

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos



VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

<https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM>

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente <u>cuatro</u> preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.		
Problema 1: A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón. Problema 2: A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide: a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$. b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano. c) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Problema 3: A3) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide: a) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$. b) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1. Problema 4: A4) Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide: a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$. b) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.		

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

a) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Problema 6:

B2) Calcule: a) $\int_1^e (x+2) \cdot \ln x \cdot dx$. b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .

b) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Si llamamos x a la longitud de los listones largos, y a la de los intermedios y z a la de los cortos, el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x = y + z + 17 \\ 9z + 7 = x + y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y - 15z = 0 \\ x - y - z = 17 \\ x + y - 9z = 7 \end{array} \right\}.$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y luego las dos últimas, nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 16z = 17 \\ 2x - 10z = 24 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 16z = 17 \\ x - 5z = 12 \end{array} \right\}.$$

Multiplicando la segunda por 3 y restando, resulta $-z = -19 \Leftrightarrow z = 19$.

Entonces: $x = 5z + 12 = 5 \times 19 + 12 = 107$, $y = x - z - 17 = 107 - 19 - 17 = 71$

Las longitudes de los distintos listones son:

Largos, 107 cm; intermedios, 71 cm y cortos, 19 cm.

Problema 2:

A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Solución:

a) La recta tangente a f en π es $y = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$, con:

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi \pi^3 + \pi^2 \pi^2 + \pi^3 \pi + \pi^4 = 5\pi^4,$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3 \Rightarrow f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi \pi^2 + 2\pi^2 \pi + \pi^3 = 10\pi^3.$$

Entonces la recta pedida es $y = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) = 5\pi^4 + 10\pi^3(x - \pi) = 10\pi^3 x - 5\pi^4$

$$y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$$

b) $f'(x)$ es continua (polinomio), por lo que podemos aplicar el teorema de Rolle a f y el de Bolzano a $f'(x)$. Se cumple que $f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi(-\pi)^3 + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4$,

$$f(0) = 0^4 + \pi 0^3 + \pi^2 0^2 + \pi^3 0 + \pi^4 = \pi^4, \text{ por lo que existe un } c \in (-\pi, 0) / f'(c) = 0 \text{ (Rolle).}$$

Tenemos que $f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -2\pi^3 < 0$,

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 + 3\pi \cdot 0^2 + 2\pi^2 \cdot 0 + \pi^3 = \pi^3 > 0, \text{ por lo que existe un } c \in (-\pi, 0) / f'(c) = 0 \text{ (Bolzano).}$$

Usando el teorema de Rolle o el teorema de Bolzano sabemos que existe un punto dónde se anula la derivada en el intervalo $(-\pi, 0)$

c) Se cumple que:

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4, \text{ por lo que:}$$

$$f(x) - g(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 - (x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x \geq 0 \text{ si}$$

$x \in (0, \pi)$. Entonces:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (f(x) - g(x)) dx = \int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x) dx = \left[2\pi \frac{x^4}{4} + 2\pi^3 \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi \frac{\pi^4}{4} + 2\pi^3 \frac{\pi^2}{2} - \left(2\pi \frac{0^4}{4} + 2\pi^3 \frac{0^2}{2} \right) = \frac{3\pi^5}{2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{3\pi^5}{2} u^2$$

Problema 3:

A3) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución:

a) Un vector director del plano es $B - A = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1)$.

Como es perpendicular a $z = 0$, el vector característico a este plano, $(0, 0, 1)$, es otro vector director del plano pedido, no proporcional al anterior.

Entonces unas ecuaciones paramétricas son, teniendo en cuenta que pasa por A:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda (1, 1, -1) + \mu (0, 0, 1) = (\lambda, \lambda, 1 - \lambda + \mu) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases}$$

Siendo una ecuación implícita del plano pedido:

$$y = x$$

(se obtiene eliminando λ de las dos primeras ecuaciones paramétricas).

b) r_1 pasa por $(0, 0, 1)$ y, como está en el plano $x + z = 1$, su vector director $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es perpendicular al vector característico del plano: $(1, 0, 1)$, luego:

$$\bar{v} \circ (1, 0, 1) = (v_1, v_2, v_3) \circ (1, 0, 1) = v_1 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = -v_1 \Rightarrow \bar{v} = (v_1, v_2, -v_1) \parallel \left(1, \frac{v_2}{v_1}, -1\right),$$

por lo que, llamando $\frac{v_2}{v_1} = a$, podemos tomar $\bar{v} = (1, a, -1)$ y r_1 es $(0, 0, 1) + \lambda (1, a, -1)$

r_2 pasa por $(1, 1, 0)$ y, como es paralela a r_1 , su vector director es $\bar{v} = (1, a, -1)$, luego r_2 es $(1, 1, 0) + \mu (1, a, -1) = (1 + \mu, 1 + \mu a, -\mu)$ y hay que hallar a para que $d(r_1, r_2) = 1$.

