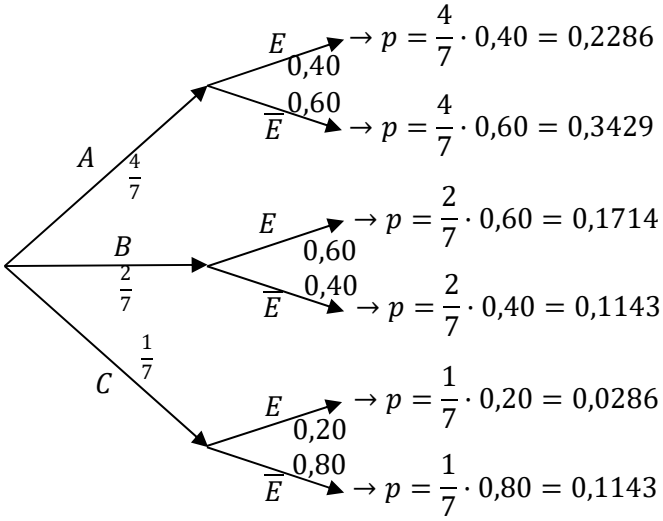
BY NC SA

8º) Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Solución:



$a)$ $P = P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) =$

$= P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) =$

$= \frac{4}{7} \cdot 0{,}40 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}60 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}20 = 0{,}2286 + 0{,}1714 + 0{,}0286 = \underline{0{,}4286}.$

$b)$ $P = P(C/E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C) \cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 0{,}20}{0{,}4286} = \frac{0{,}0286}{0{,}4286} = \underline{0{,}0667}.$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

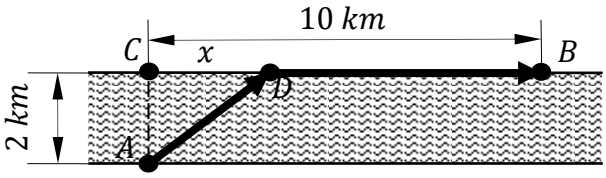
a) Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

b) Calcule la inversa de A.

c) Resuelva la ecuación matricial $AX - B^t = A^2$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

3º) En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 km de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 km del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

4º) Considere la función $f(x) = x \cdot Lx$, definida para $x > 0$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$.

BY NC SA

5º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa de ambas rectas.

$b)$ En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcula la perpendicular común a ambas rectas.

6º) Considere los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(3, 5, 2)$.

$a)$ Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

$b)$ Calcule la distancia del punto A al plano π.

7º) Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 3 bolas rayadas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea rayada.

$b)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea blanca, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era blanca.

$c)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

$a)$ Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

$b)$ Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución

Sean x, y, z las edades actuales de Carmela, Esperanza y Aurora, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ x-5=\frac{y+z}{2} \\ y=z+4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ 2x-10=y+z \\ y-z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ 2x-y-z=10 \\ y-z=4 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 68 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{68+10-4+4+68+10}{1+2+1+2}=\frac{156}{6}=26.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 68 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-10+8+4+136}{6}=\frac{138}{6}=23.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 68 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-4+136-10-8}{6}=\frac{114}{6}=19.$$

Carmela tiene 26 años, Esperenza tiene 23 años y Aurora tiene 19 años.

BY NC SA

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

$b)$ Calcule la inversa de A.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $AX - B^t = A^2$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución

$a)$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ A^3 = -I.}}$$

$$A^{2023} = A^{3 \cdot 674 + 1} = A^{3 \cdot 674} \cdot A^1 = (A^3)^{674} \cdot A = (-I)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A = A \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{2023} = A.}}$$

$b)$ $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1.$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.}}$$

$c)$ $AX - B^t = A^2;\ \ A \cdot X = A^2 + B^t;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t);$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t)}.$

$$A^2 + B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

BY NC SA

$$X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

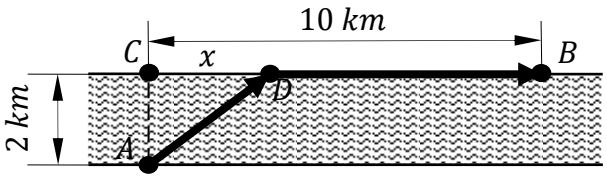
$$\Rightarrow \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}.}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

3º) En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado $a)$ para realizar el apartado $b)$, aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado $a)$.

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 km de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 km del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



$a)$ Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

$b)$ Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución

$a)$ $\quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 2^2 + x^2 = 4 + x^2;\ \overline{AD} = \sqrt{4+x^2}. \qquad \overline{DB} = 10 - x.$

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{4} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4} \\ t_{\overline{DB}} = \frac{\overline{BD}}{12} = \frac{10-x}{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = t_{\overline{AD}} + t_{\overline{DB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{Queda\ demostrado\ que\ t \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}.}}$$

$b)$ Para que el tiempo sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+4}} + \frac{1}{12} \cdot (-1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{12} = 0;\ \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 = 0;$$

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} = 1;\ 3x = \sqrt{x^2+4};\ 9x^2 = x^2 + 4;\ 8x^2 = 4;\ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = +\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cong 0{,}707\ km.$$

$$\boldsymbol{\underline{El\ tiempo\ empleado\ es\ mínimo\ cuando\ D\ esta\ a\ 707\ metros\ de\ C.}}$$

El tiempo mínimo se produce para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{4} + \frac{10-\frac{\sqrt{2}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}}{4} + \frac{\frac{20-\sqrt{2}}{2}}{12} = \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{20-\sqrt{2}}{24} = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{20-\sqrt{2}}{24} = \frac{9\sqrt{2}+20-\sqrt{2}}{24} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+20}{24} = \frac{2\sqrt{2}+5}{6} \cong 1{,}3047\ horas = 1\ hora + 0{,}3047\ horas =$$

$$= 1\ hora + 60 \cdot 0{,}3047\ minutos = 1\ hora + 18{,}2843\ minutos =$$

BY NC SA

$= 1\ hora + 18\ minutos + 0{,}2843\ minutos =$

$= 1\ hora + 18\ minutos + 60 \cdot 0{,}2843\ segundos =$

$= 1\ hora + 18\ minutos + 17\ segundos.$

***El tiempo mínimo que emplea el triatleta es de* 1 *h* 10 *m* 17 *s*.**

BY NC SA

4º) Considere la función $f(x) = x \cdot Lx$, definida para $x > 0$.

$a)$ Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

$c)$ Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$.

Solución

$a)$ $\quad f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{f'(x) = Lx + 1}.$

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0;\ \ Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0, +\infty)$, los periodos de crecimiento o decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)}.$$

$$b)\ I = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot Lx \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.}}$$

$c)$ La función $f(x)$ tienen infinitas funciones primitivas, y tienen por expresión la función obtenida en el apartado anterior: $F(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C$.

De las infinitas funciones primitivas de $f(x)$ la que contiene al punto $P(1,0)$ es la que satisface su ecuación:

$$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^2}{4} \cdot (2L1 - 1) + C = 0;\ \ \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 0 - 1) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}.$$

$$\underline{\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + \frac{1}{4}.}}$$

BY NC SA

5º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa de ambas rectas.

$b)$ En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcula la perpendicular común a ambas rectas.

Solución

$a)$ Un punto y un vector director de la recta r son $A(-2,3,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,0)$.

La expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = z = \lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,1,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,0,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (-2,3,0)] = (2,-2,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cortan en un punto.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 - \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = 0 \end{cases}$.

Si las rectas se cortan en un punto tiene que cumplirse: $\left.\begin{matrix} \lambda = -2 - \mu \\ 1 = 3 + \mu \\ \lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = 0;\ \mu = -2.$$

El punto de corte es: $B(0,1,0)$.

$b)$ El plano π que contiene a las rectas tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -x + z - (y-1) = 0;$$

BY NC SA

$$-x+z-y+1=0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x+y-z-1=0.}$$

El ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\beta \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{r_s}|}=\frac{|(1,-1,0)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}=0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = arc\cos 0,5 \Rightarrow \beta = 60°.}$$

BY NC SA

6º) Considere los puntos $A(1,-1,2)$ y $B(3,5,2)$.

$a)$ Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

$b)$ Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución

$a)$ Los puntos $A(1,-1,2)$ y $B(3,5,2)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,5,2) - (1,-1,2)] = (2,6,0).$$

El punto medio del segmento AB es el siguiente:

$$M \Rightarrow \left\{x = \frac{1+3}{2} = 2;\ \ y = \frac{-1+5}{2} = 2;\ \ z = \frac{2+2}{2} = 2\right\} \Rightarrow M(2,2,2).$$

El vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n} = (1,3,0)$.

La expresión general del haz de planos β perpendiculares al segmento AB es la siguiente: $\beta \equiv x + 3y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $M(2,2,2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix}\beta \equiv x + 3y + D = 0 \\ M(2,2,2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 2 + D = 0;\ \ 8 + D = 0 \Rightarrow D = -8.$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x + 3y - 8 = 0.}$$

$b)$ La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $A(1,-1,2)$ y al plano $\pi \equiv x + 3y - 8 = 0$:

$$d(A,\pi) = \frac{|1 + 3\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|1 - 3 - 8|}{\sqrt{1+9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

$$\boldsymbol{d(A,\pi) = \sqrt{10}\ unidades.}$$

BY NC SA

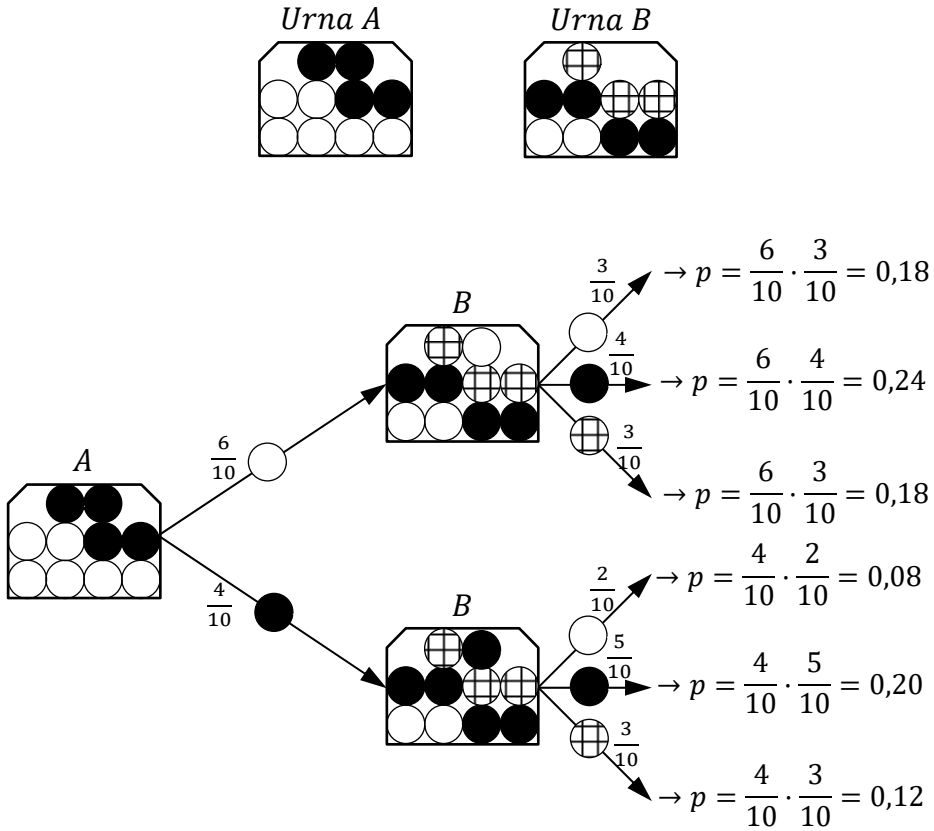
7º) Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 3 bolas rayadas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea rayada.

$b)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea blanca, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era blanca.

$c)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución



$a)$ $P = P(R) = P(B \cap R) + P(N \cap R) = P(B) \cdot P(R/B) + P(N) \cdot P(R/N) =$

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}18 + 0{,}12 = \underline{0{,}30}.$

$b)$ Se trata de obtener bola blanca de la urna B cuando se añade una bola blanca:

$$P = \frac{nº\ de\ bolas\ blancas}{nº\ total\ de\ bolas} = \frac{3}{3+4+3} = \frac{3}{10} = \underline{0{,}30}.$$

$c)$ $P = P(N) = P(B \cap N) + P(N \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) + P(N) \cdot P(N/N) =$

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}24 + 0{,}20 = \underline{0{,}44}.$

BY NC SA

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución

a) $Datos$: $\mu = 10\sigma;\ \sigma$.

$X \to N(10\sigma;\ \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10\sigma}{\sigma}$.

$P = P(X < 115) = P\left(Z < \frac{115-10\sigma}{\sigma}\right) = 0{,}9332$. Mirando este valor en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, le corresponde el valor exacto de 1,5:

$\frac{115-10\sigma}{\sigma} = 1{,}5;\ 115 - 10\sigma = 1{,}5\sigma;\ 115 = 11{,}5\sigma \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\sigma = 10;\ \mu = 100.}$$

b) Se trata de una distribución binomial con $n = 5\ y\ r = 3$. Hay que determinar los valores de $p\ y\ q$, para lo cual tenemos en cuenta que $p = P(X > 115)$.

Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$p = P(X > 115) = 1 - P(X \leq 115) = 1 - 0{,}9332 \Rightarrow p = 0{,}0668$ y, en consecuencia: $q = 1 - p = 0{,}9332$.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{5}{3} \cdot 0{,}0668^3 \cdot 0{,}9332^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}000298 \cdot 0{,}8709 = 10 \cdot 0{,}00026$$

BY NC SA

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

2º) Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ es idempotente.

3º) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{Lx}{x-1} & si\ x > 0\ y\ x \neq 1 \\ a & si\ x = 1 \end{cases}$:

a) Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

b) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

c) Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

4º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in R$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(0, 1)$.

