

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ASTURIAS



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Oviedo y Sergio Manso Bravo



Extraordinaria



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024 – 2025
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- > Responda en el pliego en blanco a cuatro de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos.
- > Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) (0.75 puntos) Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) (1 punto) En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) (0.75 puntos) Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$. Se

pide:

(a) (1 punto) Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) (1 punto) Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .

(c) (0.5 puntos) Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$, y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) (1.25 puntos) Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x - 2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ 3 - (x - 5)^2, & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.
- (b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
- (c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1).$$

Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.
- (b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Pregunta 3. Opción B

- (a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4 \sin(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.
- (b) **(1 punto)** Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \sin(x) \cos(x)$, calcula una expresión de g .

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \quad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s).$$

Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan
- (b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6 % de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95 % mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

(a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?

(b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Cual es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?

(b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?

(c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) (0.75 puntos) Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) (1 punto) En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) (0.75 puntos) Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Solución:

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) (0.75 puntos) Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 para alimentación y 225 para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) (1 punto) En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) (0.75 puntos) Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Solución:

(a) (0.75 puntos) El turista, en hospedaje en la zona oriente gasta $30x$, en la zona centro $40y$, y en la zona de occidente $30z$, de forma que se obtiene la ecuación:

$$30x + 40y + 30z = 290$$

Realizando un razonamiento similar con los gastos en alimentación se obtiene:

$$25x + 20y + 40z = 290$$

y con respecto al resto de conceptos se tendría:

$$25x + 25y + 25z = 225$$

El sistema, por lo tanto, sería:

$$\begin{cases} 30x + 40y + 30z = 290 \\ 25x + 20y + 40z = 290 \\ 25x + 25y + 25z = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 40 & 30 \\ 25 & 20 & 40 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 290 \\ 225 \end{pmatrix}$$

(b) (1 punto) Resolvamos el problema. Para ello tomemos la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 40 & 30 & 290 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 25 & 25 & 25 & 225 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2/25} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 40 & 30 & 290 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 30 & 40 & 30 & 290 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 25F_1} \\ \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 30F_1} \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 15 & 65 \\ 0 & 10 & 0 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 15 & 65 \\ 0 & 0 & 30 & 150 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{array} \right\}$$

y el turista ha pasado 2 días en la zona oriente, 2 días en la zona centro y 5 días en la zona occidente.

(c) (0.75 puntos) Si el turista decide no visitar la zona oriente, el sistema sería:

$$\left. \begin{array}{l} 40y + 30z = 290 \\ 20y + 40z = 290 \\ 25y + 25z = 225 \end{array} \right\}$$

y la matriz ampliada sería:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 40 & 30 & 290 \\ 20 & 40 & 290 \\ 25 & 25 & 225 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2/25} \left(\begin{array}{cc|c} 40 & 30 & 290 \\ 20 & 40 & 290 \\ 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 20 & 40 & 290 \\ 40 & 30 & 290 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 20F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 40F_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 20 & 110 \\ 0 & -10 & -70 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_3/2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 20 & 110 \\ 0 & 0 & -15 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible, por lo tanto no se pueden dar las condiciones pedidas.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$. Se

pide:

- (a) (1 punto) Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.
- (b) (1 punto) Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .
- (c) (0.5 puntos) Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Solución:

(a) (1 punto) Para que tenga inversa debe verificar que $\det(B) \neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1}]{=} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x-4 \end{pmatrix} = 1$$

Luego existe B^{-1} para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

(b) (1 punto)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1}]{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 - 2F_3 \\ F_2 - 4F_3}]{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cambiando de signo a la matriz obtenemos la inversa:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (0.5 puntos) Como $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(A)$ la condición se cumple para cualquier valor de x .

Ejercicio 2A

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ 3 - (x - 5)^2, & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

- (a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.
- (b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
- (c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x , ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Solución:

(a) **(1 punto)** La función es polinómica, por lo tanto es continua, salvo, a lo sumo en $x = 4$. Para que sea continua debe verificarse que: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 - (x - 5)^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{2} = 2$$

Como $f(4) = 3 - (4 - 5)^2 = 2$, la función es continua en su dominio.