Hallamos la recta r que pasa por $(0, 0, 1)$, contenida en el plano $x + z = 1$ y perpendicular a r_1, r_2 : como está en el plano $x + z = 1$, su vector director es $(1, b, -1)$, y para que sea perpendicular a r_1 , ha

de ser $(1, a, -1) \circ (1, b, -1) = 1 + a b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{a} \ (a \neq 0)$, por lo que la recta es:

$$(0, 0, 1) + \lambda \left(1, -\frac{2}{a}, -1\right) = \left(\lambda, -\frac{2\lambda}{a}, 1 - \lambda\right). \text{ Intersección con } r_2:$$

$$\left(\lambda, -\frac{2\lambda}{a}, 1 - \lambda\right) = (1 + \mu, 1 + \mu a, -\mu) \Leftrightarrow \lambda = 1 + \mu, -\frac{2\lambda}{a} = -\frac{2(1 + \mu)}{a} = 1 + \mu a \Leftrightarrow \mu = -\frac{a + 2}{a^2 + 2}$$

Por tanto, el punto de intersección e

$$s \left(1 - \frac{a+2}{a^2+2}, 1 - \frac{a^2+2a}{a^2+2}, \frac{a+2}{a^2+2} \right) = \left(\frac{a^2-a}{a^2+2}, \frac{2-2a}{a^2+2}, \frac{a+2}{a^2+2} \right)$$

y:

$$d^2(r_1, r_2) = d^2 \left((0, 0, 1), \left(\frac{a^2-a}{a^2+2}, \frac{2-2a}{a^2+2}, \frac{a+2}{a^2+2} \right) \right) =$$

$$\left(\frac{a^2-a}{a^2+2} \right)^2 + \left(\frac{2-2a}{a^2+2} \right)^2 + \left(1 - \frac{a+2}{a^2+2} \right)^2 = \frac{a^2(a-1)^2 + 4(a-1)^2 + a^2(a-1)^2}{(a^2+2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a^2+4)(a-1)^2 = (2a^2+4)(a^2-2a+1) = 2a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 8a + 4 = (a^2+2)^2 = a^4 + 4a^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 8a = a(a^3 - 4a^2 + 2a - 8) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = 0$$

(Ya que $a \neq 0$). Haciendo Ruffini con $a = 4$ nos queda $a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = (a-4)(a^2+2) = 0 \Leftrightarrow a = 4$, por lo que las rectas son $r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 4, -1) = (\lambda, 4\lambda, 1-\lambda)$ y $r_2:$

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu(1, 4, -1) = (1+\mu, 1+4\mu, -\mu)$$

Estudiamos aparte el caso $a = 0$. En este caso, para que el vector director de r , $(v_1, v_2, -v_1)$ sea perpendicular al de r_1 , $(1, 0, -1)$, ha de ser $(v_1, v_2, -v_1) \cdot (1, 0, -1) = 2v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$, luego un vector director de r es $(0, v_2, 0) \parallel (0, 1, 0)$, por lo que la recta es:

$$(0, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0) = (0, \lambda, 1). \text{ Intersección con } r_2:$$

$$(0, \lambda, 1) = (1+\mu, 1, -\mu) \Leftrightarrow \lambda = 1, 1+\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = -1$$

Por tanto, el punto de intersección es $(1-1, 1, -(-1)) = (0, 1, 1)$ y:

$$d^2(r_1, r_2) = d^2 \left((0, 0, 1), \left(\frac{a^2-a}{a^2+2}, \frac{2-2a}{a^2+2}, \frac{a+2}{a^2+2} \right) \right) =$$

$$\left(\frac{a^2-a}{a^2+2} \right)^2 + \left(\frac{2-2a}{a^2+2} \right)^2 + \left(1 - \frac{a+2}{a^2+2} \right)^2 = \frac{a^2(a-1)^2 + 4(a-1)^2 + a^2(a-1)^2}{(a^2+2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a^2+4)(a-1)^2 = (2a^2+4)(a^2-2a+1) = 2a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 8a + 4 = (a^2+2)^2 = a^4 + 4a^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 8a = a(a^3 - 4a^2 + 2a - 8) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = 0$$

(Ya que $a \neq 0$). Haciendo Ruffini con $a = 4$ nos queda $a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = (a-4)(a^2+2) = 0 \Leftrightarrow a = 4$, por lo que las rectas son $r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 4, -1) = (\lambda, 4\lambda, 1-\lambda)$ y $r_2:$

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu(1, 4, -1) = (1+\mu, 1+4\mu, -\mu)$$

Estudiamos aparte el caso $a = 0$. En este caso, para que el vector director de r , $(v_1, v_2, -v_1)$ sea perpendicular al de r_1 , $(1, 0, -1)$, ha de ser $(v_1, v_2, -v_1) \cdot (1, 0, -1) = 2v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$, luego un vector director de r es $(0, v_2, 0) \parallel (0, 1, 0)$, por lo que la recta es:

$(0, 0, 1) + \lambda (0, 1, 0) = (0, \lambda, 1)$. Intersección con r_2 :

$$(0, \lambda, 1) = (1 + \mu, 1, -\mu) \Leftrightarrow \lambda = 1 + \mu, 1 + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = -1$$

Por tanto, el punto de intersección es $(1 - 1, 1, -(-1)) = (0, 1, 1)$ y:

$$d(r_1, r_2) = d((0, 0, 1), (0, 1, 1)) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, \text{ por lo que otra solución válida es } r_1:$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda (1, 0, -1) = (\lambda, 0, 1 - \lambda) \text{ y } r_2:$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu (1, 0, -1) = (1 + \mu, 1, -\mu)$$

$$d^2(r_1, r_2) = d^2\left((0, 0, 1), \left(\frac{a^2 - a}{a^2 + 2}, \frac{2 - 2a}{a^2 + 2}, \frac{a + 2}{a^2 + 2}\right)\right) =$$

$$\left(\frac{a^2 - a}{a^2 + 2}\right)^2 + \left(\frac{2 - 2a}{a^2 + 2}\right)^2 + \left(1 - \frac{a + 2}{a^2 + 2}\right)^2 = \frac{a^2 (a - 1)^2 + 4 (a - 1)^2 + a^2 (a - 1)^2}{(a^2 + 2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + 4)(a - 1)^2 = (2a^2 + 4)(a^2 - 2a + 1) = 2a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 8a + 4 = (a^2 + 2)^2 = a^4 + 4a^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 8a = a(a^3 - 4a^2 + 2a - 8) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = 0$$

(Ya que $a \neq 0$). Haciendo Ruffini con $a = 4$ nos queda $a^3 - 4a^2 + 2a - 8 = (a - 4)(a^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 4$, por lo que las rectas son

$$r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda (1, 4, -1) = (\lambda, 4\lambda, 1 - \lambda) \text{ y}$$

$$r_2: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu (1, 4, -1) = (1 + \mu, 1 + 4\mu, -\mu)$$

Estudiamos aparte el caso $a = 0$. En este caso, para que el vector director de r , $(v_1, v_2, -v_1)$ sea perpendicular al de r_1 , $(1, 0, -1)$, ha de ser $(v_1, v_2, -v_1) \cdot (1, 0, -1) = 2v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$, luego un vector director de r es $(0, v_2, 0) \parallel (0, 1, 0)$, por lo que la recta es:

$(0, 0, 1) + \lambda (0, 1, 0) = (0, \lambda, 1)$. Intersección con r_2 :

$$(0, \lambda, 1) = (1 + \mu, 1, -\mu) \Leftrightarrow \lambda = 1 + \mu, 1 + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = -1$$

Por tanto, el punto de intersección es $(1 - 1, 1, -(-1)) = (0, 1, 1)$ y:

$$d(r_1, r_2) = d((0, 0, 1), (0, 1, 1)) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, \text{ por lo que otra solución válida es}$$

$$r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda (1, 0, -1) = (\lambda, 0, 1 - \lambda) \text{ y}$$

$$r_2: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu (1, 0, -1) = (1 + \mu, 1, -\mu)$$

Problema 4:

A4) Sabiendo que $P(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

Solución:

a) Se cumple que $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{11}{20} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$. Por otro lado:

$$P(A) = \frac{9}{20} = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B) + \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

Entonces,

$$P(A/B) - P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) \left(\frac{1}{P(B)} - \frac{1}{P(A)} \right) = \frac{3}{20} \left(\frac{1}{P(B)} - \frac{20}{9} \right) = \frac{1}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(B)} - \frac{20}{9} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{18} \Rightarrow \frac{1}{P(B)} = \frac{20}{9} + \frac{5}{18} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

b) Se cumple que:

$$\frac{14}{25} = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{9}{20} + P(C) - P(A) P(C) = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20} P(C) =$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{11}{20} P(C) \Rightarrow P(C) = \frac{\frac{14}{25} - \frac{9}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{56}{100} - \frac{45}{100}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{5}$$

(En la tercera igualdad hemos utilizado que, como A, C son independientes, $P(A \cap C) = P(A) P(C)$)

$$P(A \cap B) = 3/20; P(B) = 2/5; P(C) = 1/5$$

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

a) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

a) Se cumple que $|B| = \begin{vmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -b^3$, por lo que, si

$b \neq 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{adj}(B))^t = \frac{1}{-b^3} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3b & b \\ b & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2b & b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2b & b \\ 3b & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2b & b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b \\ 2b & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2b & 3b \\ b & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & 2b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & 2b \\ 2b & 3b \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-b^3} \begin{pmatrix} 2b^2 & -b^2 & -b^2 \\ -b^2 & 0 & b^2 \\ -b^2 & b^2 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{b} & \frac{2}{b} & \frac{2}{b} \\ \frac{2}{b} & 0 & -\frac{2}{b} \\ \frac{3}{b} & -\frac{3}{b} & \frac{3}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Por tanto, se cumple la identidad para todo $b \neq 0$

