

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano



	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.		
Primera parte. 1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ 2x + ay + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a = -1$ y $a = 1$, si es posible. 2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa. b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$. Segunda parte. 3º) Sea considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente. 4º) Sea el punto $P(1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto P', simétrico de P con respecto al plano π. Tercera parte. 5º) Dada la función $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos. 6º) Sea la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta de ecuación $y = 2x + 1$. Cuarta parte. 7º) Calcula $I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx$. 8º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.		

Quinta parte.

9º) Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras: la T con 4 bolas negras y 6 blancas y la R con 7 bolas negras y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

- a) Sean negras. b) Sean blancas. c) Sean de distinto color.

10º) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

- a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.
b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ 2x + ay + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a . Resuelve el sistema para $a = -1$ y $a = 1$, si es posible.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 2 & a & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a + 2a^2 + a - a^2 - a^2 - 2 = 0; \quad 2a - 2 = 0; \quad a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Para $a \neq 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Para $a = -1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo

por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2-2} = \frac{1+1-1-1+1-1}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1-2+1+1+1+2}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1+2+1-1+1-2}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Solución: $x = 0, y = -1, z = 0$.

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente

al sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$. Haciendo $z = \lambda$:

Solución: $x = 0, y = 1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$.

SOLUCIÓN

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-2) + 4 - 2m = 0;$$

$$2m^2 - 4m + 4 - 2m = 0; \quad 2m^2 - 6m + 4 = 0; \quad m^2 - 3m + 2 = 0;$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2.$$

La matriz A es invertible $\forall m \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

b) Para $m = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $|A| = 4$. $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segunda parte.

3º) Sea considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

SOLUCIÓN

Un punto genérico de r es $P(t, 2t, 0)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(t, 2t, 0)$ y al plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|t + 2t + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}}.$$

La distancia de $P(t, 2t, 0)$ al origen de coordenadas es igual que el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = (t, 2t, 0)$.

$$d(O, P) = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}.$$

$$d(P, \pi) = d(O, P) \Rightarrow \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5}; \quad |3t - 2| = t\sqrt{15}; \quad (3t - 2)^2 = 15t^2;$$

$$9t^2 - 12t + 4 = 15t^2; \quad 6t^2 + 12t - 4 = 0; \quad 3t^2 + 6t - 2 = 0; \quad t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 24}}{6} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot 15}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, t_2 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3}.$$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

$$\underline{P_1 \left(\frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{3}, 0 \right)} \quad \text{y} \quad \underline{P_2 \left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{3}, 0 \right)}.$$

4º) Sea el punto $P(1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto P' , simétrico de P con respecto al plano π .

SOLUCIÓN

La recta t que pasa por $P(1, 2, a)$ y es perpendicular al plano π , tiene como vector director al vector normal de π : $\vec{n} = (1, 1, 2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = a + 2\lambda \end{cases}$.

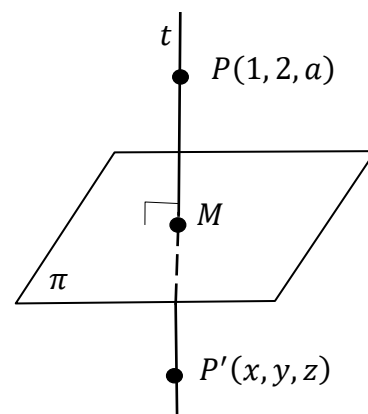
El punto M , intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x + y + 2z = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = a + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2 + \lambda + a + \lambda = 3;$$

$$3\lambda = -a; \quad \lambda = -\frac{a}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{a}{3} = \frac{3-a}{3} \\ y = 2 - \frac{a}{3} = \frac{6-a}{3} \\ z = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = \frac{3-a}{3}; \quad 3x + 3 = 6 - 2a; \quad 3x = 3 - 2a \Rightarrow x = \frac{3-2a}{3} \\ \frac{y+2}{2} = \frac{6-a}{3}; \quad 3y + 6 = 12 - 2a; \quad 3y = 6 - 2a \Rightarrow y = \frac{6-2a}{3} \\ \frac{z+a}{2} = \frac{a}{3}; \quad 3z + 3a = 2a; \quad 3z = -a \Rightarrow z = \frac{-a}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P'\left(\frac{3-2a}{3}, \frac{6-2a}{3}, \frac{-a}{3}\right)}.$$



Tercera parte.