(b) **(1 punto)** Para ver si tiene extremos se calcula la derivada y se iguala a cero. Si $0 \leq x < 4$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Por lo tanto no existen extremos en el intervalo $(0, 4)$. Además, como la primera derivada es positiva en todo el intervalo, la función es creciente.

Si $x > 4$:

$$f'(x) = -2(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Por lo tanto la función tiene un extremo en $x = 5$. Como la derivada es positiva en valores de $x < 5$ y negativa si $x > 5$, el punto es un máximo.

Además dado el signo de la derivada, la función crece en $(4, 5)$ y decrece en $(5, +\infty)$

(c) **(0.5 puntos)** Como el máximo se alcanza en $x = 5$ y $f(5) = 3 < 5$, no se llegaría a alcanzar nunca dicho valor.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$, y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) (1.25 puntos) Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x - 2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Solución:

$$(a) h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2(-1) - 1 \cdot 2}{(-1)^2} = -4$$

(b) Si f y k tienen extremos en $x = 3$ entonces $f'(3) = 0$ y $k'(3) = 0$, entonces

$$k'(x) = 2(x - 2)f(x) + (x - 2)^2 f'(x) \rightarrow k'(3) = 2f(3) = 0 \rightarrow f(3) = 0$$

Ejercicio 3A

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cos(4x^2 - 1).$$

Se pide:

(a) (1.5 puntos) Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) (1 punto) Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

(a)

$$\int x \cos(4x^2 - 1) dx = \frac{1}{8} \int 8x \cos(4x^2 - 1) dx = \frac{1}{8} \sin(4x^2 - 1) + k$$

Por lo tanto $F(x) = \sin(4x^2 - 1) + k$,

$$1 = F\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + k \rightarrow k = 1$$

y la función buscada es $F(x) = \sin(4x^2 - 1) + 1$

(b) Para ver si F tiene un extremo en dicho punto recordemos que $F'(x) = f(x)$, por lo tanto es suficiente con sustituir:

$$F'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

luego la respuesta es no.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3B

Pregunta 3. Opción B

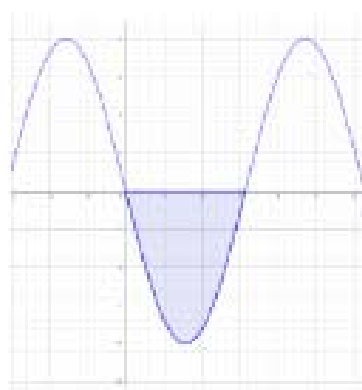
(a) (1.5 puntos) Se considera la función $f(x) = 4 \sin(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) (1 punto) Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \sin(x) \cos(x)$, calcula una expresión de g .

Solución:

(a) La función corta a los ejes en $\sin(x - \pi) = 0$, es decir, cuando $x - \pi = k\pi$. En el área pedida sólo se anularía en $x = 0$ y en $x = \pi$. Como la función es continua, si en un punto intermedio es negativa lo será en todo el intervalo $f(\pi/2) = 4 \sin(-\pi/2) = -4 < 0$.

El área pedida es:



Y el área:

$$A = - \int_0^{\pi} 4 \sin(x - \pi) dx = 4 \cos(x - \pi) \Big|_0^{\pi} = 4 \cos(0) - 4 \cos(-\pi) = 4 - 4(-1) = 8$$

(b) Si f es su primitiva, la función $g(x) = f'(x)$:

$$g(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

Ejercicio 4A

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \quad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s).$$

Se pide:

- (a) (1.25 puntos) Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan
- (b) (1.25 puntos) La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Solución:

(a) Un vector director de la recta t es el $\vec{u} = (1, -2, 2)$ y un vector director de la recta s es $\vec{v} = (2, -1, -2)$. Los puentes serían paralelos si sus vectores directores fuesen paralelos, es decir, si existiese un α tal que $(1, -2, 2) = \alpha(2, -1, -2)$. Es decir, debería cumplirse que $1 = \alpha 2$ y $-2 = -\alpha$, lo cual es imposible, por lo tanto los puentes no son paralelos.