(Si $b \neq 0$, las columnas de la matriz B son autovectores de la matriz A , y C es la forma canónica de Jordan de A asociada a esos autovectores, por lo que $A = BCB^{-1}$)

b) Se cumple que $|AA^t| = |A| |A^t| = |A| |A| = |A|^2$, con:

$$|A| = |B C B^{-1}| = |B| |C| |B^{-1}| = |B| |C| \frac{1}{|B|} = |C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Entonces $|A A^t| = |A|^2 = 12^2 = 144$

c) Se cumple que:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} & 0 & -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-1+1 \\ 3-1 \\ 3+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Por tanto, la solución es:

$$x = -6, y = 2, z = 5$$

Problema 6:

B2) Calcule: a) $\int_1^e (x+2) \cdot Lx \cdot dx$. b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Solución:

a) Si llamamos $u = Lx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, $dv = (x+2) dx \Rightarrow v = \int (x+2) dx = \frac{(x+2)^2}{2}$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \int (x+2) Lx dx &= u v - \int v du = \frac{(x+2)^2}{2} Lx - \int \frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{(x+2)^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x} dx = \\ &= \frac{(x+2)^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \int \left(x + 4 + \frac{4}{x} \right) dx = \frac{(x+2)^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 4 Lx \right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_1^e (x+2) Lx dx &= \left[\frac{(x+2)^2}{2} Lx - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 4 Lx \right) \right]_1^e = \\ &= \frac{(e+2)^2}{2} Le - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + 4e + 4 Le \right) - \left[\frac{(1+2)^2}{2} L1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2} + 4 + 4 L1 \right) \right] = \frac{e^2}{2} + 2e + 2 - \left(\frac{e^2}{4} + 2e + 2 \right) + \frac{9}{4} = \\ &= \frac{e^2 + 9}{4} \end{aligned}$$

$$\int_1^e (x+2) \cdot Lx \cdot dx = \frac{e^2+9}{4}.$$

b) Se cumple que:

$$\begin{aligned} \log \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)}}{-\operatorname{sen} x} = \\ &= \frac{\sec^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{2 \frac{1}{2}}{-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(En la cuarta igualdad hemos aplicado L'Hôpital puesto que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{\cos x} = \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{0}{0}$)

1/e

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .

b) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución:

a) Las aristas que salen de $(1, 1, 1)$ son:

$$\vec{v}_1 = (2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 3, 2) - (1, 1, 1) = (0, 2, 1),$$

$$\vec{v}_3 = (3, a, 3) - (1, 1, 1) = (2, a-1, 2), \text{ luego se cumple que:}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |4 - (a-1) + 4| = \frac{1}{6} |8 - (a-1)| = 1 \Leftrightarrow |8 - (a-1)| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - (a-1) = \pm 6$$

Tenemos entonces $8 - (a-1) = 6 \Leftrightarrow a-1 = 2 \Leftrightarrow a = 3$, $8 - (a-1) = -6 \Leftrightarrow a-1 = 14 \Leftrightarrow a = 15$, luego los posibles valores son $a = 3$, $a = 15$.

Para $a = 15$, se cumple que $\|\vec{v}_3\| = \|(2, a-1, 2)\| = \|(2, 14, 2)\| = \sqrt{2^2 + 14^2 + 2^2} > \sqrt{14^2} = 14 > 10$, luego lo descartamos.

Para $a = 3$, se cumple que $\|\vec{v}_3\| = \|(2, a-1, 2)\| = \|(2, 2, 2)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} < 10$.

Comprobamos las demás aristas que contienen a P_4 :

$$\|(3, a, 3) - (2, 1, 0)\| = \|(1, a-1, 3)\| = \|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1+4+9} < 10,$$

$$\|(3, a, 3) - (1, 3, 2)\| = \|(2, a-3, 1)\| = \|(2, 0, 1)\| = \sqrt{5} < 10, \text{ luego la única solución es:}$$

$$a = 3$$

(Se puede comprobar que las aristas que no contienen a P_4 también tienen longitud menor que 10).

b) Si consideramos que los vértices P_1, P_2, P_3 están en la base del paralelepípedo (tapa de abajo), el cuarto vértice de la base, P_2' , ha de cumplir que los lados P_1P_2, P_3P_2' sean paralelos y de la misma longitud, luego ha de ser $P_2' = P_3 + P_1P_2 = P_3 + (P_2 - P_1) = (1, 3, 2) + ((2, 1, 0) - (1, 1, 1)) = (2, 3, 1)$.