5º) Considere el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$.

a) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

b) Si $a = -1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

BY NC SA

6º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$ Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

$b)$ Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$.

7º) Un estudio publicado en Environmental, Science and Technology ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

$a)$ Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

$b)$ En el mismo supuesto que en el apartado $a)$, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

$c)$ Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

$b)$ Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

$c)$ Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución

Sean x, y, z las cantidades que tiene el defraudador en las Islas Caimán, Panamá y Fiji, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ \frac{3}{4}x=3y \\ y+\frac{2}{5}z=\frac{1}{2}x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ x-4y=0 \\ 5x-10y-4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4y.$$

Resolviendo por sustitución: $\left.\begin{array}{r} 4y+y+z=150 \\ 20y-10y-4z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5y+z=150 \\ 10y-4z=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} 10y+2z=300 \\ -10y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6z=300 \Rightarrow z=50.\ 5y+50=150;\ \ 5y=100 \Rightarrow y=20.$$

$x=4\cdot 20 \Rightarrow x=80.$

El número de millones que tiene el defraudador en cada paraíso fiscal es:

80 *en las Islas Caimán*; 20 *en Panamá* y 50 *en Fiji*.

BY NC SA

2º) Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ es idempotente.

Solución

a) Las potencias sucesivas de A son las siguientes:

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ $\quad$ $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$

$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ $\quad$ En general: $A^n = A, \forall n \in N.$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ A\ es\ idempotente: A^{2.022} = A.}}$$

b) Siendo $A^2 = A$, tiene que ser, necesariamente: $|A^2| = |A|$ y esto, en los número reales, solamente se cumple para $|A| = 0\ o\ |A| = 1$, pero como A en inversible su determinante no puede ser cero, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{|A| = 1.}}$$

$$c)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 = a \\ 1-a = (1-a)^2 \\ b = b^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a = 0, a = 1} \\ \boldsymbol{b = 0, b = 1} \end{matrix} \right\}.}$$

BY NC SA

3º) Considere la función $f(x)=\begin{cases}\frac{Lx}{x-1} & si\ x>0\ y\ x\neq 1\\ a & si\ x=1\end{cases}$:

$a)$ Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

$b)$ Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=1$.

$c)$ Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x=1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x=1$.

Solución

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lx}{x-1}=\frac{L\infty}{\infty-1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}\Rightarrow$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.}$$

$b)$ La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{Lx}{x-1}=\frac{L1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow$$

$$\underline{a=1.}$$

$c)$ La función resulta: $f(x)=\begin{cases}\frac{Lx}{x-1} & si\ x>0\ y\ x\neq 1\\ 1\ si\ x=1\end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1-\frac{1}{x}-Lx}{(x-1)^2} & si\ x>0, x\neq 1\ \ (*)\\ 0\ \ si\ x=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Para\ x=1\ \Rightarrow f'(1)=\begin{cases}-L1\ si\ x<0\\ 0\ si\ x\geq 0\end{cases}.$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x=1.}}$$

$(*)$ $g(x)=\frac{Lx}{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-Lx\cdot1}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-Lx}{(x-1)^2}$.

BY NC SA

El valor de la derivada para $x = 1$ es el siguiente:

$$f'(1) = \frac{1-\frac{1}{1}-L1}{(1-1)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{0+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{2\cdot(x-1)\cdot 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x^2}}{2\cdot(x-1)\cdot 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{2x^2\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x^2} = \frac{-1}{2\cdot 1^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f'(1) = -\frac{1}{2}.}}$$

BY NC SA

4º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in R$.

$a)$ Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

$c)$ Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(0,1)$.

Solución

$a)$ $\quad f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Teniendo en cuenta que $y = f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen al dominio en los intervalo $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2).}$$

$b)$ $I = \int e^{-x} \cdot x^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = I. \quad (*)$

$M = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$

$= -e^{-x}(x + 1) + C = M.$

Sustituyendo el valor de M en la expresión (*):

$I = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x + 1)] + C =$

$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}(x + 1) + C = -e^{-x}[x^2 + 2(x + 1)] + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I = \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.}$$

BY NC SA

$c)$ Considerando la función: $F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$, tiene que cumplirse que $F(0) = 1 \Rightarrow -e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 2) + C = 1;\ -1 \cdot 2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$.

$$\boldsymbol{F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 3.}$$

BY NC SA

5º) Considere el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

$b)$ Si $a = -1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

Solución

$a)$ La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2.$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{a \neq -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

$$\boldsymbol{a = -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi.}$$

$b)$ Para $a = -1$, según el apartado anterior, la recta y el plano son secantes.

El sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ -x - z = -2 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$. Resolviendo por sustitución:

$$y = x \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x - z = -2 \\ x + x + z = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x - z = -2 \\ 2x + z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = -1;\ z = 3.$$

$$\boldsymbol{El\ punto\ de\ corte\ de\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ es\ P(-1, -1, 3).}$$

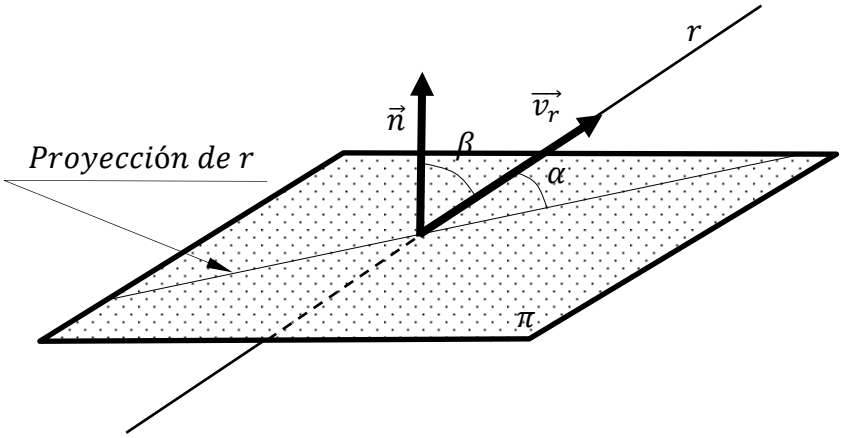
Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ es $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Para $a = -1$ la recta es $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$ y su expresión por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv$

BY NC SA

$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.



$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{|(1,1,1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = arc\ sen\ 0,3333 = \underline{19^\circ\ 28'\ 16''}.}$$

BY NC SA

6º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

a) Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$.

Solución

a) La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector de r son $A(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1,1,1)$.

Un punto y un vector de s son $A(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-2,0,1)$.

Por casualidad se ha obtenido el mismo punto para ambas rectas, lo cual, justifica que las rectas se cortan y, en consecuencia, son coplanarias.

El plano β que las contiene tiene la siguiente expresión general:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ (x-1) - 2y + 2z + y = 0;$$

$$x - 1 - y + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta \equiv x - y + 2z - 1 = 0.}$$

b) Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ es $\vec{n} = (1,-1,2)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1,-1,2) \cdot (-1,1,1) = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$ La recta r y el plano π son paralelos.

La distancia de una recta a un plano paralelo es equivalente a la distancia de un punto de la recta al plano.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $A(1,0,0)$ y al plano $\pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$:

$$d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(r,\pi) = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u.}$$

BY NC SA

7º) Un estudio publicado en Environmental, Science and Technology ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

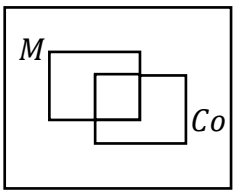
Solución

a) $Datos: P(Co) = 0{,}45;\ \ P(H) = 0{,}505;\ \ P(M) = 0{,}495.$

Dos sucesos Co y M son independientes si $P(Co \cap M) = P(Co) \cdot P(M)$.

$$P = P(Co \cap M) = P(Co) \cdot P(M) = 0{,}45 \cdot 0{,}495 = \underline{0{,}2228}.$$

b) $$P(\overline{M} \cup \overline{Co}) = 1 - P(M \cap Co) = 1 - 0{,}2228 = \underline{0{,}7772}.$$



$P(\overline{M} \cup \overline{Co}) = 1 - P(M \cap Co)$

c) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 8;\ \ p = 0{,}45;\ \ q = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que se contagien, como mucho, 3 personas:

$$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}45^0 \cdot 0{,}55^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}45^1 \cdot 0{,}55^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}45^2 \cdot 0{,}55^6 + \binom{8}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^5\right] =$$

$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0{,}00837 + 8 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}01522 + \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot 0{,}2025 \cdot 0{,}02768 + \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0{,}09113 \cdot 0{,}05033\right) =$$

$$= 1 - (0{,}00837 + 0{,}05479 + 0{,}15695 + 0{,}25685) = 1 - 0{,}47696 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = 0{,}52304}}.$$

BY NC SA

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

$b)$ Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

$c)$ Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución

$a)$ $Datos:\ \mu = 175;\ \ \sigma = 4.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{4}$.

$$P = P(X > 170) = P\left(Z > \frac{170-175}{4}\right) = P\left(Z > \frac{-5}{4}\right) = P(Z > -1{,}25) =$$

$$= \boldsymbol{P(Z \leq 1{,}25) = \underline{0{,}8944}.}$$

$b)$ $P = P(170 < X < 185) = P\left(\frac{170-175}{4} < Z < \frac{185-175}{4}\right) = P\left(\frac{-5}{4} < Z < \frac{10}{4}\right) =$

$= P(-1{,}25 < Z < 2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - P(Z < -1{,}25) =$

$= P(Z < 2{,}5) - [1 - P(Z \leq 1{,}25)] = P(Z < 2{,}5) - 1 + P(Z \leq 1{,}25) =$

$= 0{,}9938 - 1 + 0{,}8944 = 1{,}8882 - 1 = \underline{0{,}8882}.$

$c)$ $Datos:\ \mu;\ \ \sigma = 4.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(\mu, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{4}$.

$$P = P(X > \beta) = P\left(Z > \frac{\beta-175}{4}\right) = 0{,}33;\ \ P\left(Z \leq \frac{\beta-175}{4}\right) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$, al valor 0,6700 le corresponde 0,44, por lo cual:

$\frac{\beta-175}{4} = 0{,}44;\ \ \beta - 175 = 1{,}76 \Rightarrow \beta = 176{,}76.$

El 33 % de la población tiene una altura superior a 176,76 cm.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

upna Universidad Pública de Navarra	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$.

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1, -5, 3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \text{ e } I_2 = \int (3 - 2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx.$$

6º) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{sen\, x + \cos x}}$:

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

7º) Sea la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

b) Comprueba que existe un valor $a \in (-2, -1)$ tal que $f'(a) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = 2 - |x|$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ x+(a^2-4)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+(a^2-4a+4)y+(a^2-2a)z=-a^2+a-1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{pmatrix} y$$

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a(a-2) & -1 \\ 1 & (a+2)(a-2) & 2a-3 \\ 1 & (a-2)^2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a+2 & 2a-3 \\ 1 & a-2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\cdot[a(a+2)(a-2)-a+2+a(2a-3)+a+2-a^2(a-2)-$$

$$-(a-2)(2a-3)]=$$

$$=(a-2)\cdot[a(a^2-4)+4+2a^2-3a-a^3+2a^2-2a^2+3a+4a-6]=$$

$$=(a-2)\cdot[a^3-4a-a^3+2a^2+4a-2]=(a-2)(2a^2-2)=$$

$$=2(a-2)(a^2-1)=0\Rightarrow a_1=-1, a_2=1, a_3=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\begin{cases} a\neq -1 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_2=-3C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

BY NC SA

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 3-1+3-3+3-1=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -4\\ 1 & 0 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & -4\\ 1 & 1 & -8\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} = -3+8+4-3=6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}a=1\\ a=2\end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a\neq -1, a\neq 1\ y\ a\neq 2$:

$$\begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a\\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a\\ 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3\to F_3+F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a\\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1\end{pmatrix} \Rightarrow z=\frac{-a-1}{a^2-1}=\frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow z=\frac{-1}{a-1}.$$

$$2(a-2)y+2(a-1)z=-2a;\ \ (a-2)y+(a-1)\cdot\frac{-1}{a-1}=-a;$$

$$(a-2)y-1=-a;\ \ (a-2)y=1-a \Rightarrow y=\frac{1-a}{a-2}.$$

$$x+a(a-2)y-z=-a^2;\ \ x+a(a-2)\cdot\frac{1-a}{a-2}-\frac{-1}{a-1}=-a^2;$$

$$x+a-a^2+\frac{1}{a-1}=-a^2;\ x+a+\frac{1}{a-1}=0;\ x=-\frac{1}{a-1}-a \Rightarrow x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}, y=\frac{1-a}{a-2}, z=\frac{-1}{a-1}, \forall a\in R-\{-1,1,2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a=-1$. El sistema resulta $\begin{Bmatrix}x+3y-z=-1\\ x-3y-5z=1\\ x+9y+3z=-3\end{Bmatrix}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $z=\lambda$:

$$\begin{Bmatrix}x+3y=-1+\lambda\\ x-3y=1+5\lambda\end{Bmatrix} \Rightarrow 2x=6\lambda;\ \ x=3\lambda. \quad 3y=-1+\lambda-3\lambda;\ \ y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=3\lambda, y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda, z=\lambda, \forall \lambda\in R.}$$

BY NC SA

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

Una matriz es singular cuando no es invertible, es decir: cuando su determinante es cero, por lo cual, tiene que ser $|A^{26}+A^{25}|=0$.

$A^{26}+A^{25}=A^{25}\cdot A+A^{25}\cdot I=A^{25}\cdot(A+I)$.