Para ver si se cortan, buscamos un punto común, que sería solución del sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2 + t & = & 1 + 2s \\ -1 - 2t & = & 4 - s \\ 3 + 2t & = & 4 - 2s \end{array} \right\}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$Ab = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

y el sistema es incompatible, por lo tanto los puentes se cruzan, no se cortan.

(b) La distancia mínima entre las dos rectas que se cruzan es:

$$d = \frac{|(r_1(t) - r_2(t)) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (6, 6, 3).\end{aligned}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 9.$$

El vector entre los puntos de referencia es:

$$(2, -1, 3) - (1, 4, 4) = (1, -5, -1).$$

El producto escalar:

$$(1, -5, -1) \cdot (6, 6, 3) = 6 - 30 - 3 = -27.$$

La distancia mínima es:

$$d = \frac{|-27|}{9} = 3.$$

Los puntos más cercanos entre las rectas son aquellos tales que el vector PQ es perpendicular a r_1 y r_2 , por tanto, cogemos todos los vectores que unen un punto de r_1 y uno de r_2

$$\begin{aligned}r_2(s) - r_1(t) &= (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s) - (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t) = \\ &= \begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Imponemos la condición de que ese vector tienen que ser perpendicular a ambas rectas y se obtienen las siguiente ecuaciones,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} &= -9t - 9 = 0 \Rightarrow t = -1 \\ \begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} &= 9s - 9 = 0 \Rightarrow s = 1\end{aligned}$$

Con lo que se obtienen los puntos $P = r_1(-1) = (1, 1, 1)$ y $Q = r_2(1) = (3, 3, 2)$. Por lo tanto, el pasadizo más corto mide 3 decámetros (30 metros) y debe construirse entre los puntos $(1, 1, 1)$ y $(3, 3, 2)$.

Ejercicio 4B

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

- (a) (1 punto) Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.
- (b) (0.75 puntos) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.
- (c) (0.75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución:

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide

- (a) (1 punto) Estudia si los puntos pertenecen a un mismo plano.
- (b) (0.75 puntos) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.
- (c) (0.75 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución:

(a) Para ver si los puntos son coplanarios construimos los vectores $\vec{AB} = (-3, -1, 1)$, $\vec{AC} = (2, -2, 2)$ y $\vec{AD} = (-1, -3, -1)$ y veremos si son linealmente dependientes:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = -32 \neq 0$$

Por lo tanto los puntos no son coplanarios.

(b) El área del triángulo de vértices A, B y C es $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 8\vec{j} + 8\vec{k}$$

Por lo que el área del triángulo sería

$$\frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

(c) El volumen de un tetraedro es el valor absoluto de un sexto del producto mixto de $\vec{AB} = (-3, -1, 1)$, $\vec{AC} = (2, -2, 2)$ y $\vec{AD} = (-1, -3, -1)$. Como en el apartado primero ya hicimos este producto, la solución sería $\left| \frac{-32}{6} \right| \approx 5.3333$

Ejercicio 5A

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6% de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95 % mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

(a) (1.25 puntos) Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?

(b) (1.25 puntos) Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Solución:

Solución: Llamamos D al suceso la pieza extraída es defectuosa. Nos dicen que $P(D) = 0.06$. Llamamos F al suceso el sistema da fallo. Con los datos dados $P(F/D) = 0.95$ y $P(F/\bar{D}) = 0.04$.

(a) Llamando X al número de piezas que no son defectuosas entre las 10 seleccionadas, se trata de una $B(10, 0.94)$. Vamos a calcular la probabilidad de que ninguna sea defectuosa que sería el suceso complementario.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.94^{10} 0.06^0 = 0.5386$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al menos una sea defectuosa es $P(X \geq 1) = 1 - 0.5386 = 0.4614$

(b) Se pide $P(\bar{F})$ utilizando el teorema de la probabilidad total podemos escribir:

$$\begin{aligned} P(\bar{F}) &= 1 - P(F) = 1 - (P(F \cap D) + P(F \cap \bar{D})) = 1 - P(F/D)P(D) - P(F/\bar{D})P(\bar{D}) = \\ &= 1 - 0.95 \cdot 0.06 - 0.04 \cdot 0.94 = 1 - 0.0946 = 0.9054 \end{aligned}$$

Ejercicio 5B

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Cual es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?
- (b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?
- (c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Solución:

Solución: Llamaremos X al tiempo que tarda en resolver el problema.