$$\mathbf{P}_2' = (2, 3, 1)$$

Los tres vértices que faltan en la tapa de arriba del paralelepípedo, Q_2, Q_3 y Q_2' , han de cumplir que los lados $P_2Q_2, P_3Q_3, P_2'Q_2'$ sean paralelos a P_1Q y de su misma longitud, luego:

$$Q_2 = P_2 + P_1Q = P_2 + (Q - P_1) = (2, 1, 0) + ((3, 3, 3) - (1, 1, 1)) = (4, 3, 2),$$

$$Q_3 = P_3 + P_1Q = P_3 + (Q - P_1) = (1, 3, 2) + ((3, 3, 3) - (1, 1, 1)) = (3, 5, 4),$$

$$Q_2' = P_2' + P_1Q = P_2' + (Q - P_1) = (2, 3, 1) + ((3, 3, 3) - (1, 1, 1)) = (4, 5, 3)$$

$$\mathbf{Q}_2 = (4, 3, 2); \mathbf{Q}_3 = (3, 5, 4); \mathbf{Q}_2' = (4, 5, 3);$$

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:

a) Si llamamos x a lo que saca en el dado rojo, para que la puntuación sea 10 se tendrán que dar los siguientes casos:

$$2 + 2x = 10 \Rightarrow x = 4, \quad 4 + 2x = 10 \Rightarrow x = 3, \quad 6 + 2x = 10 \Rightarrow x = 2, \quad 1 + x = 10 \Rightarrow x = 9, \text{ imposible}, \\ 3 + x = 10 \Rightarrow x = 7, \text{ imposible}, \quad 5 + x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

Entonces:

$$P(\{\text{sacar } 10\}) = P(\{\text{sacar } 2 \text{ en el azul}\} \cap \{\text{sacar } 4 \text{ en el rojo}\}) + P(\{\text{sacar } 4 \text{ en el azul}\} \cap \{\text{sacar } 3 \text{ en el rojo}\}) + \\ + P(\{\text{sacar } 6 \text{ en el azul}\} \cap \{\text{sacar } 2 \text{ en el rojo}\}) + P(\{\text{sacar } 5 \text{ en el azul}\} \cap \{\text{sacar } 5 \text{ en el rojo}\}) = \\ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(En la primera igualdad hemos utilizado que los casos son disjuntos. En la segunda igualdad hemos utilizado que los dados son independientes y los números equiprobables).

$$P(\text{sacar } 10) = 1/9.$$

Para sacar una puntuación impar, ha de sacar impar en el dado azul, ya que si no su puntuación sería $2k + 2x$, par. En ese caso, su puntuación es $2k - 1 + x$, luego será impar si y sólo si lo que saque en el rojo sea par. Por tanto:

$$P(\{\text{sacar impar}\}) = P(\{\text{sacar impar en el azul}\} \cap \{\text{sacar par en el rojo}\}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{sacar impar}) = 1/4.$$

b)

La probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 se obtiene a continuación.

La puntuación 8 se obtiene en los casos siguientes:

Azul par: 23, 42, 61. Azul impar: 35 y 53.

Total: 5 casos, de los cuales, 3 se obtienen siendo par la puntuación del dado azul, por lo cual, aplicando Laplace: $P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{5} \Rightarrow P = \frac{3}{5}$.

El espacio muestral de los casos de suma par siendo par la puntuación del dado azul son los siguientes: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{21}, \underline{22}, \underline{23}, \underline{24}, \underline{25}, \underline{26} \\ \underline{41}, \underline{42}, \underline{43}, \underline{44}, \underline{45}, \underline{46} \\ \underline{61}, \underline{62}, \underline{63}, \underline{64}, \underline{65}, \underline{66} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Total: 18 sucesos.}$

El espacio muestral de los casos de suma par siendo impar la puntuación de los dos dados son los siguientes: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{11}, \underline{13}, \underline{15} \\ \underline{31}, \underline{33}, \underline{35} \\ \underline{51}, \underline{53}, \underline{55} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Total: 9 sucesos.}$

El total de sucesos de los dos espacios anteriores es 27, de los cuales, aparecen subrayados los que tienen impar en el dado rojo (negrita), que son 18 en total.

Aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{18}{27} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: 2023–2024
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
 dependiente del parámetro λ . Se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores de λ .
- Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

- Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
- El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta de ecuación $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0,3$ y $P(C/A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

- Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0,25$.
- Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $\det(A + B) = \det A + \det B$ no es cierta, en general.

a) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det[(A + B)^2] = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \cdot \det(AB)$.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

c) Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$.

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro λ . Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ .

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:

a) El sistema se puede expresar como $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si llamamos A a la matriz de coeficientes, tenemos que su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda - 1)^2 - 1 - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 2.$$

Entonces si $\lambda \neq 1, 2$, $|A| \neq 0$ por lo que el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 1$, la matriz de coeficientes queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que:

$rg(A) = 2$, siendo la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que también tiene rango 2 al tener las dos

primeras filas iguales (se puede quitar la primera), por lo que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < \text{número de incógnitas} = 3$, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda = 2$, la matriz de coeficientes queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que:

$rg(A) = 2$, siendo la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$, por lo que:

$rg(A) = 2 < rg(\bar{A}) = 3$ y el sistema es incompatible.