Teniendo en cuanta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices, puede hacerse lo siguiente:

$|A^{26}+A^{25}|=|A^{25}\cdot(A+I)|=|A^{25}|\cdot|(A+I)|=0.\quad (*)$

Teniendo en cuenta que $|A|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}=1$, sustituyendo en la expresión (*) resulta:

$(|A|)^{25}\cdot|(A+I)|=0;\ \ 1^{25}\cdot|(A+I)|=0\Rightarrow|(A+I)|=0.$

$A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{pmatrix}.$

$|(A+I)|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=0;\ \ t+1=0\Rightarrow t=-1.$

$$\boldsymbol{La\ matriz\ [A^{26}+A^{25}]\ es\ singular\ para\ t=-1.}$$

BY NC SA

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1,-5,3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

SOLUCIÓN

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda;\ z=10-3\lambda;\ y=3-x-z=$$

$$=3-\lambda-10+3\lambda;\ y=-7+2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-7+2\lambda. \\ z=10-3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,-7,10)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,2,-3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)$.

$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=[(1,-5,3)-(0,-7,10)]=(1,2,-7).$$

$$\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OB}=[(1,-5,3)-(0,-1,2)]=(1,-4,1).$$

Se definen los planos π_1 y π_2 de la siguiente forma:

$$\pi_1\left(T;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{AT}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-14(x-1)-3(y+5)+2(z-3)-2(z-3)+6(x-1)+7(y+5)=0;$$

$$-8(x-1)+4(y+5)=0;\ 2(x-1)-(y+5)=0;\ 2x-2-y-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 2x-y-7=0.$$

$$\pi_2\left(T;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{BT}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)-(y+5)-8(z-3)-(z-3)-4(x-1)-2(y+5)=0;$$

$$-3(x-1)-3(y+5)-9(z-3)=0;\ (x-1)+(y+5)+3(z-3)=0;$$

$$x-1+y+5+3z-9=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y+3z-5=0.$$

La recta pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+y+3z-5=0 \end{cases}}$$

La recta t expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+y+3z-5=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-y=7 \\ x+y=5-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x=12-3\lambda;$$

$$x=4-\lambda;\ y=2x-7=8-2\lambda-7 \Rightarrow y=1-2\lambda.$$

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=1-2\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}}$$

BY NC SA

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

El haz de planos β paralelos a $\pi \equiv 2x-y+z=0$ tiene por expresión general $\beta \equiv 2x-y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1,2,-1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv 2x-y+z+D=0 \\ P(1,2,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1-2-1+D=0;\ -1+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv 2x-y+z+1=0.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano γ es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{matrix} x-y+2z=-2 \\ 3x-y-z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{matrix}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2-6-1-2+2+3}{-1-6+2+4-1+3}=\frac{-2}{1}=-2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1}=3-6+4-12-1+6=-6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1}=1+6-6-4+3-3=-3.$$

El punto de corte es $Q(-2,-6,-3)$.

La recta s pedida es la que contiene a los puntos $P(1,2,-1)$ y $Q(-2,-6,-3)$.

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=[(1,2,-1)-(-2,-6,-3)]=(3,8,2)$.

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z+1}{2}.}$$

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \text{ e } I_2 = \int (3-2x)\cdot e^{-2x}\cdot dx.$$

SOLUCIÓN

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x-1} = t \rightarrow x-1 = t^2 \\ \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}\cdot dx = dt \\ x = t^2+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt = arc\ tg\ t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = arc\ tg\ \sqrt{x-1} + C.}$$

$$I_2 = \int (3-2x)\cdot e^{-2x}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3-2x = u \rightarrow du = -2\cdot dx \\ dv = e^{-2x}\cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot(-2\cdot dx) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot(3-2x) - \int e^{-2x}\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot(3-2x) + \frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot[(3-2x)-1] + C = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot(2-2x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_2 = \int (3-2x)\cdot e^{-2x}\cdot dx = e^{-2x}\cdot(x-1) + C.}$$

BY NC SA

6º) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}}$:

$a)$ Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

$b)$ Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto los valores reales de x que anulan la expresión $sen\,x + \cos x$, en cuyo caso, la función no está definida por ser:

$f(x) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty.$

$sen\,x + \cos x = 0 \Rightarrow sen\,x = -\cos x \Rightarrow x = \left\{\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4}\cdots\right\}$, en general:

$x = \frac{4k-1}{4}\pi, \forall k \in N.$

Para $k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. Para $k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi]$.

La función está definida en $[0, \pi], \forall x \in R - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Por ser $f(x)$ una función compuesta por funciones continuas de x, $sen\,x$ y $\cos x$:

$$\boldsymbol{f(x)\ es\ continua\ en\ [0, \pi], excepto\ para\ x = \frac{3\pi}{4}.}$$

$b)$ La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada en ese punto.

Para obtener la derivada de la función se procede del modo siguiente:

$f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{1}{sen\,x+\cos x}.$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1\cdot(\cos x - sen\,x)}{(sen\,x+\cos x)^2} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2} = 0.$

Por ser $e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \neq 0, \forall x \in R$ y $(sen\,x + \cos x)^2 \neq 0, \forall x \in D(f)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow sen\,x - \cos x = 0;\ \ sen\,x = \cos x \Rightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \forall \lambda \in Z.$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$. Para $\lambda = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$.

El único extremo relativo se encuentra para $x = \frac{\pi}{4}$.

Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo puede recurrirse a la segunda derivada, pero lo engorroso del proceso recomienda su determinación por el signo de la primera derivada en diferentes intervalos.

Para el estudio en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ se considera el valor $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Para $x = \frac{\pi}{6} = 30° \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}} \cdot \frac{sen\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}}{\left(sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)^2} = e^{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = (+) \cdot \frac{(-)}{(+)} < 0 \Rightarrow$ En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ la función es decreciente, lo cual implica, teniendo en cuenta la continuidad de la función, que para $x = \frac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

La función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$.

BY NC SA

7º) Sea la función $f(x)=\frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$.

b) Comprueba que existe un valor $a \in (-2,-1)$ tal que $f'(a)=e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

a) La función $f(x)=\frac{e^{x^2-2}}{x}$ es continua en $R-\{0\}$, por ser el cociente de dos funciones continuas, en R el numerador y en $R-\{0\}$ el denominador y, teniendo en cuenta que $0 \notin [-2,-1]$:

$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ [-2,-1]$.

b) $\quad f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2-2}\cdot x-e^{x^2-2}\cdot 1}{x^2}=\frac{e^{x^2-2}\cdot(2x^2-1)}{x^2}$.

La función $f'(x)$ es continua en $(-2,-1)$ por ser un cociente tal que el numerador es el producto de dos funciones continuas en R y el denominador es una función continua en $R-\{0\}$ y, teniendo en cuenta que $0 \notin (-2,-1)$, por lo cual, la función $f'(x)=\frac{e^{x^2-2}\cdot(2x^2-1)}{x^2}$ es continua en $(-2,-1)$.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a,b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$$f'(-2)=\frac{e^{(-2)^2-2}\cdot[2\cdot(-2)^2-1]}{(-2)^2}=\frac{e^2\cdot 7}{4}\cong 12{,}93.$$

$$f'(-1)=\frac{e^{(-1)^2-2}\cdot[2\cdot(-1)^2-1]}{(-1)^2}=\frac{e^{-1}\cdot 1}{1}=\frac{1}{e}\cong 0{,}37.$$

De lo anterior se deduce que:

$f'(-1)\cong 0{,}37<f'(a)=e\cong 2{,}72<f'(-2)\cong 12{,}93$, con lo cual:

$Queda\ probado\ que\ existe\ a \in (-2,-1)\ tal\ que\ f'(a)=e$.

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = 2 - |x|$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

SOLUCIÓN

En primer lugar, nótese que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$.

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x \ si \ x \leq 0 \\ x \ si \ x > 0 \end{cases}$, la función $f(x) = 2 - |x|$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} 2 + x \ si \ x \leq 0 \\ 2 - x \ si \ x > 0 \end{cases}$.

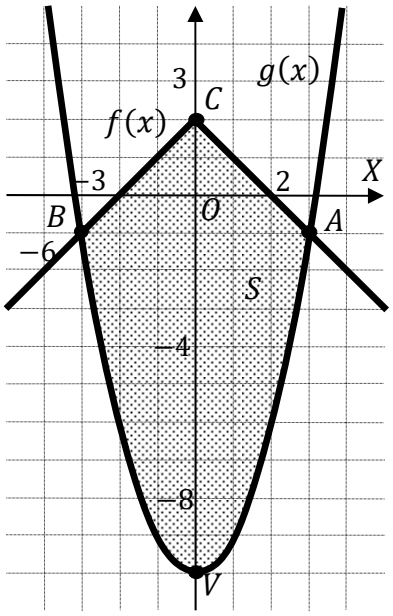
Los puntos de corte de las funciones tienen por abscisas las raíces de las ecuaciones que resultan de la igualación de sus expresiones.

Para $x > 0$: $f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x = x^2 - 10; \ x^2 + x - 12 = 0;$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -4, no \ es > 0 \\ x_2 = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -1).$

Por simetría, otro punto de corte es $B(-3, -1)$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 2 \Rightarrow C(0, 2)$ y que la función $g(x) = x^2 - 10$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $V(0, -10)$, la representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la gráfica adjunta.



Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^3 [(2 - x) - (x^2 - 10)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 - x + 12) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_0^3 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(-9 - \frac{9}{2} + 36 \right) = 2 \cdot \left(27 - \frac{9}{2} \right) = 54 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 45 \ u^2}}.$$

BY NC SA

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

I INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\(a^2-1)x+(a+1)y+(a^2+a)z=2.\\y+(a^2+2a)z=a+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

2º) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

3º) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha\equiv 2x-y-z-1=0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1,2,1)$ y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a $r\equiv\begin{cases}x+y-2z-3=0\\y-z-3=0\end{cases}$.

4º) Encuentra los puntos de la recta $r\equiv\begin{cases}3x-y+z-6=0\\x-y+3z-8=0\end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi\equiv 2x+2y-z-7=0$.

5º) Sea la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

b) Demuestra que existe un valor $a\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ tal que $f'(a)=\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

6º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$.

BY NC SA

7º) Sea la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a \in (2, 4)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\(a^2-1)x+(a+1)y+(a^2+a)z=2.\\y+(a^2+2a)z=a+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2\\ a^2-1 & a+1 & a^2+a\\ 0 & 1 & a^2+2a\end{pmatrix};\ M'=\begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2\\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a^2-1 & a & a^2\\ a^2-1 & a+1 & a^2+a\\ 0 & 1 & a^2+2a\end{vmatrix}\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a^2-1 & a & a^2\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 1 & a^2+2a\end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & a^2+2a\end{vmatrix}=(a^2-1)(a^2+2a-a)=$$

$$=(a^2-1)(a^2+a)=a(a+1)^2(a-1)\Rightarrow a_1=0, a_2=-1, a_3=1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\begin{cases}a\neq 0\\ a\neq -1\\ a\neq 1\end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2-1+2=-1\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=-1\Rightarrow\begin{cases}M'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=-C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2\\ M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M=1\end{cases}.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

BY NC SA

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq -1\ y\ a \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2+a & a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{a+1}{a^2+a} = \frac{a+1}{a(a+1)} \Rightarrow z = \frac{1}{a}.$$

$y + a \cdot \frac{1}{a} = 1;\ \ y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0.\ (a^2-1)x + a^2 \cdot \frac{1}{a} = 1;\ (a^2-1)x = 1 - a;$

$(a+1)(a-1)x = -(a-1);\ \ (a+1)x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{a+1}.$

$$\boldsymbol{Solución: x = \frac{-1}{a+1}, y = 0, z = \frac{1}{a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = 1$. El sistema resulta $\left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ y + 3z = 3 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{matrix}\right\}$ que es compatible indeterminado. Haciendo $x = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -y - z = -1 \\ y + 3z = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z = 2;\ \ z = 1;\ \ y = 0.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = \lambda, y = 0, z = 1, \forall \lambda \in R.}$$

BY NC SA

2º) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = 0;$$

$$ad(e+2f) + cf(a+2b) + be(c+2d) - de(a+2b) - af(c+2d) -$$

$$-bc(e+2f) = (a+2b)(cf-de) + (c+2d)(be-af) + (e+2f)(ad-bc) =$$

$$= acf - ade + 2bcf - 2bde + bce - acf + 2bde - 2adf + ade - bce +$$

$$+2adf - 2bcf = 0.$$

También puede hacerse de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 2b \\ c & d & 2d \\ e & f & 2f \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

$$\boldsymbol{|A \cdot B| = 0, \forall a, b, c, d, e, f, como\ se\ quería\ demostrar.}$$

BY NC SA

3º) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + \lambda;\ \ x = 3 + 2\lambda - 3 - \lambda = \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

También se puede obtener un vector director de r de la forma siguiente:

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + k + 2i + j = i + j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1).$$

Un vector normal del plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$ es $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x + 1) + 2(y - 2) - (z - 1) - 2(z - 1) + (x + 1) + (y - 2) = 0;$$

$$3(y - 2) - 3(z - 1) = 0;\ \ y - 2 - z + 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv y - z - 1 = 0.}$$

BY NC SA

4º) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$.

SOLUCIÓN

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} 3x - y = 6 - \lambda \\ x - y = 8 - 3\lambda \end{matrix} \left.\begin{matrix} 3x - y = 6 - \lambda \\ -x + y = -8 + 3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -2 + 2\lambda;\ \ x = -1 + \lambda;\ \ y = x - 8 + 3\lambda = -1 + \lambda - 8 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -9 + 4\lambda \ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -9 + 4\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta r es $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$.

