

Matemáticas II

PAU 2025

Comunidad autónoma de
ISLAS BALEARES



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano





PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
CURSO: **2024 – 2025**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

El examen consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar solo uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero.

Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.

a) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 metros (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 metros sobre la siguiente recta $\{x=0 \quad 35y+12z=-3.780\}$ hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

b) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?

c) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria $\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda\}$. Si dicho objeto no cambia la trayectoria, ¿podría chocar con el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x euros/kg), de hierro (que tiene un coste de y euros/kg) y de plástico (que tiene un coste de z euros/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x+y-z=40$ E.

Producto 2: $x-y+2z=90$ E.

Producto 3: $x+2y=70$ E.

Producto 4: $x-y+z=50$ E.

- Describe qué significa la ecuación del producto 1.
- Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x, y, z ? Justifica tu respuesta.

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- Sabiendo que $AB+I=A$, calcula la inversa de A en función de I y B .
- Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB+I=A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es $Ax = -0,0001x^3 + 0,05x^2 - 4x + 200$, donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

- Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado. Indicación: Se puede utilizar el teorema de Bolzano.
- Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

C2) Dada la función $f(x) = 1x \cdot \ln 2x$,

- Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.
- Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=12$ y $x=5$.

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0,0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99 % y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99 %, responde:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
- ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
- Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio A.-

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2.023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.

a) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 metros (véase la figura). A Continuación, éste se desplazó 37 metros sobre la siguiente recta $\{x=0 \quad 35y+12z=-3.780$ hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

b) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?

c) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria $\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda$. Si dicho objeto no cambia la trayectoria, ¿podría chocar con el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Respuesta A:

a)

La profundidad deseada son 350 metros, por lo cual, el punto que ocupa el dispositivo es $P_0(0, 0, -315)$.

La expresión de la recta $r \equiv \{x=0 \quad 35y+12z=-3.780$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$z=\lambda; y=-3.780-12\lambda/35=-108-12\lambda/35 \Rightarrow r \equiv \{x=0 \quad y=-108-12\lambda/35 \quad z=\lambda$$

Un vector director de r es, para $\lambda=1$, cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $v=(0, -12/35, 1)$, por ejemplo, $v_r=(0, -12, 35)$.

De los infinitos posibles vectores v_r , necesitamos los que tengan de módulo 37:

$$v_r^2=0^2+(-12\mu)^2+(35\mu)^2=37; 144\mu^2+1.225\mu^2=1.369;$$

$$1.369\mu^2=1.369; \mu^2=1 \Rightarrow \mu=-1, \mu=1.$$

Los vectores posibles son:

$$v_{r1}=(0, 12, -35) \text{ y } v_{r2}=(0, -12, 35).$$

Por ser la profundidad deseada mayor (en valor negativo) que la posición del dispositivo, el valor de la componente z del vector ha de ser negativa, por lo cual, el vector buscado es el siguiente: $v_{r1}=(0, 12, -35)$.

El punto D pedido es el siguiente:

$$OP = OP + PQ = OP + vr1 = 0, 0, -315 + 0, 12, -35 = 0, 12, -350.$$

$$\mathbf{Q: (0, -12, -350)}.$$

b)

Se nos pide el plano, horizontal, que contiene al punto $Q(0, 12, -350)$ y, lógicamente, tiene como vector normal $n = 0, 0, 1$.

El plano tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv z + D = 0$.

$$\pi \equiv z + D = 0 \quad Q(0, 12, -350) \Rightarrow -350 + D = 0; \quad D = 350 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv z + 350 = 0.$$

c)

Se trata de averiguar si el plano $\pi \equiv z - 350 = 0$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$

se cortan (en cuyo caso tienen un punto en común) o son paralelos (no tienen puntos en común).

Un vector director de la recta s es $vs = 4, 1, 10$.

La condición necesaria para que una recta y un plano sean paralelos es que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$vs \cdot n = 4, 1, 10 \cdot 0, 0, 1 = 10 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son secantes.}$$

El objeto observado podría chocar con el dispositivo.

El punto de corte de la recta $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv z - 350 = 0$ es el siguiente:

$$\pi \equiv z + 350 = 0 \quad s \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases} \Rightarrow -380 + 10\lambda + 350 = 0; \quad 10\lambda = 30; \quad \lambda = 3.$$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 4 \cdot 3 = 5 + 12 = 17 & y &= 10 + 3 = 13 & z &= -380 + 10 \cdot 3 = -380 + 30 = -350 \Rightarrow N(17, 13, -350). \end{aligned}$$

El punto de la posible colisión es N (17, 13, -350).