(a)

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 30) &= P(X \leq 30) - P(X \leq 25) = P\left(\frac{X - 30}{5} \leq \frac{30 - 30}{5}\right) - P\left(\frac{X - 30}{5} \leq \frac{25 - 30}{5}\right) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0.5 - 1 + 0.8413 = 0.3413 \end{aligned}$$

(b)

$$P(X \geq 20) = P\left(\frac{X - 30}{5} \geq \frac{20 - 30}{5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0.9772$$

(c) $P(X \leq 20) = 0.7$ lo que corresponde a la normal tipificada $Z = 0.525$, de esta forma

$$0.515 = \frac{20 - \mu}{5} \rightarrow \mu = 20 - 5 \cdot 0.525 = 17.3750$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE
GENERAL

CURSO: **2024–2025**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.75 puntos) Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) (0.75 punto) Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) (1 punto) Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes) Se pide:

- (a) (1 punto) Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x - 1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.
- (b) (0.75 puntos) Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudiar si existe algún valor de x para el que pueda ser

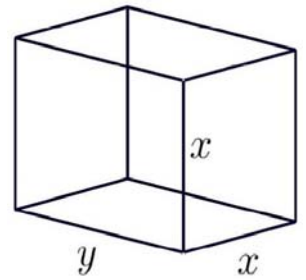
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) (0.75 puntos) Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.
- (b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
- (c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Pregunta 2. Opción B Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcula los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

- (a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
- (b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) (1 punto) Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
- (b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
- (c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determina la función g .

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1,1,1)$ y $B(-1,1,3)$. Se pide:

- (a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
- (b) (1 punto) Calcula las distancias de A y B al plano π .
- (c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:

- (a) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
- (b) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
- (c) (1 punto) Para $\beta = 0$ calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) (1.25 puntos) Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
- (b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
- (c) (1 punto) Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.5596$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) (0.75 puntos) Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.

(b) (0.75 punto) Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.

(c) (1 punto) Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Solución:

(a) Dado que el sistema es homogéneo, siempre tiene solución, al menos la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Para discutir el sistema calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2a, \text{ por lo que, si } a = 0 \text{ el sistema es compatible indeterminado ya que el}$$

$rg(A) \neq 3$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$, y tiene infinitas soluciones en caso contrario ($a \neq 0$) la solución es única (la trivial).

También podríamos haber hecho la discusión escalonando la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 + 5F_1]{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & -1 & 5a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

y llegamos a la misma conclusión, de esta manera tenemos ya la matriz escalonada que usaremos para la resolución del resto del ejercicio.

(b) Teniendo en cuenta la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior la matriz ampliada del sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a+2 \\ 2a \end{pmatrix}$ sería: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$

Que sólo tiene solución si el $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rg A$ que sucede si y sólo si $2a = 0$, i. e. $a = 0$

(c) Sabemos que el sistema del apartado (a) para $a = 0$ tiene infinitas soluciones. Para calcularlas podemos utilizar la matriz escalonada calculada en el primer apartado lo escribimos como

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2z \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes) Se pide:

(a) (1 punto) Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x - 1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) (0.75 puntos) Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudiar si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (0.75 puntos) Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. calcula los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Solución:

(a) Suponiendo que $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$.

Si $|M| = x$, entonces $|M^2| = |M| \cdot |M| = x^2$.

$$\text{Como } |(x-1)I| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \cdot |I| = (x-1)^2$$

Entonces, como $M^2 = (x-1)I$, tiene que pasar que $|M^2| = |(x-1)I|$

$$x^2 = (x-1)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow 0 = -2x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(b) Suponiendo ahora que $M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ y que $|M| = x$, al calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - 1$$

para que existiese dicho valor de x debería cumplirse que $x = x - 1$, pero esto es imposible ya que $0 \neq -1$.