Se tiene que cumplir que la distancia $d(P, \pi) = 3$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$ y plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$:

$$d(\pi, P) = 3 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (-1 + \lambda) + 2 \cdot (-9 + 4\lambda) - \lambda - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 2\lambda - 18 + 8\lambda - \lambda - 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-27 + 9\lambda|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|-27 + 9\lambda|}{3} = 3;\ \ |-27 + 9\lambda| = 9;\ \ |-3 + \lambda| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -3 + \lambda = 1 \rightarrow \lambda_1 = 4 \\ 3 - \lambda = 1 \rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 4 = 3 \\ y = -9 + 16 = 7 \\ z = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P_1(3, 7, 4).}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -9 + 8 = -1 \\ z = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P_2(1, -1, 2).}$$

BY NC SA

5º) Sea la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

$a)$ Las funciones $sen\, u$ y $\cos u$ existen y son continuas para cualquier valor real de x. Siendo $u = h(x)$, demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que es continua la función $h(x) = \frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}$.

La función $h(x) = \frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}$ es continua en $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ por ser $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \Rightarrow x > 0$ y, en consecuencia $\frac{1}{x} > 0$, teniendo en cuanta que la función logaritmo neperiano está definida en $(0, +\infty)$.

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right)\ es\ continua\ en\ \left[\frac{1}{e}, e\right]}$.

$b)\ f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right) = sen\, u \Rightarrow f'(x) = u'\cdot\cos u.$ (*)

$u = \frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}\cdot(L1 - Lx) = \frac{\pi}{4}\cdot(0 - Lx) \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4}\cdot Lx.$

$u' = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4x}$. Sustituyendo en (*):

$f'(x) = -\frac{\pi}{4x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right)$.

La función $f'(x)$ es continua en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ por ser producto de dos funciones continuas en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ y teniendo en cuenta el aparado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi\cdot e}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot Le\right) = -\frac{\pi\cdot e}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi\cdot e}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\cdot e\sqrt{2}}{8} \cong -1{,}51.$

$f'(e) = -\frac{\pi}{4e}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi}{4e}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8e} \cong -0{,}20.$

Demostrar lo pedido, según lo anterior, equivale a demostrar que:

$f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow -1{,}51 < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < -0{,}20.$

Siendo $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} \cong -0{,}60$, se cumple, en efecto, que: $-1{,}51 < -0{,}60 < -0{,}20$.

$\underline{Queda\ probado\ que\ existe\ a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}}$.

BY NC SA

6º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.\ tipo\ nº\ e\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+x-1}+\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{x^2+x-1}{-x+1}\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+2x+x-1}{x^2+x-1}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}}=e^{-2}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\frac{1}{e^2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}=\frac{(e^0-1)^2}{L(0+1)-0}=\frac{(1-1)^2}{L1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hotipal\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-1)\cdot e^x}{\frac{1}{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{1-x-1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{-x}{x+1}}=\frac{2\cdot e^0\cdot(e^0-1)}{\frac{-0}{0+1}}=\frac{2\cdot 1\cdot 0}{\frac{0}{1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hotipal\}\Rightarrow-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\frac{x}{x+1}}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}=$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1}{(x+1)^2}}=-2\cdot\frac{2e^0-e^0}{\frac{1}{(0+1)^2}}=-2\cdot\frac{2\cdot 1-1}{1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}=-2.}}$$

BY NC SA

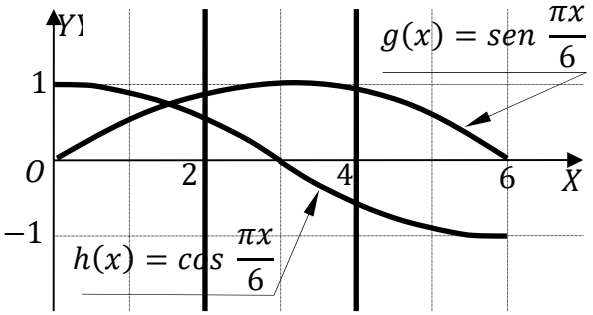
7º) Sea la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a \in (2,4)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

$a)$



Considerando las funciones trigonométricas $g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6}$ y $h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6}$, cuyas gráficas, de forma aproximada, se expresan en la figura adjunta en torno al intervalo $(2,4)$, se observa que, en el mencionado intervalo, todas las ordenadas de la función $g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6}$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6}$, por lo cual se puede deducir que la función $\gamma(x) = g(x) - h(x)$ es tal que $\gamma(x) > 0, \forall x \in (2,4)$.

Para la representación gráfica se ha tenido en cuenta lo siguiente:

$g(x) = sen\ \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \pi;\ \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6.$

$h(x) = cos\ \frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi}{2};\ \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3.$

La función $\gamma(x)$ es continua en R, por ser función diferencia de dos funciones continuas en R.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función logaritmo neperiano es $(0, +\infty)$, de todo lo anterior se deduce, y como se quería demostrar que:

$$\boldsymbol{La\ función\ f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)\ es\ continua\ en\ (2,4).}$$

$b)$ A la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$ le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$"

$$f(2) = L\left(sen\ \frac{2\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6}\right) = L\left(sen\ \frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0.$$

$$f(4) = L\left(sen\ \frac{4\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{6}\right) = L\left(sen\ \frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = L\frac{\sqrt{3}+1}{2} > 0.$$

$$\boldsymbol{Queda\ demostrado\ que\ existe\ a \in (2,4)\ tal\ que\ f(a) = 0.}$$

BY NC SA

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

SOLUCIÓN

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2;\ \ x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Considerando el valor $x = -1 \in (-2, 0)$:

$$\left.\begin{matrix} f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \\ g(-1) = -1 - 2 = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-1) > g(-1).$$

Considerando el valor $x = 1 \in (2, 0)$:

$$\left.\begin{matrix} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \\ g(1) = 1 - 2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(-1) > f(-1).$$

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{0}[f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{2}[g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}[(x^3 - 3x - 2) - (x - 2)] \cdot dx + \int_{0}^{2}[(x - 2) - (x^3 - 3x - 2)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 - 3x - 2 - x + 2) \cdot dx + \int_{0}^{2}(x - 2 - x^3 + 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x) \cdot dx + \int_{0}^{2}(4x - x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2\right] + \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = 8\ u^2.}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+az=a \\ 2x+ay+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a=-1$ y $a=1$, si es posible.

2º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

Segunda parte.

3º) Sea considera la recta $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

4º) Sea el punto $P(1,2,a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto P', simétrico de P con respecto al plano π.

Tercera parte.

5º) Dada la función $f(x)=(x-1)^2 \cdot e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

6º) Sea la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x=1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=3$ sean paralelas a la recta de ecuación $y=2x+1$.

Cuarta parte.

7º) Calcula $I=\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx$.

8º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y=e$, y calcula el área de ese recinto.

BY NC SA

Quinta parte.

9º) Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras: la T con 4 bolas negras y 6 blancas y la R con 7 bolas negras y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

a) Sean negras. b) Sean blancas. c) Sean de distinto color.

10º) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+az=a \\ 2x+ay+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a=-1$ y $a=1$, si es posible.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 2 & a & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=a+2a^2+a-a^2-a^2-2=0;\ \ 2a-2=0;\ \ a-1=0\Rightarrow a=1.$$

$$\boldsymbol{Para\ a\neq 1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2-2}=\frac{1+1-1-1+1-1}{-4}=\frac{0}{-4}=0.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{1-2+1+1+1+2}{-4}=\frac{4}{-4}=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-1+2+1-1+1-2}{-4}=\frac{0}{-4}=0.$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=0, y=-1, z=0.}$$

Para $a=1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$. Haciendo $z=\lambda$:

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=0, y=1-\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

BY NC SA

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$.

SOLUCIÓN

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-2) + 4 - 2m = 0;$$

$2m^2 - 4m + 4 - 2m = 0;\ \ 2m^2 - 6m + 4 = 0;\ \ m^2 - 3m + 2 = 0;$

$m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{1, 2\}.}}$$

$b)$ Para $m = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $|A| = 4$. $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}}$$

BY NC SA

Segunda parte.

3º) Sea considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

SOLUCIÓN

Un punto genérico de r es $P(t, 2t, 0)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(t, 2t, 0)$ y al plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|t+2t+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t-2|}{\sqrt{3}}.$$

La distancia de $P(t, 2t, 0)$ al origen de coordenadas es igual que el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = (t, 2t, 0)$.

$$d(O, P) = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}.$$

$$d(P, \pi) = d(O, P) \Rightarrow \frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5};\ |3t - 2| = t\sqrt{15};\quad (3t - 2)^2 = 15t^2;$$

$9t^2 - 12t + 4 = 15t^2;\ 6t^2 + 12t - 4 = 0;\ 3t^2 + 6t - 2 = 0;\ t = \frac{-6\pm\sqrt{36+24}}{6} =$

$= \frac{-6\pm\sqrt{60}}{6} = \frac{-6\pm\sqrt{4\cdot15}}{6} = \frac{-6\pm2\sqrt{15}}{6} = \frac{-3\pm\sqrt{15}}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{-3-\sqrt{15}}{3}, t_2 = \frac{-3+\sqrt{15}}{3}.$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

$$\boldsymbol{P_1\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0\right)\ y\ P_2\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0\right).}$$

BY NC SA

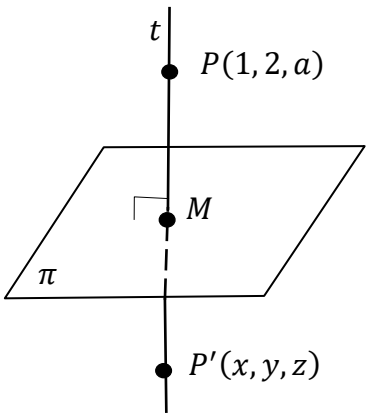
4º) Sea el punto $P(1,2,a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto P', simétrico de P con respecto al plano π.

SOLUCIÓN

La recta t que pasa por $P(1,2,a)$ y es perpendicular al plano π, tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,1,2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x+y+2z=3 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+a+\lambda=3;$$



$$3\lambda=-a;\ \ \lambda=-\frac{a}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{a}{3}=\frac{3-a}{3} \\ y=2-\frac{a}{3}=\frac{6-a}{3} \\ z=a-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3-a}{3},\frac{6-a}{3},\frac{a}{3}\right).$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{x+1}{2}=\frac{3-a}{3};\ \ 3x+3=6-2a;\ \ 3x=3-2a \Rightarrow x=\frac{3-2a}{3} \\ \frac{y+2}{2}=\frac{6-a}{3};\ \ 3y+6=12-2a;\ \ 3y=6-2a \Rightarrow y=\frac{6-2a}{3} \\ \frac{z+a}{2}=\frac{a}{3};\ \ 3z+3a=2a;\ \ 3z=-a \Rightarrow z=\frac{-a}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P'\left(\frac{3-2a}{3},\frac{6-2a}{3},\frac{-a}{3}\right)}.$$

BY NC SA

Tercera parte.

5º) Dada la función $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

SOLUCIÓN

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-2x} = \frac{(x-1)^2}{e^{2x}}.$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot e^{2x} - (x-1)^2\cdot 2\cdot e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot[1-(x-1)]}{e^{2x}} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}} = 0;\ (x-1)\cdot(2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ una función continua en su dominio, que es R, las raíces de la derivada dividen al dominio en los intervalos $(-\infty, 1), (1, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in (-\infty, 1)$:

$$f'(0) = \frac{2\cdot(0-1)\cdot(2-0)}{e^{2\cdot 0}} = \frac{-4}{e^0} = \frac{-4}{1} < 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 1) \cup (2, +\infty).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(1, 2).}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento así como de la continuidad de la función se deducen los máximos y mínimos relativos, no obstante, se hace su estudio mediante derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}} = \frac{2\cdot(2x-x^2-2+x)}{e^{2x}} = -2\cdot\frac{x^2-3x+2}{e^{2x}}.$$

$$f''(x) = -2\cdot\frac{(2x-3)\cdot e^{2x} - (x^2-3x+2)\cdot 2\cdot e^{2x}}{e^{4x}} = -2\cdot\frac{2x-3-2x^2+6x-4}{e^{2x}} = 2\cdot\frac{2x^2-8x+7}{e^{2x}}.$$

$$f''(1) = 2\cdot\frac{2-8+7}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1. \quad f(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Mín. \Rightarrow A(1, 0).}$$

$$f''(2) = 2\cdot\frac{8-16+7}{e^4} = \frac{-2}{e^4} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.\ f(2) = \frac{1}{e^4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máx. \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{e^4}\right).}$$

BY NC SA

6º) Sea la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros $A, B\ y\ C$ para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

SOLUCIÓN

Por anularse para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$:

$f(1) = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C = 0;\ A + B + C = -1.$ (1)

Por tener tangentes paralelas a la recta $y = 2x + 1$ para $x = -1$ y $x = 3$ tiene que cumplirse que: $f'(-1) = f'(3) = 2$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$

$f'(-1) = 2 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2A \cdot (-1) + B = 2;\ -2A + B = -1.$ (2)

$f'(3) = 2 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2A \cdot 3 + B = 2;\ 6A + B = -25.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3):

$$\left.\begin{matrix} -2A + B = -1 \\ 6A + B = -25 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2A - B = 1 \\ 6A + B = -25 \end{matrix} \Rightarrow 8A = -24;$$

$$\boldsymbol{A = -3.}$$

$-2 \cdot (-3) + B = -1;\ 6 + B = -1;$

$$\boldsymbol{B = -7.}$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de A y B:

$A + B + C = -1;\ -3 - 7 + C = -1;$

$$\boldsymbol{C = 9.}$$

BY NC SA

Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx$.