Parte B.-

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x euros/kg), de hierro (que tiene un coste de y euros/kg) y de plástico (que tiene un coste de z euros/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x+y-z=40$ E.

Producto 2: $x-y+2z=90$ E.

Producto 3: $x+2y=70$ E.

Producto 4: $x-y+z=50$ E.

a) Describe qué significa la ecuación del producto 1.

b) Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

a) Sabiendo que $AB+I=A$, calcula la inversa de A en función de I y B .

b) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB+I=A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Respuestas Parte B1.-

a)

Es una ecuación con tres incógnitas que indican que dos kilos de madera, más un kilo de hierro, menos un kilo de plástico, valen 40 euros.

b)

Restando a la segunda ecuación la cuarta resulta: $z=40$.

Sustituyendo el valor de z en las ecuaciones primera, segunda y tercera, resulta:

$\begin{cases} 2x+y=80 \\ x-y=10 \\ x+2y=70 \end{cases}$. Sumando las dos primeras ecuaciones resulta: $3x=90$; $x=30$.

El valor de la incógnita restante es $y=20$.

El sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es compatible determinado.

El kg de madera, hierro y plástico es de 30, 20 y 40 euros, respectivamente.

Parte B2

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

a) Sabiendo que $AB+I=A$, calcula la inversa de A en función de I y B.

b) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB+I=A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Respuestas Parte B2.-

a)

$$AB+I=A; A-AB=I; A \cdot I-B=I.$$

Por definición de inversa de una matriz: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, de la expresión (*) se deduce que:

$$A^{-1} = I - B.$$

b)

$$B = I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$B = \begin{vmatrix} -11 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 \cdot 2 + 2 = 38 \neq 0.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes que si se dividen los elementos de una línea de una matriz por un número, su determinante queda dividido por ese número.

La matriz B es invertible.

Ejercicio C.-

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es $Ax = -0,0001x^3 + 0,05x^2 - 4x + 200$, donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

a) Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado. Indicación: Se puede utilizar el teorema de Bolzano.

b) Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

C2) Dada la función $fx = 1x \cdot L2x$,

a) Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.

b) Calcula el área comprendida entre fx , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=12$ y $x=5$.

Respuestas Parte C1.-

a)

La función $Ax = -0,0001x^3 + 0,05x^2 - 4x + 200$, por ser polinómica, es continua en su dominio.

El teorema de Bolzano dice que “si fx es una función continua en a, b y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $fc = 0$ ”.

$$A0 = 200 > 0.$$

$$\begin{aligned} A500 &= -0,0001 \cdot 500^3 + 0,05 \cdot 500^2 - 4 \cdot 500 + 200 = \\ &= -0,0001 \cdot 125.000.000 + 0,05 \cdot 250.000 - 2.000 + 200 = \\ &= -12.500 + 12.500 - 1.800 = -1.800 < 0. \end{aligned}$$

Queda demostrado que $\exists x \in \mathbb{R}$ para el cual la altura es 0 en $[0, 500]$.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$A'x = -0,0003x^2 + 0,1x - 4.$$

$$A'x = 0 \Rightarrow -0,0003x^2 + 0,1x - 4 = 0; \quad 3x^2 - 1.000x + 40.000 = 0;$$

$$x = 1.000 \pm \sqrt{1.000.000 - 480.000} = 1.000 \pm \sqrt{520.000} = 1.000 \pm 4 \cdot 13 \cdot 10.000 =$$

$$=1.000 \pm 200 \cdot 136 = 500 \pm 100 \cdot 133 \{x_1 = 1003 \cdot 5 - 13 \cong 46,48$$

$$x_2 = 1003 \cdot 5 + 13 \cong 286,85.$$

Por ser Ax polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $0; 46,48$, $46,48; 286,85$ y $286,85; 500$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=10 \in 0; 46,48$ es:

$$A'10 = -0,0003 \cdot 10^2 + 0,1 \cdot 10 - 4 = -0,03 - 3 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y de lo expresado anteriormente se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$A'x < 0 \Rightarrow \text{Decrecimiento: } x \in 0; 46,48; 286,85; 500.$$

$$A'x > 0 \Rightarrow \text{Crecimiento: } x \in 46,48; 286,85.$$

De lo anterior se deduce que la función tiene dos puntos críticos: para $x=46,48$ la función presenta un mínimo relativo y para $x=286,85$ un máximo relativo.