5º) Dada la función $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

SOLUCIÓN

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-2x} = \frac{(x-1)^2}{e^{2x}}.$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot e^{-2x} - (x-1)^2 \cdot 2 \cdot e^{-2x}}{e^{4x}} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot [1 - (x-1)]}{e^{2x}} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (2-x)}{e^{2x}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (2-x)}{e^{2x}} = 0; (x-1) \cdot (2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ una función continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, las raíces de la derivada dividen al dominio en los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in (-\infty, 1)$:

$$f'(0) = \frac{2 \cdot (0-1) \cdot (2-0)}{e^{2 \cdot 0}} = \frac{-4}{e^0} = \frac{-4}{1} < 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1, 2).}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento así como de la continuidad de la función se deducen los máximos y mínimos relativos, no obstante, se hace su estudio mediante derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (2-x)}{e^{2x}} = \frac{2 \cdot (2x - x^2 - 2 + x)}{e^{2x}} = -2 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2x}}.$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x-3) \cdot e^{-2x} - (x^2 - 3x + 2) \cdot 2 \cdot e^{-2x}}{e^{4x}} = -2 \cdot \frac{2x - 3 - 2x^2 + 6x - 4}{e^{2x}} = 2 \cdot \frac{2x^2 - 8x + 7}{e^{2x}}.$$

$$f''(1) = 2 \cdot \frac{2-8+7}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 1. \quad f(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Mín.} \Rightarrow A(1, 0).}$$

$$f''(2) = 2 \cdot \frac{8-16+7}{e^4} = \frac{-2}{e^4} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 2. \quad f(2) = \frac{1}{e^4} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Máx.} \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{e^4}\right).}$$

6º) Sea la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

SOLUCIÓN

Por anularse para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$:

$$f(1) = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C = 0; \quad A + B + C = -1. \quad (1)$$

Por tener tangentes paralelas a la recta $y = 2x + 1$ para $x = -1$ y $x = 3$ tiene que cumplirse que: $f'(-1) = f'(3) = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$$

$$f'(-1) = 2 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2A \cdot (-1) + B = 2; \quad -2A + B = -1. \quad (2)$$

$$f'(3) = 2 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2A \cdot 3 + B = 2; \quad 6A + B = -25. \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3):

$$\left. \begin{array}{l} -2A + B = -1 \\ 6A + B = -25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2A - B = 1 \\ 6A + B = -25 \end{array} \Rightarrow 8A = -24;$$

$$\underline{A = -3.}$$

$$-2 \cdot (-3) + B = -1; \quad 6 + B = -1;$$

$$\underline{B = -7.}$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de A y B :

$$A + B + C = -1; \quad -3 - 7 + C = -1;$$

$$\underline{C = 9.}$$

Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx$.

SOLUCIÓN

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2 \Rightarrow$$

El polinomio $x^2 - x - 2$ puede expresarse como $(x+1)(x-2)$.

$$I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2)(x+1) + C \cdot (x-2)}{(x-2)(x+1)^2} = \\ &= \frac{A \cdot (x^2+2x+1) + B \cdot (x^2-x-2) + Cx-2C}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2-Bx-2B+Cx-2C}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} &= \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2A-B+C &= 7 \\ A-2B-2C &= 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = -A \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2A+A+C &= 7 \\ A+2A-2C &= 13 \end{aligned} \right\} &\left. \begin{aligned} 3A+C &= 7 \\ 3A-2C &= 13 \end{aligned} \right\} &\left. \begin{aligned} 3A+C &= 7 \\ -3A+2C &= -13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3C = -6; \quad C = -2; \\ 3A-2 &= 7; \quad 3A = 9; \quad A = 3; \quad B = -3. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (*):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx = \int \left[\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] \cdot dx = \\ &= 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \\ &= 3 \cdot L|x-2| - 3 \cdot L|x+1| - 2I_1 \Rightarrow I = 3 \cdot L \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - 2I_1. \quad (**) \\ I_1 &= \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \int (x+1)^{-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x+1 &= t \\ dx &= dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int t^{-2} \cdot dx = \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + K = -\frac{1}{t} + K \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{x+1} + K. \quad \text{Sustituyendo este valor en (**):} \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = 3 \cdot L \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + \frac{2}{x+1} + K.$$

8º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = g(x)$ y se cortan en el punto $A(0, 1)$.