SOLUCIÓN

$$x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2 \Rightarrow$$

El polinomio $x^2 - x - 2$ puede expresarse como $(x+1)(x-2)$.

$$I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx. \quad (*)$$

$$\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2)(x+1) + C \cdot (x-2)}{(x-2)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A \cdot (x^2+2x+1) + B \cdot (x^2-x-2) + Cx - 2C}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx - 2C}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-B+C=7 \\ A-2B-2C=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = -A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2A+A+C=7 \\ A+2A-2C=13 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3A+C=7 \\ 3A-2C=13 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3A+C=7 \\ -3A+2C=-13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3C = -6;\ \ C = -2;$$

$3A - 2 = 7;\ \ 3A = 9;\ \ A = 3;\ \ B = -3.$

Sustituyendo en la expresión (*):

$$I = \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx = \int \left[\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right] \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot L|x-2| - 3 \cdot L|x+1| - 2I_1 \Rightarrow I = 3 \cdot L\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - 2I_1. \quad (**)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \int (x+1)^{-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int t^{-2} \cdot dx =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + K = -\frac{1}{t} + K \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{x+1} + K. \quad \text{Sustituyendo este valor en (**):}$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = 3 \cdot L\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} + K.}}$$

BY NC SA

8º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN

La funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = g(x)$ y se cortan en el punto $A(0, 1)$.

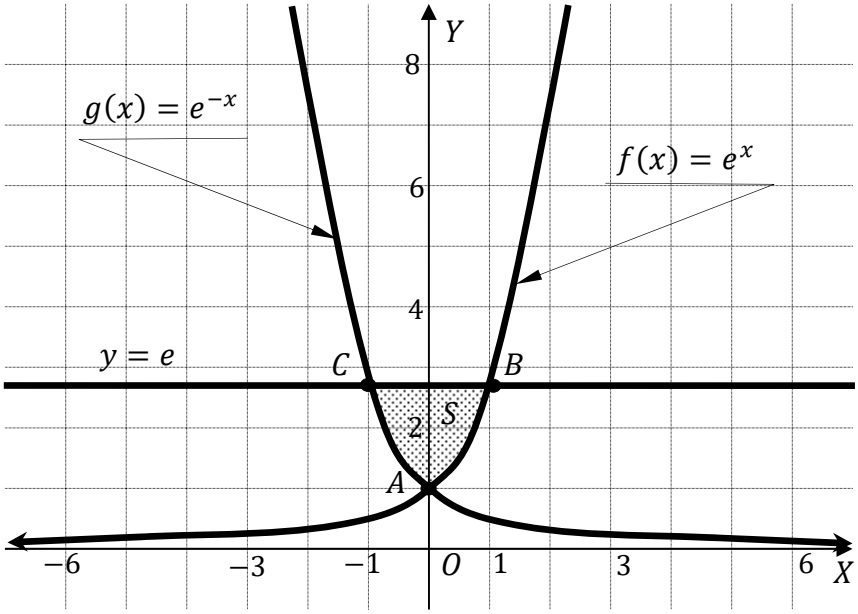
$f(x) = e^x$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in R$.

Por ser $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, el semieje $-X$ es asíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

$g(x) = e^{-x}$ es monótona creciente por ser $g'(x) = -e^x < 0, \forall x \in R$.

Por ser $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, el semieje $+X$ es asíntota horizontal de $g(x) = e^{-x}$.

Los puntos de corte de la recta $y = e$ con las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son B y C, respectivamente.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la recta $y = e$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [y - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 [e - e^x] \cdot dx = 2 \cdot [ex - e^x]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot [(e \cdot 1 - e^1) - (e \cdot 0 - e^0)] = 2 \cdot [(e - e) - (0 - 1)] = 2 \cdot (0 + 1) = 2.$$

$$\boldsymbol{S = 2\ u^2.}$$

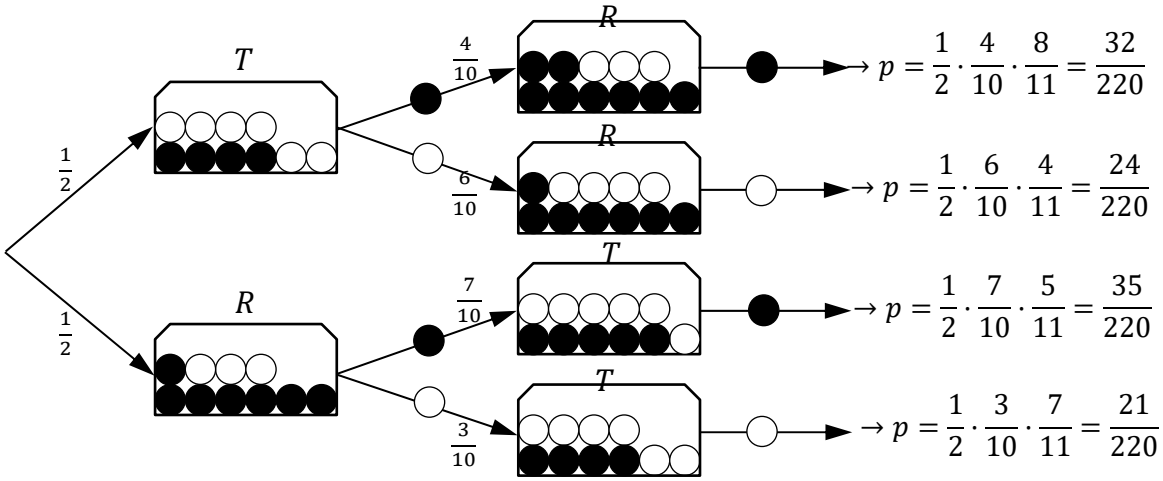
BY NC SA

Quinta parte.

9º) Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras: la T con 4 bolas negras y 6 blancas y la R con 7 bolas negras y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

$a)$ Sean negras. $b)$ Sean blancas. $c)$ Sean de distinto color.

SOLUCIÓN



$a)$ $P = P(NN) = P(N \cap T) \cdot P(N \cap R) + P(N \cap R) \cdot P(N \cap T) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{32}{220} + \frac{35}{220} = \underline{\frac{67}{220} = 0{,}3045.}$

$b)$ $P = P(BB) = P(B \cap T) \cdot P(B \cap R) + P(B \cap R) \cdot P(B \cap T) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{24}{220} + \frac{21}{220} = \frac{45}{220} = \underline{\frac{9}{44} = 0{,}2045.}$

$c)$ $P = 1 - [P(NN) + P(BB)] = 1 - \left(\frac{67}{220} + \frac{45}{220}\right) = 1 - \frac{112}{220} = 1 - \frac{28}{55} =$

$= \frac{55-28}{55} = \underline{\frac{27}{55} = 0{,}4909.}$

BY NC SA

10º) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

$a)$ Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

$b)$ Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

SOLUCIÓN

$Datos:\ \mu = 52;\ \ \sigma = 6{,}5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(52;\ 6{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-52}{6{,}5}$.

$a)\ P = P(50 \le X \le 68) = P\left(\frac{50-52}{6{,}5} \le Z \le \frac{68-52}{6{,}5}\right) = P\left(\frac{-2}{6{,}5} \le Z \le \frac{16}{6{,}5}\right) =$

$= P(-0{,}31 \le Z \le 2{,}46) = P(Z \le 2{,}46) - P(Z \le -0{,}31) =$

$= P(Z \le 2{,}46) - [1 - P(Z \le 0{,}31)] = P(Z \le 2{,}46) - 1 + P(Z \le 0{,}31) =$

$= 0{,}9931 - 1 + 0{,}6217 = 1{,}6148 - 1 = 0{,}6148.$

$b)\ P = P(X > \beta) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 0{,}3;$

$P\left(Z \le \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Mirando este valor en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,7 le corresponde el valor $0{,}52$:

$\frac{\beta-52}{6{,}5} = 0{,}52;\ \ \beta - 52 = 0{,}52 \cdot 6{,}5 = 3{,}38;\ \ \beta = 3{,}38 + 52 = 55{,}38.$

El 30 % de las piezas pesa más de 55,38 gramos.

BY NC SA

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} ax + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a = 1$, si es posible.

2º) Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$.

Segunda parte.

3º) Sea la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

4º) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de s tal que el punto $P(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Tercera parte.

5º) Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

6º) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax \ \ si \ \ x \leq 1 \\ Bx - A \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$.

$a)$ Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

$b)$ Haz la representación gráfica de la función f con los valores A y B obtenidos en el apartado anterior.

Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int L(x^2 - 1) \cdot dx$.

8º) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

BY NC SA

Quinta parte.

9º) Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos 2 bolas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

10º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos 2 coches?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} ax+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=a \\ ax+2y-z=1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a=1$, si es posible.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2a-8-4a+4a+4a+4=0;\ \ 2a-4=0;$$

$a-2=0 \Rightarrow a=2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a\neq 2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.I.}}$$

Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=1 \\ x+2y-z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2-4}=\frac{-4-4-4+4+8+2}{-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-1-4-4+2+2+4}{-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{2+8+2-4-2-4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=-1,\ y=\frac{1}{2},\ z=-1.}}$$

BY NC SA

2º) Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6;\ 2 \cdot \begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6;$$

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 3;\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3;\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + 0 = 3;$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

BY NC SA

Segunda parte.

3º) Sea la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Solución:

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 3x + ay + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$.

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que el sistema anterior sea compatible indeterminado, es decir: que tenga infinitas soluciones, para lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas; es decir: ambos rangos tienen que ser dos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Rang\ M = 2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 1 - a - 3 + 3 - a = 0;$$

$10 - 2a = 0;\ \ 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5.$

$$a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

No existe ningún valor real de a para que r esté contenida en el plano π.

BY NC SA

4º) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de s tal que el punto $P(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + y = -4\lambda \\ x - y = -8\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x = -12\lambda;\ \ x = -3\lambda;$$

$$y = x + 2\lambda = -3\lambda + 2\lambda \Rightarrow y = -\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.$$

Un punto genérico de r es $Q(-3\lambda, -\lambda, 3\lambda)$.

Para que $P(-3, s, s) \in r$ tiene que ser: $\begin{cases} x = -3\lambda = -3 \rightarrow \lambda = 1 \\ y = -\lambda = s = -1 \\ z = 4\lambda = s = 4 \end{cases} \Rightarrow P \notin r.$

No existe ningún valor real de s para que P esté contenida en la recta r.

BY NC SA

Tercera parte.

5º) Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

La pendiente de la recta $y = 3x - 2$ es $m = 3$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 6x^2 - 3.$

$f'(x) = m = 3 \Rightarrow 6x^2 - 3 = 3;\ \ 6x^2 = 6;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2 \Rightarrow P_1(-1, 2).$

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow P_2(1, 0).$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada a los puntos hallados:

$y - 2 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{t_1 \equiv 3x - y + 5 = 0.}$$

$y - 0 = 3 \cdot (x - 1) = 3x - 3 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{t_2 \equiv 3x - y - 3 = 0.}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 6x^2 - 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 3 = 0;\ \ 2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, donde la función, por ser polinómica, es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es $f'(0) = -3 < 0 \Rightarrow Dec.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).}$$

BY NC SA

6º) Sea $f(x)=\begin{cases}x^2+Ax & si\ \ x\le 1\\ Bx-A & si\ \ x>1\end{cases}$.

$a)$ Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

$b)$ Haz la representación gráfica de la función f con los valores A y B obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $A\ y\ B$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+Ax)=1+A=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(Bx-A)=B-A\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow 1+A=B-A\Rightarrow 2A-B=-1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $A\ y\ B$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}2x+A & si\ \ x\le 1\\ B & si\ \ x>1\end{cases}\Rightarrow x=1\ \Rightarrow f'(1)=\begin{cases}2+A & si\ \ x\le 1\\ B & si\ \ x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2+A=B;\ \ A-B=-2. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix}2A-B=-1\\ A-B=-2\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2A-B=-1\\ -A+B=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=1;\ \ 1-B=-2\Rightarrow B=3.$$

La función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$ para $A=1$ y $B=3$.

$b)$ La función resulta ser: $f(x)=\begin{cases}x^2+x & si\ \ x\le 1\\ 3x-1 & si\ \ x>1\end{cases}$.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que el intervalo $(-\infty,1)$ la función es la parábola $g(x)=x^2+x$, que es convexa (∪) por ser positivo el coeficiente de x^2 y que tiene su vértice en el punto siguiente:

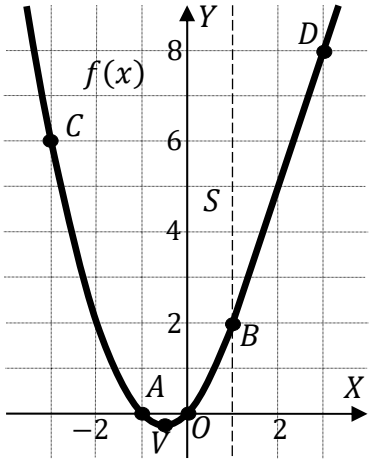
$$g'(x)=2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0,0), A(-1,0),\ B(1,2)$ y $C(-3,6)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ la función es la semirrecta $h(x)=3x-1$ cuyo origen es el punto $B(1,2)$ y que contiene al punto $D(3,8)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



BY NC SA

Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int L(x^2-1)\cdot dx$.