Por tanto:

Si $\lambda \neq 1, 2$, el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Si $\lambda = 2$, el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = 1$, el sistema se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ y+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ x=-z \end{cases}.$$

Tomando $z = \alpha$, tenemos que las soluciones son $y = 1 - \alpha$, $x = -\alpha$, es decir

$$\{(-\alpha, 1-\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $\alpha = -5$, tenemos una solución con $x = 5$ que es $x = -(-5) = 5$, $y = 1 - (-5) = 6$, $z = -5$

$$x = 5, y = 6, z = -5.$$

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Será $f(x) = ax^2 + bx + c$ y ha de cumplir $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c = 0$, $f'(0) = 1$. Se cumple que:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b = 1, \text{ luego las funciones pedidas son:}$$

$$f(x) = ax^2 + 1x + 0 = ax^2 + x, \text{ y un ejemplo es } f(x) = 1x^2 + x = x^2 + x$$

$$y = x^2 + x$$

b) Será $f(x) = ax^2 + bx + c$ y ha de cumplir $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(1) < 0$.

Se cumple que:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a \cdot 1 + b = 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a \Rightarrow c = 1 - a - b = 1 - a + 2a = 1 + a,$$

$$f''(x) = 2a \Rightarrow f''(1) = 2a < 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ luego las funciones pedidas son:}$$

$$f(x) = ax^2 - 2ax + 1 + a \text{ con } a < 0, \text{ y un ejemplo es (con } a = -1): f(x) = -x^2 + 2x + 1 - 1 = -x^2 + 2x$$

$$y = -x^2 + 2x$$

c)

Para que una función polinómica tenga dos extremos relativos es condición necesaria que su primera derivada tenga, al menos, dos raíces reales; es decir: sea, por lo menos de segundo grado.

La primera derivada de una función polinómica de grado 2 es de primer grado, por lo cual, incumple lo anteriormente expuesto.

Queda justificado lo pedido.

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

a) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta de ecuación $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución:

a)

El punto medio del segmento de extremos P y Q es $M\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$.

Los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2, 1, -1) - (1, -1, 3)] = (1, 2, -4).$$

Un vector normal del plano π pedido es $\vec{n} = (1, 2, -4)$.

El haz de planos γ perpendiculares al segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x + 2y - 4z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ , el plano π que contiene al punto $M\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \equiv x + 2y - 4z + D = 0 \\ M\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + 0 - 4 + D = 0; \quad 3 - 8 + 2D = 0;$$

$$2D = 5; \quad D = \frac{5}{2} \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 4z + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x + 4y - 8z + 5 = 0}.$$

b)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(2 + \lambda, \lambda, \lambda)$.

Los lados del triángulo son $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Las longitudes de los lados, en función del parámetro λ , son las siguientes:

$$\overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}.$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(2 + \lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2} = \sqrt{2 \cdot (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 1) + \lambda^2 - 6\lambda + 9} \Rightarrow \overline{PR} = \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 11}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2 + \lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1} \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt{3\lambda^2 + 2}.$$

$$(\overline{PQ})^2 + (\overline{PR})^2 + (\overline{QR})^2 = 34 \Rightarrow 21 + (3\lambda^2 - 2\lambda + 11) + (3\lambda^2 + 2);$$

$$34 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 34; \quad 6\lambda^2 - 2\lambda = 0; \quad 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Teniendo en cuenta que no existen coordenadas nulas, la solución es $\lambda = \frac{1}{3}$, y el

$$\text{tercer vértice es: } \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{R \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)}.$$

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = A_1 \cup A_2$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0,3$ y $P(C/A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0,25$.

b) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

Solución:

a)

Dos sucesos son incompatibles cuando su intersección es el conjunto vacío.

Del enunciado se deduce que los sucesos A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, cumpliéndose que $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B). \quad (*)$$

$$P(B/A_1) = 0,25 \Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = 0,25; \quad P(A_1 \cap B) = 0,25 \cdot P(A_1) = 0,25 \cdot 0,4 \Rightarrow$$

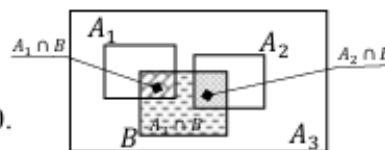
$$\Rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_2 \cap B) = 0,10.$$

$$P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1) = 2 \cdot 0,25 = 0,50.$$

$$P(B/A_3) = 0,5 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap B)}{P(A_3)} = 0,5; \quad P(A_3 \cap B) = 0,5 \cdot P(A_3) = 0,5 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_3 \cap B) = 0,10.$$

$$\text{Sustituyendo en } (*): P(B) = 0,10 + 0,10 + 0,10 \Rightarrow \underline{P(B) = 0,30}.$$



b)

Dos sucesos C y A_2 son independientes cuando se cumple las siguientes condiciones: $P(C/A_1) = P(C)$; $P(A_1/C) = P(A_1)$ y $P(C \cap A_1) = P(C) \cdot P(A_1)$.