La respuesta es que no existe ningún valor de x para que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con las hipótesis del problema

(c) Como $M = xM^2$ y teniendo en cuenta el tamaño de M , teniendo en cuenta el valor de sus determinantes:

$|M| = |xM^2| \rightarrow x = x^3|M^2| \rightarrow x = x^3x^2 \rightarrow x = x^5$, que como $x \neq 0$, $1 = x^4$, nos da como solución que $x = \pm 1$

$$\text{Si } \begin{cases} x = 1 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = 1 \\ x = -1 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = -1 \end{cases}$$

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0,4]$. Se pide:

- (a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.
 (b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
 (c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Solución:

(a) (1 punto) Calculemos los extremos de la función.

$$f'(t) = -2\sin(t + \pi/2)$$

Calculemos los puntos críticos:

$$f'(t) = 0 \rightarrow \sin(t + \pi/2) = 0$$

Las posibles soluciones son $t + \pi/2 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$,

Se comprueba fácilmente que $k=0$ y $k=1$ son las únicas soluciones que cumplen $t \in [0,4]$.

$$\begin{cases} t + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \notin [0,4] \\ t + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \in [0,4] \end{cases} \text{ Es decir, la } t = \pi/2.$$

Veamos si se tratan de un máximo o un mínimo:

$$f''(t) = -2\cos(t + \pi/2)$$

Como $f''(\pi/2) = 2 > 0$, en $x = \frac{\pi}{2}$ tiene un mínimo. $f(\pi/2) = 2\cos(\pi) + 10 = 8$

también se puede estudiar el signo de la primera derivada como sigue:

$$\text{ya que } \pi/4 \in (0, \pi/2) \rightarrow f'(\pi/4) = -2\sin(\pi/4 + \pi/2) < 0$$

$$\text{ya que } \pi \in (\pi/2, 4) \rightarrow f'(\pi) = -2\sin(\pi + \pi/2) > 0$$

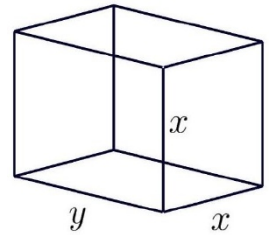
	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, 4)$
$-2 \cdot \sin(t + \pi/2)$	-	+
$f'(x)$	$\searrow$ Decreciente	$\nearrow$ Creciente

Por lo tanto f tiene en $x = \frac{\pi}{2}$ un mínimo. $f(\pi/2) = 2\cos(\pi) + 10 = 8$

(b) En los extremos del intervalo $f(0) = 10$ y $f(4) = 11.51$, por lo tanto 8 es un mínimo absoluto. Por lo tanto, el mínimo valor que toma la función en el intervalo es 8, y no se llega a vaciar.

(c) Se buscan los intervalos de crecimiento de la función. Como en el intervalo pedido sólo hay un mínimo, el intervalo de crecimiento sería $[\frac{\pi}{2}, 4]$ y aumenta el volumen durante $4 - \frac{\pi}{2}$ horas ≈ 2.4292 horas.

Pregunta 2. Opción B Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcula los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Solución:

La cantidad de material que se utilizaría para una caja sin tapa como la del dibujo será:

$$3 = 2x^2 + 3xy \rightarrow 3xy = 3 - 2x^2, \text{ es decir, } y = \frac{3-2x^2}{3x}. \text{ (función auxiliar)}$$

La función volumen es: $f(x, y) = x^2y$, por lo tanto $f(x) = x^2 \frac{3-2x^2}{3x} = \frac{3x-2x^3}{3}$. (función a maximizar)

Para calcular el máximo tendremos que calcular los puntos críticos, es decir los ceros de la función derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3 - 6x^2) = 1 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \leftrightarrow 2x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo tanto, la función tiene un *punto crítico* en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (observe que la otra solución es negativa y no es válido como longitud, área o volumen).

Como $f''(x) = -4x$, y $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ entonces f tiene un máximo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Si } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = \frac{3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow y = \frac{3-2\cdot\frac{1}{2}}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow y = 2\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ la capacidad es } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$$

Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

(a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.