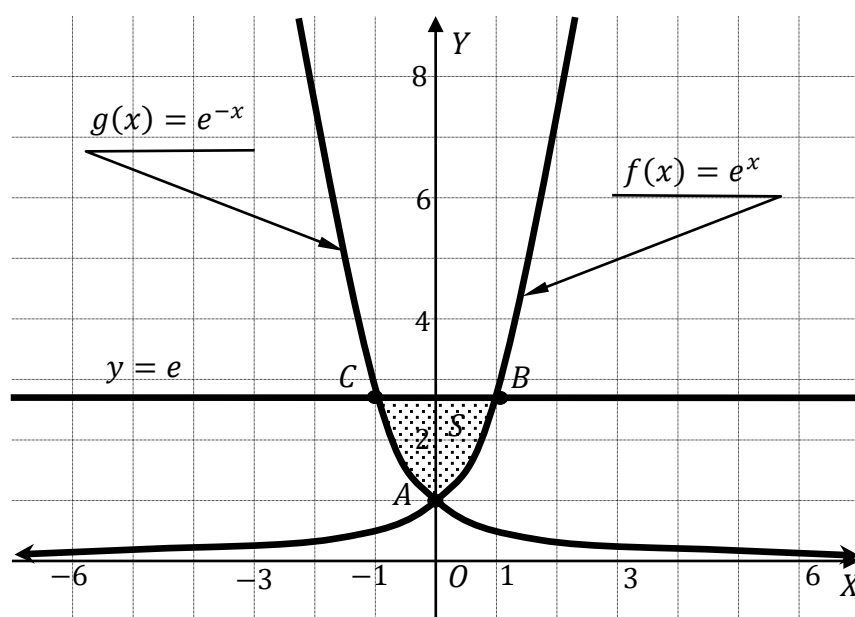
$f(x) = e^x$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Por ser $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, el semieje $-X$ es asíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

$g(x) = e^{-x}$ es monótona creciente por ser $g'(x) = -e^x < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Por ser $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, el semieje $+X$ es asíntota horizontal de $g(x) = e^{-x}$.

Los puntos de corte de la recta $y = e$ con las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son B y C, respectivamente.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la recta $y = e$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [y - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 [e - e^x] \cdot dx = 2 \cdot [ex - e^x]_0^1 = \\ = 2 \cdot [(e \cdot 1 - e^1) - (e \cdot 0 - e^0)] = 2 \cdot [(e - e) - (0 - 1)] = 2 \cdot (0 + 1) = 2.$$

$$\underline{S = 2 \text{ u}^2}.$$

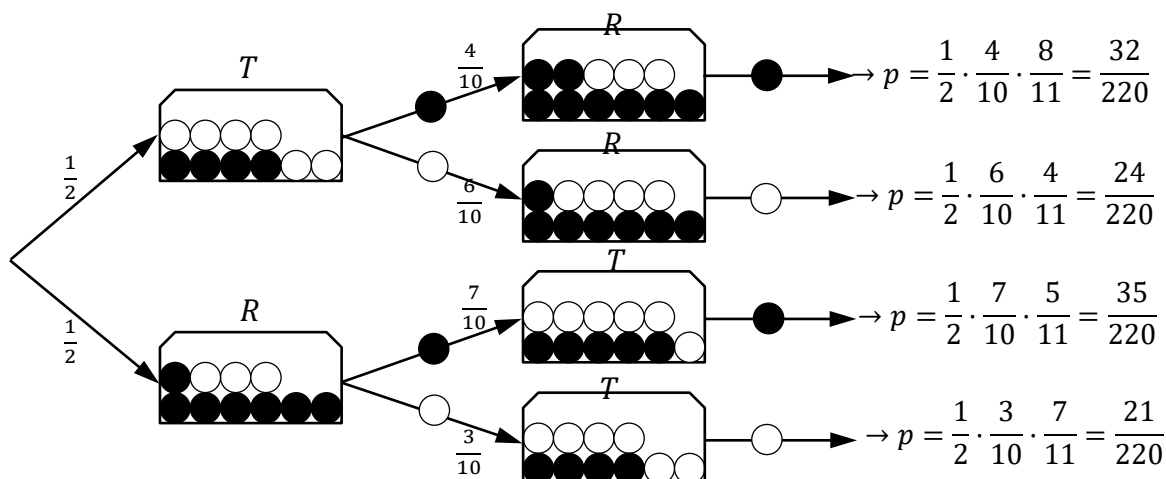
Quinta parte.

9º) Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras: la T con 4 bolas negras y 6 blancas y la R con 7 bolas negras y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

a) Sean negras.

b) Sean blancas.

c) Sean de distinto color.