$$\text{Datos: } P(C/A_2) = 0,3; \quad P(C/A_3) = 0,6.$$

$$P(C/A_2) = 0,3 \Rightarrow \frac{P(A_2 \cap C)}{P(A_2)} = 0,3; \quad P(A_2 \cap C) = 0,3 \cdot P(A_2) = 0,3 \cdot 0,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_2 \cap C) = 0,12.$$

$$P(C/A_3) = 0,6 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap C)}{P(A_3)} = 0,6; \quad P(A_3 \cap C) = 0,6 \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_3 \cap C) = 0,12.$$

Sabiendo que A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, se cumple que: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cap C) + P(A_2 \cap C) + P(A_3 \cap C) = P(A_1 \cap C) + 0,12 + 0,12 = \\ &= P(A_1) \cdot P(C) + 0,24 = 0,4 \cdot P(C) + 0,24; \quad P(C) - 0,4 \cdot P(C) = 0,24; \\ (1 - 0,4) \cdot P(C) &= 0,24; \quad 0,6 \cdot P(C) = 0,24; \quad P(C) = \frac{0,24}{0,6} \Rightarrow \underline{P(C) = 0,4}. \end{aligned}$$

Los sucesos C y A_2 son independientes si $P(C \cap A_2) = P(C) \cdot P(A_2)$:

$$0,12 \neq 0,4 \cdot 0,4 \Rightarrow \underline{\text{Los sucesos } C \text{ y } A_2 \text{ no son independientes.}}$$

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $\det(A + B) = \det A + \det B$ no es cierta, en general.

a) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det[(A + B)^2] = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \cdot \det(AB)$.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

c) Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \det[(A + B)^2] &= \det[(A + B) \cdot (A + B)] = \\ &= \det(A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B). \end{aligned}$$

Sabiendo que $\det(A + B) = \det A + \det B$, la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned} \det[(A + B)^2] &= \det|A \cdot A| + \det|A \cdot B| + \det|B \cdot A| + \det|B \cdot B| = \\ &= \det|A| \cdot \det|A| + \det|A| \cdot \det|B| + \det|B| \cdot \det|A| + \det|B| \cdot \det|B| = \\ &= \det(A^2) + 2 \cdot (\det|A| \cdot \det|B|) + \det(B^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\det[(A + B)^2] = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \cdot \det(AB), c. q. p.} \end{aligned}$$

b)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = a + a + 2 = 2a + 2.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 4 = 2.$$

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$$|C + D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (a + 1 - 1) \Rightarrow |C + D| = 4a.$$

$$\det(C + D) = \det C + \det D \Rightarrow 4a = 2a + 2 + 2; \quad 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

- Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$.

Solución:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

- Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$.

a)

Una función es par cuando $f(-x) = f(x)$ e impar cuando $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x).$$

La función $f(x)$ es impar.

- Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$.

Los puntos de corte de $f(x) = x^3 - 3x$ con el eje de abscisas son los siguientes:

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0; \quad x^3 - 3x = 0; \quad x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Los puntos}$$

de corte son: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$ y $B(\sqrt{3}, 0)$.

Los máximos y mínimos de $f(x)$ se obtienen a continuación.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0; \quad x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f''(x) = 6x.$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{Máximo relativo: } P(-1, 2).$$

Por simetría con respecto al origen (función impar): Mínimo relativo: $Q(1, -2)$.

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ Ni máx. ni mín. (para punto de inflexión).

Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = x(x - 3) = x^2 - 3x = 0; \quad x^3 = x^2; \quad x^3 - x^2 = 0;$$

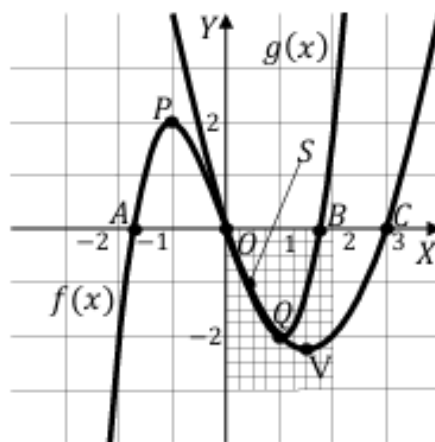
$$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow Q(1, -2) \end{cases}$$

La función $g(x) = x^2 - 3x$ es una parábola convexa (U), por ser positivo el coeficiente de x^2 , cuyo vértice, mínimo absoluto, es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9-18}{4} =$$

$$= -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right). \quad \text{Otro punto de la parábola es } C(3, 0).$$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta, donde es difícil observar la superficie a calcular. A continuación, comprobamos con un valor de x del intervalo a calcular $x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ en las dos funciones para saber cual de ellas está por encima.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1-12}{8} = -\frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{2-12}{8} = -\frac{10}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) > f(x).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^1 [x^2 - 3x - (x^3 - 3x)] \cdot dx = \\ &= \int_0^1 (-x^3 + x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} \right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} \Rightarrow \\ &= \underline{\underline{S = \frac{1}{12} u^2 \cong 0,083 u^2.}} \end{aligned}$$

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$, se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
- b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a)

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, -1, 0)$ y $\vec{v}_r = (3, -1, 1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0, -5, 3)$ y $\vec{v}_s = (1, 1, -1)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, -5, 3) - (2, -1, 0)] = (-2, -4, 3)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 - 2 + 2 - 12 + 3 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \text{ no son coplanarios.}$$

Las rectas r y s se cruzan.