(b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas

$$x = -1 \text{ y } x = 1.$$

Solución:

(a) Una primitiva de f se calcula como sigue:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + K$$

Como en 0 debe valer 1 ($F(0) = 1$) se tiene que

$$1 = \frac{1}{2} \ln(1) + K \rightarrow K = 1$$

y la primitiva buscada es

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1$$

(b) Para calcular el área encerrada hemos de estudiar el signo de la función en el intervalo $[-1,1]$.

El denominador de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ es siempre > 1 ya que $x^2 > 0$ para cualquier valor real por lo que el signo de la función dependerá sólo de numerador.

Por lo que $\begin{cases} f(x) < 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y, por lo tanto, el área pedida será:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{-x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx &= -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln((0)^2+1) + \frac{1}{2} \ln((-1)^2+1) + \frac{1}{2} \ln(1^2+1) - \frac{1}{2} \ln(0^2+1) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \ln(2) \approx 0.6931 \end{aligned}$$

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

(a) (1 punto) Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b

(b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?

(c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determina la función g .

Solución:

(a) Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ entonces $G'(x) = g(x)$, por lo tanto

$$g(x) = x^2 + 2ax + b$$

(b) Las primitivas de g son de la forma, una cualquiera más una constante cualquiera, por lo tanto todas las primitivas de g serían

$$G(x) + k = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K, \forall K \in \mathbb{R}$$

(c) $\begin{cases} \text{Si } g(1) = 2 \rightarrow 1 + 2a + b = 2 \\ \text{Si } g(0) = 1 \rightarrow b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2a + 1 = 2 \rightarrow a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ y la función sería $g(x) = x^2 + 1$.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1,1,1)$ y $B(-1,1,3)$. Se pide:

- (a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
 (b) (1 punto) Calcule las distancias de A y B al plano π .
 (c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Solución:

(a) El punto medio es $P = \frac{1}{2}((1,1,1) + (-1,1,3)) = (0,1,2)$.

Un vector normal al plano puede ser el vector $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2)$

Con lo que el plano pedido $\pi \equiv \{P; \overrightarrow{AB}\} = -2x + 2z + D = 0$

como $P \in \pi \Rightarrow 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4$ por lo que el plano es $\pi \equiv -2x + 2z - 4 = 0$, o lo que es lo mismo $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.

(b) La distancia de cada uno de estos puntos es la mitad de la distancia entre ellos:

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} d(A, B) = \frac{1}{2} \sqrt{(1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4+4} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} = \sqrt{2}u$$

(c) (0.5 puntos) Un punto cualquiera puede ser $R(1,0,-1)$ ya que verifica la ecuación del plano.

$$d(A, R) = \|\overrightarrow{AR}\| = \|(0, -1, -2)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}u$$

$$d(B, R) = \|\overrightarrow{BR}\| = \|(-2, 1, -4)\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}u$$

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.

(b) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.

(c) (1 punto) Para $\beta = 0$ calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Solución:

(a) $r \parallel \pi \Leftrightarrow$ tomando dos puntos de r , por ejemplo, $A = (0, 1, 1)$ y $B = (-2, 0, 4)$.

El vector $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3)$ (que es un vector director de r), debe ser perpendicular al vector normal al plano $\vec{n}_\pi$, es decir, su producto escalar debe ser 0.

Un vector normal al plano es $\vec{n}_\pi = (2, 1, \beta)$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (-2, -1, 3) \cdot (2, 1, \beta) = -4 - 1 + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{5}{3}$$

(b) Para que la recta y el plano sean perpendiculares $r \perp \pi$, el vector director de la recta, $\overrightarrow{AB}$ debe ser proporcional al normal del plano $\vec{n}_\pi$, es decir $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{n}_\pi$

$$(-2, -1, 3) = \lambda(2, 1, \beta) \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -1 = \lambda \\ 3 = \beta\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ y } \beta = -3$$

(c) Si $\beta = 0 \rightarrow \pi \equiv 2x + y = 3$.