SOLUCIÓN

$$a) \quad P = P(NN) = P(N \cap T) \cdot P(N \cap R) + P(N \cap R) \cdot P(N \cap T) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{32}{220} + \frac{35}{220} = \frac{67}{220} = 0,3045.$$

$$b) \quad P = P(BB) = P(B \cap T) \cdot P(B \cap R) + P(B \cap R) \cdot P(B \cap T) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{24}{220} + \frac{21}{220} = \frac{45}{220} = \frac{9}{44} = 0,2045.$$

$$c) \quad P = 1 - [P(NN) + P(BB)] = 1 - \left(\frac{67}{220} + \frac{45}{220} \right) = 1 - \frac{112}{220} = 1 - \frac{28}{55} = \\ = \frac{55-28}{55} = \frac{27}{55} = 0,4909.$$

10º) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

SOLUCIÓN

Datos: $\mu = 52$; $\sigma = 6,5$.

$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(52; 6,5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-52}{6,5}$.

$$\begin{aligned} a) P &= P(50 \leq X \leq 68) = P\left(\frac{50-52}{6,5} \leq Z \leq \frac{68-52}{6,5}\right) = P\left(\frac{-2}{6,5} \leq Z \leq \frac{16}{6,5}\right) = \\ &= P(-0,31 \leq Z \leq 2,46) = P(Z \leq 2,46) - P(Z \leq -0,31) = \\ &= P(Z \leq 2,46) - [1 - P(Z \leq 0,31)] = P(Z \leq 2,46) - 1 + P(Z \leq 0,31) = \\ &= 0,9931 - 1 + 0,6217 = 1,6148 - 1 = \underline{0,6148}. \end{aligned}$$

$$b) P = P(X > \beta) = 0,3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-52}{6,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\beta-52}{6,5}\right) = 0,3;$$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-52}{6,5}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$. Mirando este valor en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0,7 le corresponde el valor 0,52:

$$\frac{\beta-52}{6,5} = 0,52; \quad \beta - 52 = 0,52 \cdot 6,5 = 3,38; \quad \beta = 3,38 + 52 = 55,38.$$

El 30 % de las piezas pesa más de 55,38 gramos.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021–2022 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos. <u>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.</u>		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA Primera parte. 1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} ax + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a . Resuelve el sistema para $a = 1$, si es posible. 2º) Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$. Segunda parte. 3º) Sea la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta. 4º) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de s tal que el punto $P(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta. Tercera parte. 5º) Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . 6º) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax & \text{si } x \leq 1 \\ Bx - A & \text{si } x > 1 \end{cases}$. a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real. b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores A y B obtenidos en el apartado anterior. Cuarta parte. 7º) Calcula $I = \int L(x^2 - 1) \cdot dx$. 8º) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.		

Quinta parte.

9º) Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos 2 bolas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

10º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos 2 coches?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} ax + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a . Resuelve el sistema para $a = 1$, si es posible.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 8 - 4a + 4a + 4a + 4 = 0; \quad 2a - 4 = 0;$$

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Para $a \neq 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo

por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2-4} = \frac{-4-4-4+4+8+2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-4-4+2+2+4}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+8+2-4-2-4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Solución: $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -1$.

2º) Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}, \text{ sabiendo que } \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6.$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6; \quad 2 \cdot \begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6;$$

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + 0 = 3;$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

- 1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.
- 2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.
- 3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

Segunda parte.

3º) Sea la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Solución:

La recta r y el plano π determinan el sistema
$$\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que el sistema anterior sea compatible indeterminado, es decir: que tenga infinitas soluciones, para lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas; es decir: ambos rangos tienen que ser dos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rang } M = 2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 1 - a - 3 + 3 - a = 0;$$

$$10 - 2a = 0; \quad 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5.$$

$$a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

No existe ningún valor real de a para que r esté contenida en el plano π .

4º) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de s tal que el punto $P(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = -4\lambda \\ x - y = -8\lambda \end{cases} \Rightarrow 4x = -12\lambda; \quad x = -3\lambda;$$

$$y = x + 8\lambda = -3\lambda + 8\lambda = 5\lambda \Rightarrow y = 5\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un punto genérico de r es $Q(-3\lambda, 5\lambda, 4\lambda)$.

$$\text{Para que } P(-3, s, s) \in r \text{ tiene que ser: } \begin{cases} x = -3\lambda = -3 \rightarrow \lambda = 1 \\ y = 5\lambda = s = 5 \\ z = 4\lambda = s = 4 \end{cases} \Rightarrow P \notin r.$$

No existe ningún valor real de s para que P esté contenida en la recta r .