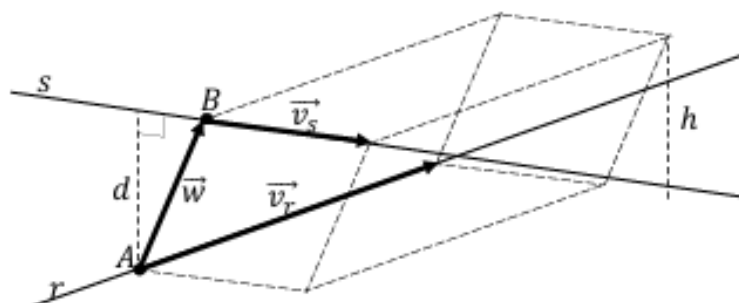
Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (3, -1, 1) \cdot (1, 1, -1) = 3 - 1 - 1 = 1 \neq 0.$$

Las rectas r y s no se cruzan perpendicularmente.

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, y el vector $\vec{w} = (-2, -4, 3)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{w}) = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot h = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{w})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}.$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{w})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{|-4|}{|i+j+3k+k-i+3j|} = \frac{4}{|4j+4k|} = \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{16+16}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\underline{d(r, s) = \frac{\sqrt{2}}{2} u \cong 0,71 u.}$$

b)

Siendo $\vec{v}_r = (3, -1, 1)$, el haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv 3x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ , el plano β que contiene al punto $P(5, -1, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv 3x - y + z + D = 0 \\ P(5, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 5 - (-1) + 2 + D = 0; 15 + 1 + 2 + D = 0;$$

$$18 + D = 0; D = -18 \Rightarrow \beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0.$$

La expresión de r por unas paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano β es el siguiente:

$$\beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot (2 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + \lambda - 18 = 0;$$

$$6 + 9\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 18 = 0; \quad 11\lambda - 11 = 0; \quad \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(5, -2, 1).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(5, -2, 1) - (5, -1, 2)] = (0, -1, -1) \Rightarrow \vec{v}_t = (0, 1, 1).$$

La recta t pedida es la que pasa por los puntos P y Q; expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguientes:

$$t \equiv \frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

a)

$$\text{Datos: } P(A) = 0,25; \quad P(\overline{A}) = 0,75; \quad P(B) = 0,30; \quad P(\overline{B}) = 0,70.$$

Lanzando 5 veces el dardo, gana uno de los dos cuando ha dado 3 veces en el centro de la diana. Si se quiere saber quien gana en 3 lanzamientos, es necesario, que uno de ellos haya dado en el centro de la diana y el otro no, pues, en otro caso, no habría certeza que gane uno de los dos, por lo cual, la probabilidad pedida es, que acierte las tres veces Antonio o que lo haga Benito:

$$\begin{aligned} \text{Gana Antonio: } P_1 &= [P(A) \cdot P(\overline{B})] \cdot [P(A) \cdot P(\overline{B})] \cdot [P(A) \cdot P(\overline{B})] = \\ &= [P(A)]^3 \cdot [P(\overline{B})]^3 = 0,25^3 \cdot 0,7^3 = 0,015625 \cdot 0,343 = 0,0054. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gana Benito: } P_2 &= [P(B) \cdot P(\overline{A})] \cdot [P(B) \cdot P(\overline{A})] \cdot [P(B) \cdot P(\overline{A})] = \\ &= [P(B)]^3 \cdot [P(\overline{A})]^3 = 0,3^3 \cdot 0,75^3 = 0,027 \cdot 0,421875 = 0,0114. \end{aligned}$$

$$P = P_1 + P_2 = 0,0054 + 0,0114 \Rightarrow \underline{P = 0,0168}.$$

b)

$$r = \frac{2}{3} \cdot 60 = 2 \cdot 20 = 40.$$

$$\text{Probabilidad de que Antonio falle: } p = 1 - 0,25 = 0,75.$$

$$\text{Probabilidad de que Antonio acierte: } q = 0,25.$$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 60; \quad p = 0,75; \quad q = 0,25; \quad r = 40.$$

Por ser: $\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 60 \cdot 0,75 = 45 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0,25 = 15 > 5 \end{array} \right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0,75 = 45.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = \sqrt{11,25} \cong 3,354.$$

$$X = B(60; 0,75) \approx N(45; 3,354).$$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{3,354}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$\begin{aligned} P &= P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39,5-45}{3,354}\right) = P\left(Z \geq \frac{-5,5}{3,354}\right) = P(Z \geq -1,64) = \\ &= P(Z < 1,64) = \underline{0,9495}. \end{aligned}$$