Solución:

Procediendo por el método de integración "por partes":

$$I = \int L(x^2-1)\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} u = L(x^2-1) \to du = \frac{2x}{x^2-1}\cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x^2-1)\cdot x - \int x\cdot\frac{2x}{x^2-1}\cdot dx = x\cdot L(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\cdot dx =$$

$$= x\cdot L(x^2-1) - \int \frac{2x^2-2+2}{x^2-1}\cdot dx = x\cdot L(x^2-1) - \int \frac{2(x^2-1)+2}{x^2-1}\cdot dx =$$

$$= x\cdot L(x^2-1) - \int \left(2+\frac{2}{x^2-1}\right)\cdot dx = x\cdot L(x^2-1) - 2\int dx - 2\cdot\int \frac{1}{x^2-1}\cdot dx =$$

$$= x\cdot L(x^2-1) - 2x - 2\cdot A = I. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{1}{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \quad x^2-1 = (x+1)(x-1).$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+N)}{x^2-1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} M+N=0 \\ -M+N=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2N = 1;\ \ N = \frac{1}{2} \Rightarrow M = -\frac{1}{2}.$$

$$A = \int \frac{1}{x^2-1}\cdot dx = \int \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right)\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot L|x+1| + \frac{1}{2}\cdot L|x-1| + C =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\left[L|x-1| + \frac{1}{2}\cdot L|x+1|\right] + C \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot L\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. Sustituyendo en (*):

$$\boldsymbol{I = \int L(x^2-1)\cdot dx = x\cdot L(x^2-1) - 2x - L\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.}$$

BY NC SA

8º) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

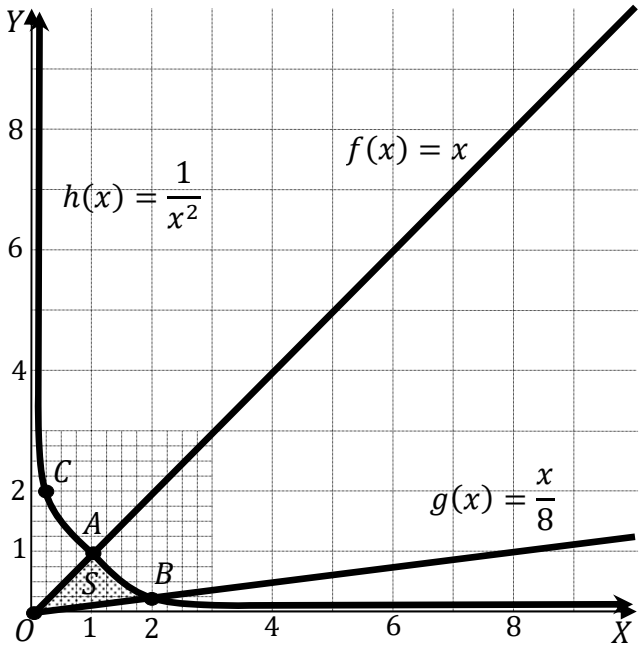
Solución:

Los puntos de corte en el primer cuadrante de la función $h(x) = \frac{1}{x^2}$ con las rectas $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x}{8}$ son los siguientes:

$h(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x;\ \ 1 = x^3;\ \ x = 1;\ \ f(1) = 1 \Rightarrow A(1,1).$

$h(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{x}{8};\ \ 8 = x^3;\ \ x = 2;\ \ g(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{4}\right).$

Por simetría con respecto al origen de la función $h(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{4}, 2\right).$



La representación gráfica, aproximada, de la situación se empresa en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie S a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [h(x) - g(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) \cdot dx = \int_0^1 \frac{8x-x}{8} \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \int_0^1 x \cdot dx + \int_1^2 x^{-2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx = \frac{7}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{16} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{8}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\boldsymbol{S = \frac{3}{4}\ u^2 = 0,75\ u^2.}$$

BY NC SA

Quinta parte.

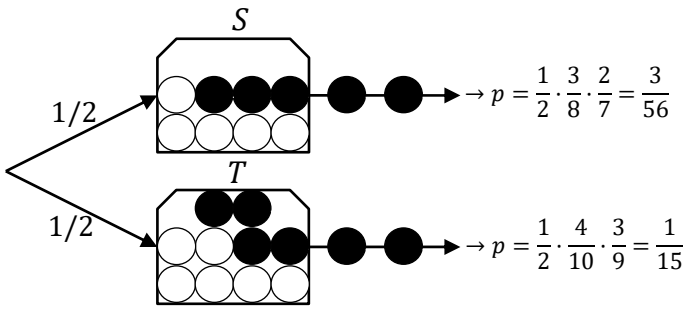
9º) Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos 2 bolas:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

$b)$ Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Solución:

$a)$



$$P = P(nn) = P(S \cap nn) + P(T \cap nn) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{45+56}{15\cdot 56} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P = \frac{101}{840}.}$$

$b)$ $$P = P\left(\frac{T}{nn}\right) = \frac{P(T\cap nn)}{P(nn)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{101}{840}} = \frac{1\cdot 840}{15\cdot 101} = \frac{168}{3\cdot 101} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P = \frac{56}{101}.}$$

BY NC SA

10º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos 2 coches?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 50;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 50 \cdot 0{,}6 = 30 > 5 \\ n \cdot q = 50 \cdot 0{,}4 = 20 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}6 = 30.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{12} \cong 3{,}464.$$

$$X = B(50;\ 0{,}6) \approx N(30;\ 3{,}464).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-30}{3{,}464}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{19{,}5-30}{3{,}464}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10{,}5}{3{,}464}\right) \cong P(Z \geq -3{,}03) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}03) = \underline{0{,}9988}.$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 20) = \underline{0,9988}.}$$

$b)$ $\quad P = P(30 \leq X \leq 40) \Rightarrow \{Yates\} \Rightarrow P(29{,}5 \leq X \leq 40{,}5) =$

$$= P\left(\frac{29{,}5-30}{3{,}464} \leq Z \leq \frac{40{,}5-30}{3{,}464}\right) = P\left(\frac{-0{,}5}{3{,}464} \leq Z \leq \frac{10{,}5}{3{,}464}\right) = P(-0{,}14 \leq Z \leq 3{,}03) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}03) - [1 - P(Z \leq -0{,}14)] = P(Z \leq 3{,}03) - 1 + P(Z \leq 0{,}14) =$$

$$= 0{,}9988 - 1 + 0{,}5557 = 1{,}5545 - 1 = \underline{0{,}5545}.$$

$$\boldsymbol{P(30 \leq X \leq 40) = \underline{0,5545}.}$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

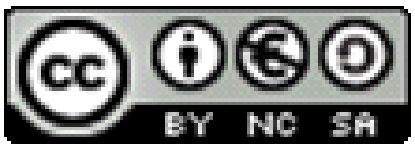
VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguiano





GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)

b) Calcular la matriz *X* que verifica $CX = AB^TX + I$ donde *I* es la matriz identidad. (3 puntos)

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural *n*. (3 puntos)

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz *A* en función del parámetro real *m*. (4 puntos)

b) La matriz inversa de *A* en el caso $m = 2$. (4 puntos)

c) El número real *m* para el cual el determinante de la matriz 2*A* es igual a -8. (2 puntos)

Problema 3:

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de *r* y *s*. (5 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta *l* que pasa por el origen y corta a *r* y *s*. (5 puntos)

Problema 4:

Dados los planos $\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)

b) Calcular el punto *P'* que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1 (4 puntos)

CC BY NC SA

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y *r.* (3 puntos)

Problema 5:

Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$, obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)

d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6:

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^TX + I$ donde I es la matriz identidad. (3 puntos)

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^nI$ para todo número natural n. (3 puntos)

Solución:

a) Demostrar que$C - AB^T$ tiene inversa y calcularla.

Para demostrar que una matriz cuadrada tiene inversa sólo tenemos que comprobar que su determinante es diferente de cero.

Vamos a ver cuál es la matriz que nos preguntan. Para ello realizamos los cálculos oportunos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{matrix} 1 & 0 \\ (1 & 1) \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 \\ (1 & 1) \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora sólo tenemos que calcular su determinante:

$$|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 1 = 3 \neq 0$$

Como es diferente de cero la inversa existe.

Vamos a calcularla. Podemos hacerlo por dos métodos, Gauss o determinantes. Yo lo voy a resolver por ambos pero en el examen basta con utilizar uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$$

$F_1 = 3F_1 + F_2$

$F_1 = F_1/(-3)$
$F_2 = F_2/(-3)$

Por lo que tenemos que: $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Podemos comprobar (es conveniente) el resultado aplicando que: $(C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) = I$

BY NC SA

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+0\cdot(\frac{-1}{3}) & -1\cdot 1-3\cdot(\frac{-1}{3}) \\ 0\cdot(-1)+0\cdot(\frac{-1}{3}) & 0\cdot 1+(\frac{-1}{3})\cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el cálculo es correcto.

Si lo hacemos por determinantes utilizamos la fórmula:

$$(C-AB^T)^{-1} = \frac{1}{|C-AB^T|}(Adj(C-AB^T))^T$$

Tenemos que: $|C-AB^T| = 3$

$$(C-AB^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Que es el mismo resultado que el anterior por lo que no vamos a comprobarlo.

$$(C-AB^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^TX + I$ donde I es la matriz identidad.

Primero tenemos que resolver con las letras:

$CX - AB^TX = I$ (pasamos las incógnitas al miembro de la izquierda)

$(C-AB^T)X = I$ (sacamos factor común por la derecha la incógnita)

$(C-AB^T)^{-1}\cdot(C-AB^T)X = (C-AB^T)^{-1}\cdot I$ (multiplicamos por la izquierda por la inversa del coeficiente de X)

Aplicando que una matriz por su inversa es la identidad tenemos que:

$I\cdot X = (C-AB^T)^{-1}\cdot I$

Como una matriz por la identidad es la misma matriz tenemos que:

$X = (C-AB^T)^{-1}$

Pero esta es la matriz que hemos calculado en el apartado anterior, por lo que no hace falta volver a calcularla:

$$X = (C-AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^nI$ para todo número natural n.

Este es un ejercicio de sacar la potencia enésima. Se puede resolver por inducción. El producto de matrices de la izquierda lo hicimos en el apartado a):

$$A\cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que se puede escribir la matriz siguiendo la norma del enunciado:

$(A \cdot B^T)^1 = 2^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si calculamos ahora el cuadrado tenemos:

$(A \cdot B^T)^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por lo que también se cumple.

Lo suponemos cierto para *n*-1, es decir:

$(A \cdot B^T)^{n-1} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} I$

Lo calculamos para *n*:

$(A \cdot B^T)^n = (A \cdot B^T)^{n-1} \cdot (A \cdot B^T) = 2^{n-1} I \cdot 2I = 2^n I$

Por lo que queda demostrado.

$$(AB^T)^n = 2^n I$$

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz *A* en función del parámetro real *m*.

b) La matriz inversa de *A* en el caso $m = 2$.

c) El número real *m* para el cual el determinante de la matriz 2*A* es igual a -8.

Solución:

a) El rango de la matriz *A* en función del parámetro real *m*.

Esta matriz es de dimensión 3x3 por lo que su rango será a lo sumo 3. Observamos que no hay ningún menor de orden 2 que no dependa de *m* por lo que lo más fácil es intentar ver cuando el rango es 3. Para ello tenemos que calcular el menor de orden 3 (el determinante de toda la matriz) y ver cuándo es cero en función de *m*:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m^3 + 0 - 4m^2 \cdot (m-1) - 0 - 0 - 2m^2 = m^3 - 4m^3 + 4m^2 - 2m^2$$
$$= -3m^3 + 2m^2$$

Igualando a cero el determinante: $-3m^3 + 2m^2 = 0$

Sacamos factor común la m^2: $m^2 \cdot (-3m + 2) = 0$ Primera solución: $m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

Segunda solución: $-3m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3}$

Estudiamos los dos casos:

Si $m = 0$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que no va a haber ningún menor de orden 2 diferente de cero ya que cualquier menor incluye una columna de ceros. Por lo tanto el rango será 1.

Si $m = \frac{2}{3}$ la matriz queda: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$

En esta matriz si podemos buscar menores de orden 2 diferentes de cero:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = \frac{8}{27} - 0 = \frac{8}{27} \neq 0$$

Por lo que el rango es 2.

Por lo tanto:

El rango de la matriz *A* en función del parámetro real *m*:

- Si $m = 0$ tenemos que $RgA = 1$
- Si $m = \frac{2}{3}$ tenemos que $RgA = 2$
- Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$ el $RgA = 3$

b) La matriz inversa de *A* en el caso $m = 2$.

Viendo la discusión anterior sabemos que para el caso $m = 2$ el determinante de la matriz A es $|A| = -3m^3 + 2m^2 = -3(2)^3 + 2(2)^2 = -24 + 8 = -16 \neq 0$ por lo que la matriz inversa existe.

Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando: $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & \frac{-1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} \\ 0-1+1 & 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ 0-1+1 & 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el resultado es correcto.

c) El número real *m* para el cual el determinante de la matriz 2*A* es igual a -8.

Queremos calcular el $|2A|$ aplicando propiedades de los determinantes y que la matriz *A* es de dimensión 3x3 sabemos que:

$$|2A| = 2^3|A| = 8|A|$$

Como queremos que valga -8 tenemos que igualar a ese valor:

$$|2A| = 2^3|A| = 8|A| = -8 \rightarrow |A| = -1$$

En el apartado a) hemos obtenido el determinante de la matriz en función del valor de *m* por lo que hay que resolver:

$$-3m^3+2m^2=-1 \rightarrow -3m^3+2m^2+1=0$$

Es una ecuación cúbica que tenemos que factorizar por Ruffini:

	-3	2	0	1
1		-3	-1	-1
	-3	-1	-1	0

La ecuación de 2º grado resultante de la primera factorización es:$-3m^2-m-1=0$

que podemos comprobar que no tiene soluciones reales: $m=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-3)\cdot(-1)}}{2\cdot(-3)}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{-6}$

Por lo que la factorización queda: $-3m^3+2m^2+1=0\rightarrow(m-1)\cdot(-3m^2-m-1)=0$

La única solución real es la solución del problema: $\boldsymbol{m=1}$

Problema 3:

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de *r* y *s*.

b) Hallar la ecuación de la recta *l* que pasa por el origen y corta a *r* y *s*.

Solución:

Lo primero que hemos de tener en cuenta en este problema es que las rectas que nos han dado están en forma implícita pero nos han despejado *x* e *y* en función de *z* por lo que sería muy fácil pasarlas a paramétricas identificando *z* con el parámetro y hallar un punto y un vector de cada una de ellas:

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow P_r = (-1,2,0);\ \overrightarrow{v_r} = (1,-3,1)$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 4 - 5\alpha \\ y = -3 + 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow P_s = (4,-3,0);\ \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1)$$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de *r* y *s*.

Dos rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$ pueden ser: coincidentes, paralelas, secantes o se cruzan.