Calculamos la recta perpendicular a π que pasa por $P = (-1, 0, 1)$. La recta es

$$(x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo las coordenadas de un punto cualquiera de la recta

(dependiendo de λ) en las ecuaciones del plano obtendremos un valor de λ para que un punto que está en r este también en π

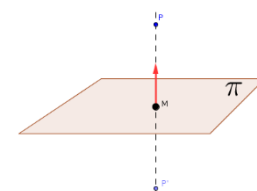
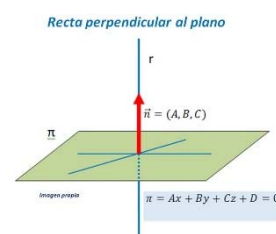
$$2(-1 + 2\lambda) + \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda = 1$ el punto $M = (-1 + 2, 1, 1) = (1, 1, 1) = r \cap \pi$ la intersección del plano π y la recta perpendicular al plano y que pasa por $(-1, 0, 1)$.

Este punto es el punto medio del segmento con extremos en el simétrico pedido y $(-1, 0, 1)$. Por lo tanto, el punto P' que buscamos es:

$$\frac{1}{2}(P' + (-1, 0, 1)) = (1, 1, 1) \Leftrightarrow P' = 2(1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (3, 2, 1)$$

O el lenguaje vectorial: $P' = P + 2\overrightarrow{PM} = (-1, 0, 1) + 2(2, 1, 0) = (3, 2, 1)$



Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

(a) (1.25 puntos) Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?

(b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Solución:

(a) Para calcular la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro, calcularemos la probabilidad de que ninguna sea de 1 euro que es el suceso complementario, ya que:

El nº de formas distintas de elegir 3 monedas de entre 10 se calcula mediante el nº combinatorio:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120, \text{ que serán los casos posibles del experimento.}$$

Los casos favorables serían extraer 3 monedas de entre las 5 que no son de 1 euro, es decir $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es;

$$1 - \frac{10}{120} = 0.9167$$

(b) Al ser un experimento sin reemplazamiento usaremos un esquema de árbol para modelizar el problema.

Llamaremos C_1 = "Sacar una moneda de 10 céntimos en la primera extracción"

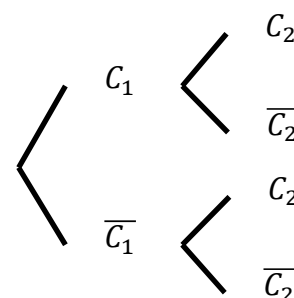
Podemos decir que

$$P(C_1) = \frac{2}{10} = 0.2, P(\overline{C_1}) = 1 - P(C_1) = 0.8$$

Llamemos C_2 = "Sacar una moneda de 10 céntimos en la segunda extracción".

Utilizando el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$P(C_2) = P(C_2 \cap C_1) + P(C_2 \cap \overline{C_1}) = P(C_2/C_1)P(C_1) + P(C_2/\overline{C_1})P(\overline{C_1}) = \frac{1}{9}0.2 + \frac{2}{9}0.8 = 0.2$$



Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

(a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?

(b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?

(c) (1 punto) Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.5596$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$.

Solución:

Llamaremos $X =$ "Esperanza de vida de un elefante" que según el enunciado $X \sim N(82,30)$.

(a) (0.75 puntos) Se pide:

$$p(X > 100) = 1 - p(X \leq 100) = 1 - p\left(\frac{X - 82}{30} \leq \frac{100 - 82}{30}\right) = 1 - p(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

Por lo tanto, se espera que el 27.43 % de los elefantes vivan más de 100 años.

(b) (0.75 puntos) En este caso llamamos $Y =$

"Nº de elefantes que viven más de 100 años de una muestra de 4".

Se trata por tanto de una distribución binomial $Y \sim B(n, p(X > 100))$ es decir $Y \sim B(4, 0.2743)$. La probabilidad buscada, entonces, sería

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2743^0 (1 - 0.2743)^4 = 0.2774$$

(c) (1 punto) Nos piden que valor toma $a \in \mathbb{R}$ para que $p(X \leq 82 + a) = 0.98$

Tipificando la v.a. X :

$$P\left(\frac{X - 82}{30} \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98$$

Buscamos un valor z_a tal que $P(Z \leq z_a) = 0.98$, como $F(2.06) = 0.98$ entonces $\frac{a}{30} = 2.06$ y

$$a = 30 \cdot 2.06 = 61.8.$$