Tercera parte.

5º) Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

Solución:

La pendiente de la recta $y = 3x - 2$ es $m = 3$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 6x^2 - 3.$$

$$f'(x) = m = 3 \Rightarrow 6x^2 - 3 = 3; \quad 6x^2 = 6; \quad x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2 \Rightarrow P_1(-1, 2).$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow P_2(1, 0).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada a los puntos hallados:

$$y - 2 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3 \Rightarrow$$

$$\underline{t_1 \equiv 3x - y + 5 = 0.}$$

$$y - 0 = 3 \cdot (x - 1) = 3x - 3 \Rightarrow$$

$$\underline{t_2 \equiv 3x - y - 3 = 0.}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 6x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 3 = 0; \quad 2x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es $\mathbb{R}$, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, donde la función, por ser polinómica, es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es $f'(0) = -3 < 0 \Rightarrow Dec$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).}$$

6º) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax & \text{si } x \leq 1. \\ Bx - A & \text{si } x > 1. \end{cases}$

a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores A y B obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de A y B para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + Ax) = 1 + A = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (Bx - A) = B - A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + A = B - A \Rightarrow 2A - B = -1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de A y B.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + A & \text{si } x \leq 1 \\ B & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 2 + A & \text{si } x \leq 1 \\ B & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2 + A = B; \quad A - B = -2. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 2A - B = -1 \\ A - B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A - B = -1 \\ -A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 1; \quad 1 - B = -2 \Rightarrow B = 3.$$

La función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 1$ para $A = 1$ y $B = 3$.

b) La función resulta ser: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 1. \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es la parábola $g(x) = x^2 + x$, que es convexa (U) por ser positivo el coeficiente de x^2 y que tiene su vértice en el punto siguiente:

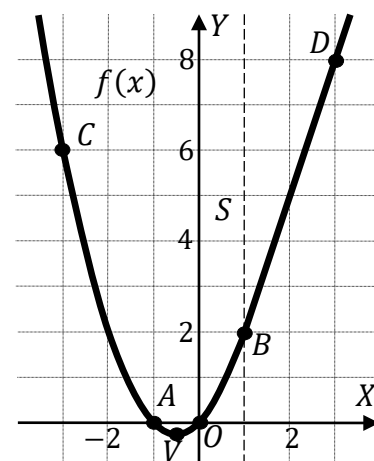
$$g'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ y $C(-3, 6)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la semirrecta $h(x) = 3x - 1$ cuyo origen es el punto $B(1, 2)$ y que contiene al punto $D(3, 8)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int L(x^2 - 1) \cdot dx$.

Solución:

Procediendo por el método de integración “por partes”:

$$I = \int L(x^2 - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L(x^2 - 1) \rightarrow du = \frac{2x}{x^2-1} \cdot dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x^2 - 1) \cdot x - \int x \cdot \frac{2x}{x^2-1} \cdot dx = x \cdot L(x^2 - 1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x^2 - 1) - \int \frac{2x^2-2+2}{x^2-1} \cdot dx = x \cdot L(x^2 - 1) - \int \frac{2(x^2-1)+2}{x^2-1} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x^2 - 1) - \int \left(2 + \frac{2}{x^2-1} \right) \cdot dx = x \cdot L(x^2 - 1) - 2 \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x^2-1} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x^2 - 1) - 2x - 2 \cdot A = I. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{1}{x^2-1} \cdot dx \Rightarrow x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+N)}{x^2-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M+N=0 \\ -M+N=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2N = 1; N = \frac{1}{2} \Rightarrow M = -\frac{1}{2}.$$

$$A = \int \frac{1}{x^2-1} \cdot dx = \int \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} \right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L|x+1| + \frac{1}{2} \cdot L|x-1| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[L|x-1| + \frac{1}{2} \cdot L|x+1| \right] + C \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot L \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \text{ Sustituyendo en } (*):$$

$$\underline{I = \int L(x^2 - 1) \cdot dx = x \cdot L(x^2 - 1) - 2x - L \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.}$$