Para las dos primeras formas los vectores directores tienen que ser proporcionales. Es fácil comprobar que no lo son: $\frac{1}{-5} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por lo que tienen que cortarse en un punto o cruzarse.

Hallamos ahora un vector auxiliar a partir de los puntos de ambas rectas:

$\overrightarrow{P_rP_s} = (4-(-1), -3-2, 0-0) = (5,-5,0)$ (Podríamos tomar el $(1,-1,0)$)

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$, y $\overrightarrow{P_rP_s}$ son **coplanarios** las rectas se cortan en un punto, en caso contrario **se cruzan**.

Si son coplanarios han de depender linealmente por lo que el determinante formado por los tres vectores debe valer cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 25 - 20 - 0 + 5 = -5 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas se cruzan en el espacio.

b) Hallar la ecuación de la recta *l* que pasa por el origen y corta a *r* y *s*.

Queremos básicamente la ecuación de una recta que se apoye en las que nos han dado y pase por un punto determinado (el origen).

La forma más sencilla de abordar este apartado es con el haz de planos de ambas rectas:

- Hallamos la ecuación del plano que contiene a *r* y pasa por el origen.
- Hallamos la ecuación del plano que contiene a *s* y pasa por el origen.

Textos Marea Verde
BY NC SA

La intersección de ambos planos será una recta que se apoyará en las rectas dadas y pasará por el origen.

Para obtener el haz de planos hemos de tener las rectas en forma general o implícita. Esto es muy sencillo pasando todos los elementos al miembro de la izquierda:

$$r:\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Haz de planos de la recta *r* (son todos los planos que contienen a la recta):

$$r:\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow (x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0$$

Como queremos que pase por el origen sustituimos las coordenadas y hallamos el *k*:

$$(x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow (0 - 0 + 1) + k(0 + 3 \cdot 0 - 2) = 0 \rightarrow 1 - 2k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en el haz de planos ya tenemos el primer plano buscado:

$$(x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow (x - z + 1) + \frac{1}{2}(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$$

Como la ecuación del plano está igualada a cero podemos multiplicarla por 2 para simplificar el resultado: $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \rightarrow 2x + y + z = 0$

Hacemos lo mismo para la otra recta.

Haz de planos de la recta *s* (son todos los planos que contienen a la recta):

$$s:\begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow (x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0$$

Como queremos que pase por el origen sustituimos las coordenadas y hallamos el *k*:

$$(x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow (0 + 5 \cdot 0 - 4) + k(0 - 4 \cdot 0 + 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo en el haz de planos ya tenemos el segundo plano buscado:

$$(x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow (x + 5z - 4) + \frac{4}{3}(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = 0$$

Como la ecuación del plano está igualada a cero podemos multiplicarla por 3 para simplificar el resultado: $x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \rightarrow 3x + 4y - z = 0$

La ecuación de la recta *l* es la intersección de ambos planos:

$$l:\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

BY NC SA

Problema 4:

Dados los planos $\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Calcular el punto *P'* que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del planoπ_1

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1y *r.*

Solución:

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

Dos planos en el espacio sólo pueden ser coincidentes, paralelos o que se corten según una recta.

Para conocer esa posición relativa basta con comparar sus vectores normales. El vector normal es el vector formado por los coeficientes de la ecuación general del mismo. El primero de los planos lo tenemos en forma general por lo que la obtención del vector normal es inmediata:

$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2, -1, -1)$

El segundo plano está en forma paramétrica por lo que tenemos que pasarlo a forma general. Para ello tomamos del plano un punto y dos vectores directores:

$$\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow P_2 = (-1,1,0);\ \vec{v} = (1,1,1);\ \vec{w} = (0,1,-1)$$

Y aplicamos la ecuación cartesiana: $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x+1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}z = 0$$

Calculando el valor de los menores tenemos que:

$-2(x+1) + (y-1) + z = 0 \rightarrow -2x + y + z - 3 = 0$

$\pi_2 \equiv -2x + y + z - 3 = 0$

Por lo que tenemos que $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,1)$

Tomando ahora ambos vectores normales observamos que son proporcionales:

$\overrightarrow{n_1} = (2,-1,-1);\ \overrightarrow{n_2} = (-2,1,1) \rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1}$

Como los vectores normales son proporcionales sólo pueden ser coincidentes o paralelos. Los coincidentes tendrán todos los puntos en común mientras que, si son paralelos, no tendrán ningún punto en común.

Tomamos un punto de π_2y comprobamos si pertenece también aπ_1:

Sustituimos el punto $P_2 = (-1,1,0)$ en la ecuación de π_1:

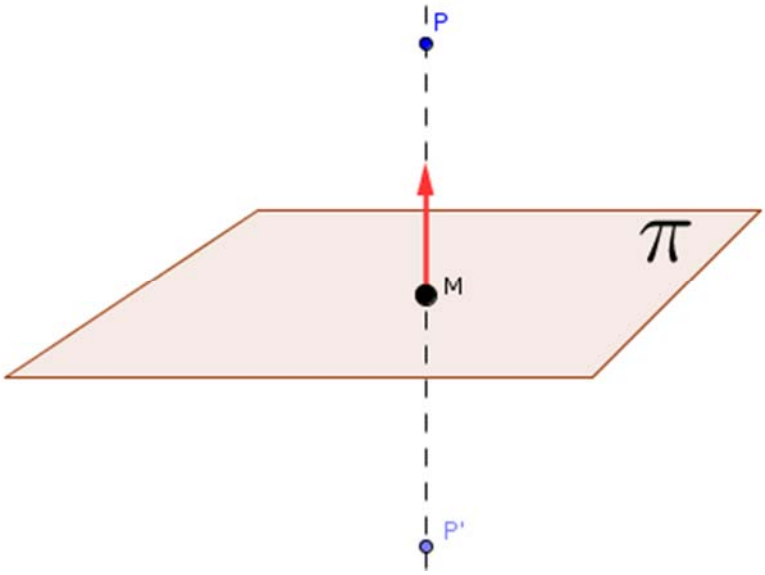
$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 2 \cdot (-1) - 1 - 0 + 4 = 1 \neq 0$ por lo que $P_2 \notin \pi_1$ lo que implica que

Ambos planos son paralelos.

cc BY NC SA

b) Calcular el punto *P'* que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1

El cálculo planteado responde al siguiente dibujo:



La forma de resolverlo puede ser variada y cualquier solución que dé el mismo resultado será válida. En estos casos yo suelo recomendar "localizar" el punto *P'* mediante los siguientes pasos:

- Primero trazamos la recta *s* que tendría la dirección del vector normal del plano y pasa por el punto *P*.
- A continuación hallamos el punto *M* intersección de la recta s y del plano π_1
- Hallamos el vector que une *P* y *M*, $(\overrightarrow{PM})$
- Aplicamos el vector$\overrightarrow{PM}$en el punto *M* y el resultado es el punto *P'*.

Comenzamos con la recta *s* que tendría la dirección del vector normal del plano $(2,-1,-1)$ y pasa por el punto $P(1,0,0)$. Lo hago en forma paramétrica:

$$s:\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto *M* intersección de la recta s y del plano $\pi_1$para ello basta con sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y hallar el valor del parámetro que las verifica:

$$2(1+2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0 \rightarrow 6 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo el valor hallado en las ecuaciones de la recta tenemos el punto *M*:

$$s:\begin{cases} x = 1+2\cdot(-1) \\ y = -(-1) \\ z = -(-1) \end{cases} \rightarrow M = (-1,1,1)$$

Hallamos el vector que une *P* y *M*, $\overrightarrow{PM} = (-1-1,1-0,1-0) = (-2,1,1)$

Aplicamos el vector$\overrightarrow{PM}$en el punto *M* y el resultado es el punto *P'* :

$$(-1,1,1) + (-2,1,1) = (-3,2,2)$$

Textos Marea Verde
BY NC SA

Por lo que tenemos que:

$$\boldsymbol{P' = (-3, 2, 2)}$$

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y *r.*

Lo más fácil sería hacer un ejercicio parecido al apartado anterior pasando la recta a paramétricas, sustituyendo en la ecuación del plano y hallando el valor del parámetro que lo verifica.

Pasamos la recta a paramétricas:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano las paramétricas tenemos que:

$$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow 2(1+\lambda) - (2\lambda) - (2-\lambda) + 4 = 0 \rightarrow \lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -4$$

Sustituyendo el valor del parámetro en la ecuación de la recta obtenemos el punto de intersección:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 4 = -3 \\ y = 2 \cdot (-4) = -8 \\ z = 2 - (-4) = 6 \end{cases}$$

Por lo que:

El punto de intersección de π_1 y *r* es: $\boldsymbol{(-3, -8, 6)}$

Problema 5:

Consideramos la función $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}$, obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

b) Las asíntotas de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos

d) La primitiva de la función$f(x)$.

Solución:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2-4=0\rightarrow x=\pm 2$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $Domf(x)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de *x* cuando $f(x)=0$:

$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}=0$por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2+3=0\rightarrow x=\pm\sqrt{-3}\notin\mathbb{R}$ **como no tiene solución NO corta al eje OX**.

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f (x)* cuando $x=0$:

$f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4}$ por lo que es el punto $(0,-\frac{3}{4})$

$Domf(x)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$; **NO corta al eje OX;** El **punto de corte con el eje OY:** $(0,-\frac{3}{4})$

b) Las asíntotas de la función.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=1$ (por ser polinomios del mismo grado) luego **tiene asíntota horizontal en** $y=1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=1$ (por ser polinomios del mismo grado) luego **tiene asíntota horizontal en** $y=1$.

Como tiene asíntota horizontal **NO tiene asíntota oblicua**.

Para las **asíntotas verticales** tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x=-2$ y $x=2$, calculamos los límites:

$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=(\frac{7}{0})=\langle\begin{matrix}\lim_{x\to-2-}\frac{x^2+3}{x^2-4}=+\infty\\ \lim_{x\to-2+}\frac{x^2+3}{x^2-4}=-\infty\end{matrix}$ por lo que $x=-2$ es asíntota vertical

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=(\frac{7}{0})=\langle\begin{matrix}\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim_{x\to 2+}\frac{x^2+3}{x^2-4}=+\infty\end{matrix}$ por lo que $x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal en $y=1$. Asíntota verticales en $x=2$ y en $x=-2$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

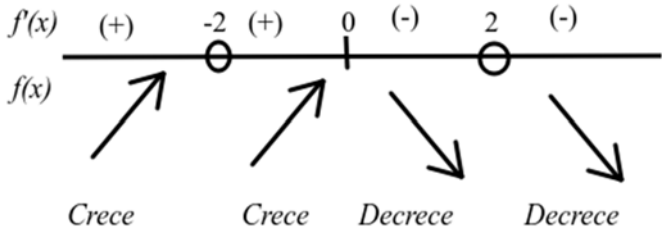
$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2+3)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{(x^2-4)^2}=\frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

Igualamos a cero la derivada:

$f'(x)=\frac{-14x}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow -14x=0\rightarrow x=0$

por lo que tiene un posible punto crítico $x=0$

Con este punto y las discontinuidades del dominio $x=\pm 2$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados han sido:

$f'(-3)=1.68>0;\ f'(-1)=1.55>0;\ f'(1)=-1.55<0;\ f'(3)=-1.68<0$

Con lo que tenemos que los intervalos son:

Decrece en]0, 2[U]2, +∞[

Crece en]-∞, -2[U]-2, 0[

En el punto $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ hay un máximo relativo.

d) La primitiva de la función $f(x)$. Tenemos que calcular la integral: $\int\frac{x^2+3}{x^2-4}dx$

Como se trata de una función racional y los polinomios son del mismo grado tenemos que hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} x^2+3 & x^2-4 \\ \hline -x^2+4 & 1 \\ \hline 7 & \end{array}$$

$\frac{x^2+3}{x^2-4}=1+\frac{7}{x^2-4}$; (Recordemos que: $\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$)

Textos Marea Verde
CC BY NC SA

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = \int (1+\frac{7}{x^2-4})dx = \int 1dx + \int \frac{7}{x^2-4}dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}dx$$

Para hacer la integral del segundo término tenemos que descomponer el denominador y escribir la fracción como suma de dos fracciones algebraicas.

$$x^2-4 = (x+2)(x-2)$$

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+2B}{x^2-4}$$

De donde se deduce que: $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=7 \end{cases}$

Resolviendo por reducción tenemos que: $B=\frac{7}{4}$ y $A=\frac{-7}{4}$

Volvemos a la integral:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}dx = x + \int (\frac{\frac{-7}{4}}{x+2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-2})dx = x - \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-2}dx$$

Las dos últimas integrales son de logaritmo neperiano:

$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x - \frac{7}{4}ln|x+2| + \frac{7}{4}ln|x-2| + C$ (podemos emplear propiedades de logaritmos y expresarlo más compacto)

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x - \frac{7}{4}ln|x+2| + \frac{7}{4}ln|x-2| + C$$

BY NC SA

Problema 6:

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

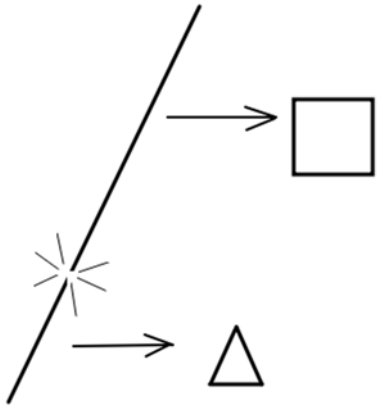
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Solución:

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

En los problemas de optimización es muy importante comprender la situación para poder abordarlos de manera correcta.

Tenemos un cable de 240 m que vamos a dividir en dos partes de forma que con una de ellas haremos un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado.

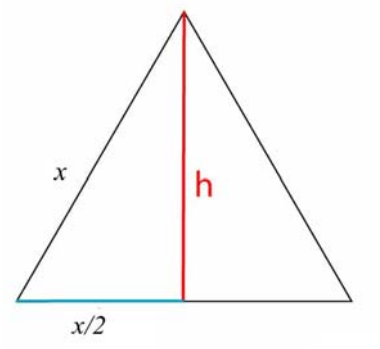


Nos dicen además que nuestra variable tiene que ser:

x – Lado del triángulo equilátero.

Es un problema sencillo de trigonometría hallar lo que vale el área del triángulo en función de ese lado:

Sabemos que el área de un triángulo responde a la fórmula $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$ donde *b* es la base (en este caso *x*) y *h* es la altura que podemos determinar por trigonometría o por Pitágoras:



$x^2 = h^2 + (\frac{x}{2})^2 \rightarrow x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \rightarrow h^2 = \frac{3}{4}x^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Por trigonometría hemos de considerar que los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º por lo que podemos escribir que: $sen60º = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Sustituyendo en la fórmula del área: $A_t = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A_t = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Como los tres lados del triángulo son iguales (es equilátero) la longitud de cable empleada para construir el triángulo será: $3x$

Como el cable mide 240 m totales la longitud que queda para el cuadrado es: $240 - 3x$

Como los lados del cuadrado son también iguales, si destinamos a su construcción $240 - 3x$ cada lado medirá: $\frac{240-3x}{4} = 60 - \frac{3}{4}x$

Por lo que el área del cuadrado será: $A_c = (60 - \frac{3}{4}x)^2$

La fórmula pedida es la suma de las dos de área anteriores:

$$A(x) = A_t + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + (60 - \frac{3}{4}x)^2$$

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Tenemos que sacar un mínimo de la función que hemos construido antes. Para ello tenemos que derivar e igualar a cero:

$A'(x) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x + 2 \cdot (60 - \frac{3}{4}x) \cdot \frac{(-3)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})x - 90 = 0$

Despejando tenemos que: $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})x - 90 = 0 \rightarrow x = \frac{90}{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})} \approx 45.2\text{m}$

Hay que demostrar que ese valor es un mínimo para ello calculamos la segunda derivada (tiene que ser positiva)

$A''(45.2) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} > 0$ por lo que se trata de un mínimo relativo.

También es absoluto puesto que los valores de x varían en el intervalo cerrado $[0, 80]$ (que sería destinar todo el cable para el cuadrado o todo para el triángulo).

Como la función es continua (es un polinomio) y está definida en un intervalo cerrado alcanza sus máximos y mínimos absolutos en los relativos o en los extremos del intervalo:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}0^2 + \left(60 - \frac{3}{4}0\right)^2 = 3\,600$$

$$A(45.2) = \frac{\sqrt{3}}{4}45.2^2 + \left(60 - \frac{3}{4}45.2\right)^2 = 1\,565.87$$

$$A(80) = \frac{\sqrt{3}}{4}80^2 + \left(60 - \frac{3}{4}80\right)^2 = 2\,771.28$$

Como podemos observar el máximo absoluto corresponde a destinar todo el cable al cuadrado y el

mínimo a construir un triángulo de lado 45.2 .

Pregunta la longitud de cable necesaria para construir el triángulo para lo cual tenemos que tomar $3x=3\cdot 45.2=135.6$ m y el área mínima: 1 565.87 m²

La longitud de cable necesaria para construir el triángulo es **135.6 m** y el área mínima: **1 565.87 m²**

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$.

$a)$ Discutir el sistema en función del parámetro real a.

$b)$ Encontrar todas las soluciones del sistema cuando esto sea posible.

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

$a)$ Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

$c)$ Calcular $det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,0,0)$ y $B(0,1,0)$, y la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

$c)$ Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Problema 4:

4º) Dados los puntos $A(2,1,-2)$ y $B(3,2,3)$, y el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 3$, obtener:

$a)$ El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B.

$b)$ El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Calcular, indicando todos los pasos, la integral $I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$b)$ Determinar, en función de t, el valor de $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$c)$ Determinar el valor de $t > 8$ para que $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4}$.

Problema 6:

6º) Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M[x, f(x)]$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

$a)$ Determinar el área del rectángulo en función de x.

$b)$ Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+z=1 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$.

$a)$ Discutir el sistema en función del parámetro real a.

$b)$ Encontrar todas las soluciones del sistema cuando esto sea posible.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}=1-a^2-(a-1)=0;\ 1-a^2-a+1=0;$$

$$a^2+a-2=0;\ a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow a_1=-2, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-2+1-4+2=-3\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-2\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Resolvemos, en primer lugar, para $\begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq 1 \end{cases}$, que resulta un sistema compatible determinado. Se resuelve por la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)}=\frac{a-a-(a-1)}{-(a+2)(a-1)}=\frac{1}{a+2}.$$

BY NC SA

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)}=\frac{a(a-1)+1-a^2-(a-1)}{-(a+2)(a-1)}=\frac{a^2-a+1-a^2-a+1}{-(a+2)(a-1)}=\frac{-2(a-1)}{-(a+2)(a-1)}=\frac{2}{a+2}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)}=\frac{a+1-a^2-a}{-(a+2)(a-1)}=\frac{1-a^2}{-(a+2)(a-1)}=\frac{-(a+1)(a-1)}{-(a+2)(a-1)}=\frac{a+1}{a+2}.$$

$$\underline{Solución:\ x=\frac{1}{a+2};\ y=\frac{2}{a+2};\ z=\frac{a+1}{a+2}, \forall a \in R-\{-2,1\}.}$$

Se resuelva ahora para $a=1$. El sistema resulta: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases}$.

Haciendo $x=\lambda$:

$$\underline{Solución:\ x=\lambda;\ y=1-\lambda;\ z=1-\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

BY NC SA

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Para los valores $a\ y\ b$ obtenidos en el apartado anterior, calcular $A^3\ y\ A^4$.

c) Calcular $det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución:

a) $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;\ \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = I;$

$$\begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{a = 1, b = 0}.$$

b) Para $a = 1\ y\ b = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

c) $det(A^{-50}) = \frac{1}{(|A|)^{50}} = \frac{1}{\left(\left|\begin{matrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{matrix}\right|\right)^{50}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{50}} \Rightarrow$

$$\underline{det(A^{-50}) = (a^2 - b^2)^{-50}}.$$

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguianos
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde
BY NC SA

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,0,0)$ y $B(0,1,0)$, y la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

$c)$ Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Solución:

$a)$ Los puntos A y B determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (2,0,0)] \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_r} = (-2,1,0)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 + \lambda. \\ z = 0 \end{cases}$$

$b)$ Un punto y un vector director de s son $P(1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,3,1)$.

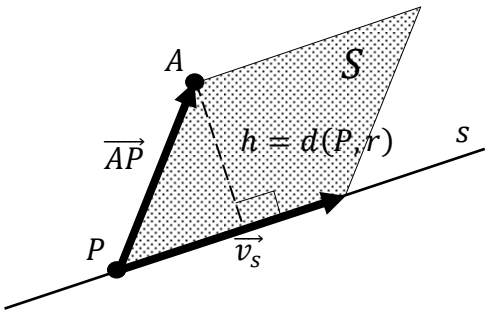
$$\pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v_s};\ P\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ (x-1) - 6z - 2z + 2(y-1) = 0;$$

$$x - 1 - 8z + 2y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y - 8z - 3 = 0.$$

$c)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$\left.\begin{matrix} S = |\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}| \\ S = |\overrightarrow{v_s}| \cdot h \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{v_s}| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(A,s) = \frac{|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{v_s}|}.$$

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} =$

$= [(2,0,0) - (1,1,0)] = (1,-1,0).$

$$d(A,s) = \frac{|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{v_s}|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{|j-2k-3k+i|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|i+j-5k|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+(-5)^2}}{\sqrt{14}} =$$

$$\frac{\sqrt{1+1+25}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$d(A,s) = \frac{3\sqrt{52}}{14}\ u.$$

Problema 4:

4º) Dados los puntos $A(2,1,-2)$ y $B(3,2,3)$, y el plano $\pi \equiv 2x+2y+z=3$, obtener:

$a)$ El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B.

$b)$ El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(2,2,1)$.

La recta r, perpendicular a π, tiene como vector director a vector normal del plano, o sea: $\overrightarrow{v_r}=(2,2,1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda. \\ z=3+\lambda \end{cases}$

El punto C, intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x+2y+z=3 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(3+2\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)=3;$$

$$6+4\lambda+4+4\lambda+3+\lambda=3;\ \ 9\lambda=-10;\ \ \lambda=-\frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=3-\frac{20}{9}=\frac{7}{9} \\ y=2-\frac{20}{9}=-\frac{2}{9} \\ z=3-\frac{10}{9}=\frac{17}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right).}$$

$b)$ Los puntos $A(2,1,-2), B(3,2,3), C\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(3,2,3)-(2,1,-2)]=(1,1,5).$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left[\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)-(2,1,-2)\right]=\left(-\frac{11}{9},-\frac{11}{9},\frac{35}{9}\right)$, que también puede expresarse de la forma $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}\cdot(-11,-11,35)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ -11 & -11 & 35 \end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot|35i-55j-11k+11k+55i-35j|=\frac{1}{18}\cdot|90i-90j|=5\cdot|i-j|=$$

$$=5\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}=5\cdot\sqrt{1+1}\Rightarrow$$

$$\underline{S=5\sqrt{2}\,u^2.}$$

Problema 5:

5º) a) Calcular, indicando todos los pasos, la integral $I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

b) Determinar, en función de t, el valor de $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

c) Determinar el valor de $t > 8$ para que $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4}$.

Solución:

$a)\ I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx.$

$$x^2 - 5x - 14 = 0;\ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 7.$$

$$x^2 - 5x - 14 = (x+2)(x-7).$$

$$\frac{18}{x^2-5x-14} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-7} = \frac{Mx-7M+Nx+2N}{(x+2)(x-7)} = \frac{(M+N)x+(-7M+2N)}{x^2-5x-14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} M+N=0 \\ -7M+2N=18 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2M-2N=0 \\ -7M+2N=18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -9M = 18M;\ \ M = -2;\ \ N = 2.$$

$$I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2}{x-7}\right) \cdot dx = -2L|x+2| + 2L|x-7| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot L\left|\frac{x-7}{x+2}\right| + C.}$$

$b)\ A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot \left[L\left|\frac{x-7}{x+2}\right|\right]_8^t = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L\left|\frac{8-7}{8+2}\right|\right) =$

$$= 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L\frac{1}{10}\right) = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L1 + L10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right).}$$

$c)\ A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4} \Rightarrow 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right) = L\frac{25}{4} = L5^2 - L2^2;$

$$2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right) = 2 \cdot L5 - 2L2;\ \ L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10 = L5 - L2;$$

$$L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10 = L5 - L2 - L10;\ \ L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| = L5 - L20 = L\frac{5}{20} = L\frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{t-7}{t+2}\right| = \frac{1}{4}.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{t-7}{t+2} = \frac{1}{4} \\ \frac{t-7}{t+2} = -\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 4t - 28 = t + 2;\ \ 3t = 30 \Rightarrow t_1 = 10 \\ \frac{t-7}{t+2} = -\frac{1}{4};\ \ 4t - 28 = -t - 3;\ \ 5t = 25 \Rightarrow t_2 = 5 \not> 8 \end{matrix}\Big\}.$$

$$\underline{El\ único\ valor\ de\ t\ que\ cumple\ las\ condiciones\ pedidas\ es\ t = 10.}$$

Problema 6:

6º) Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M[x, f(x)]$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

$a)$ Determinar el área del rectángulo en función de x.

$b)$ Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:

$a)$ Los máximos y mínimos de la función $f(x) = e^{-x^2}$ son los siguientes:

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0;\ \ x = 0.$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = -2e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2).$

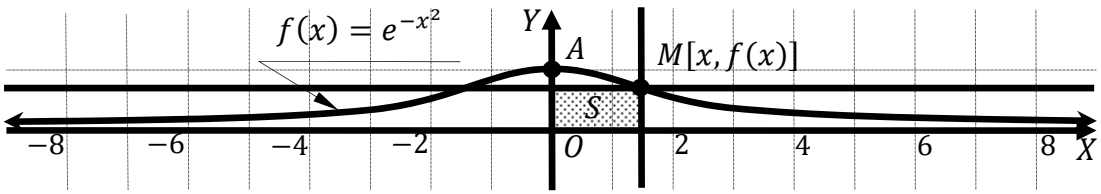
$f''(0) = -2 \cdot e^0 \cdot (1 - 0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 0.$

$f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1 \Rightarrow M\acute{a}x: A(0, 1).$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

La recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal de la función.

Teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x) = f(x)$ y que $f(x) > 0, \forall x \in R$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en el gráfico siguiente.



$S = x \cdot f(x) \Rightarrow$

$$\underline{S(x) = x \cdot e^{-x^2}}.$$

$b)$ Para que una función tenga un máximo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$S'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$

$S'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0;\ \ e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in r;\ \ 1 - 2x^2 = 0;\ \ x^2 = \frac{1}{2}; x = +\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}.$

$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow$

$$\underline{S = \frac{\sqrt{2e}}{2e}\ u^2}.$$

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesus y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra
http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía
http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía
https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Textos Marea Verde

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-
tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

BY NC SA
Textos Marea Verde

SELECTIVIDAD 2022

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE

1. Andalucía 3
2. Aragón 44
3. Asturias 75
4. Baleares 106
5. Canarias 132
6. Cantabria 159
7. Castilla – La Mancha 187
8. Castilla y León 218
9. Cataluña 239
10. Extremadura 260
11. Galicia 290
12. La Rioja 312
13. Madrid 339
14. Murcia 370
15. Navarra 397
16. País Vasco 420
17. Valencia 446
18. Otras páginas web con problemas resueltos 486

ÍNDICE 488