8º) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

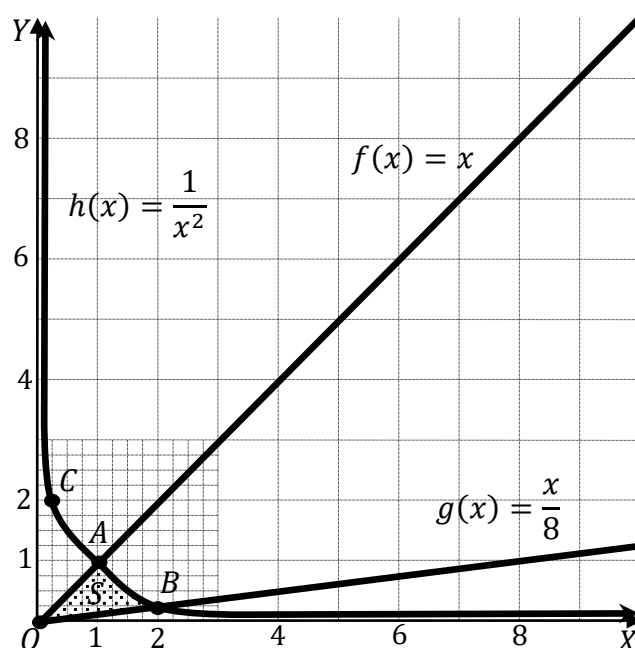
Solución:

Los puntos de corte en el primer cuadrante de la función $h(x) = \frac{1}{x^2}$ con las rectas $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x}{8}$ son los siguientes:

$$h(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x; \quad 1 = x^3; \quad x = 1; \quad f(1) = 1 \Rightarrow A(1, 1).$$

$$h(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{x}{8}; \quad 8 = x^3; \quad x = 2; \quad g(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{4}\right).$$

Por simetría con respecto al origen de la función $h(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{4}, 2\right)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie S a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [h(x) - g(x)] \cdot dx = \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) \cdot dx = \int_0^1 \frac{8x-x}{8} \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx = \\ &= \frac{7}{8} \cdot \int_0^1 x \cdot dx + \int_1^2 x^{-2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx = \frac{7}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \\ &= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{7}{16} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{8}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{3}{4} u^2 = 0,75 u^2.}$$

Quinta parte.

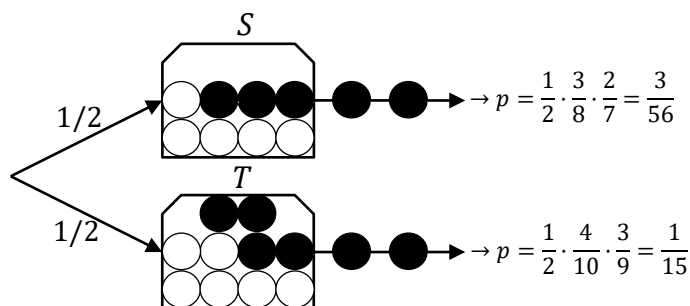
9º) Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos 2 bolas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Solución:

a)



$$P = P(nn) = P(S \cap nn) + P(T \cap nn) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} = \frac{45 + 56}{15 \cdot 56} \Rightarrow$$

$$P = \frac{101}{840}.$$

$$b) \quad P = P\left(\frac{T}{nn}\right) = \frac{P(T \cap nn)}{P(nn)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{101}{840}} = \frac{1 \cdot 840}{15 \cdot 101} = \frac{168}{3 \cdot 101} \Rightarrow$$

$$P = \frac{56}{101}.$$

10º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos 2 coches?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 50; \quad p = 0,6; \quad q = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Por ser $\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 50 \cdot 0,6 = 30 > 5 \\ n \cdot q = 50 \cdot 0,4 = 20 > 5 \end{array} \right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,6 = 30.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{12} \cong 3,464.$$

$$X = B(50; 0,6) \approx N(30; 3,464).$$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-30}{3,464}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$\begin{aligned} P &= P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{19,5-30}{3,464}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10,5}{3,464}\right) \cong P(Z \geq -3,03) = \\ &= P(Z \leq 3,03) = \underline{0,9988}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(X \geq 20) = \underline{0,9988}.}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P &= P(30 \leq X \leq 40) \Rightarrow \{Yates\} \Rightarrow P(29,5 \leq X \leq 40,5) = \\ &= P\left(\frac{29,5-30}{3,464} \leq Z \leq \frac{40,5-30}{3,464}\right) = P\left(\frac{-0,5}{3,464} \leq Z \leq \frac{10,5}{3,464}\right) = P(-0,14 \leq Z \leq 3,03) = \\ &= P(Z \leq 3,03) - [1 - P(Z \leq -0,14)] = P(Z \leq 3,03) - 1 + P(Z \leq 0,14) = \\ &= 0,9988 - 1 + 0,5557 = 1,5545 - 1 = \underline{0,5545}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(30 \leq X \leq 40) = \underline{0,5545}.}$$