Respuestas Parte C2.-

a)

Teniendo en cuenta que los números negativos y el cero no tienen logaritmo y también por contener $1x$, el dominio de la función es $D_f(0, +\infty)$.

$$f(x) = \log_2 x = \log_2 0 = -\infty = -\infty.$$

La función $f(x)$ tiene la asíntota vertical $x=0$.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

La función $f(x)$ tiene la asíntota horizontal $y=0$.

b)

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es el siguiente:

$$f(x)=0 \Rightarrow \log_2 x=0; 2^x=1; x=1 \Rightarrow P(1, 0).$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función en su dominio, las ordenadas correspondientes al intervalo de la superficie a calcular, 12, 5, son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_5^{12} f(x) \cdot dx = \int_5^{12} \log_2 x \cdot dx = \frac{1}{\ln 2} \int_5^{12} \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{\ln 2} [\ln x]_5^{12} = \frac{1}{\ln 2} (\ln 12 - \ln 5) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{12}{5} \approx 2,65$$

$$S = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{12}{5} \approx 2,65$$

Ejercicio D.-

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0,0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99 % y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99 %, responde:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

b) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Respuesta Parte D1.-

Haz un diagrama de árbol

a)

$$P = P_{P_0/T} = P_{T \cap P_0} / P_T = P_T \cdot P_{P_0/T} = 0,9995 \cdot 0,010,9995 = 0,01.$$

b)

$$P = P_{T/Ne} = P_{T \cap Ne} / P_{Ne} = P_T \cdot P_{Ne/T} / (P_T \cdot P_{Ne/T} + P_{T^c} \cdot P_{Ne/T^c}) = 0,0005 \cdot 0,010,0005 \cdot 0,01 + 0,9995 \cdot 0,99 =$$

$$= 0,0000050,000005 + 0,989505 = 0,0000050,989510 = 0,000005.$$

Respuesta Parte D2.-

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
- Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Respuesta

- Haz un diagrama de árbol

$$P_{St} = P_{M \cap St} + P_{H \cap St} = P_M \cdot P_{St/M} + P_H \cdot P_{St/H} =$$

$$= 0,55 \cdot 0,13 + 0,45 \cdot 0,37 = 0,0715 + 0,1665 = 0,2380.$$

-

$$P = P_{M/St} = P_{M \cap St} / P_{St} = P_M \cdot P_{St/M} / P_{St} = 0,55 \cdot 0,13 / 0,2380 = 0,0715 / 0,2380 = 0,3004.$$

-

$$P = P_{M/St} = P_{M \cap St} / P_{St} = P_M \cdot P_{St/M} / (1 - P_{St}) = 0,55 \cdot 0,871 - 0,2380 = 0,478507620 = 0,6280.$$



Govern de les
Illes Balears

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
CURSO: 2024 – 2025
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

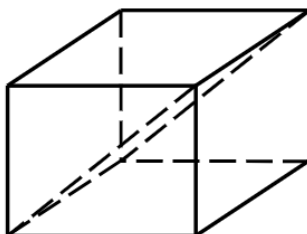
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 3 y 4 deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas las **calculadoras de tipo 1 y 2**. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2,5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión $3 \times 2,5$ metros, tal como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifique el proceso.
- Una de las dos caras de dimensión $2 \times 2,5$ metros constituye la puerta del contenedor tal como se muestra en la figura. ¿Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones $2,75 \times 2,75$ metros?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Dado el sistema $\{kx + y = 1 \quad ky + z = 0 \quad 3x - y - z = 0\}$, donde k es un número real cualquiera.

- Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.
- Resuelve el sistema cuando sea posible.

B2) Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3,50 euros, cada hamburguesa cuesta 4 euros y cada refresco cuesta 1,50 euros. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

a) ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 euros y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

b) Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas, ¿cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

a) Calcula la recta r tangente a la curva en el punto $P(2, 0)$.

b) Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

C2) La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función $H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}}$, donde el tiempo está medido en segundos.

a) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c) Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45 % de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40 % han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los productos no averiados, se sabe que el 55 % también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

a) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?

b) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?

c) Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

D2) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A y B los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30$, calcula:

a) $P(A \cap B)$. b) $P(B - A)$. c) $P(A' \cap B)$.

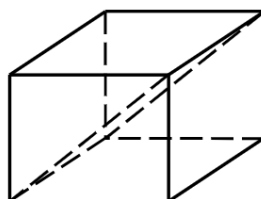
RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Parte A.

A1

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2,5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión $3 \times 2,5$ metros, tal como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



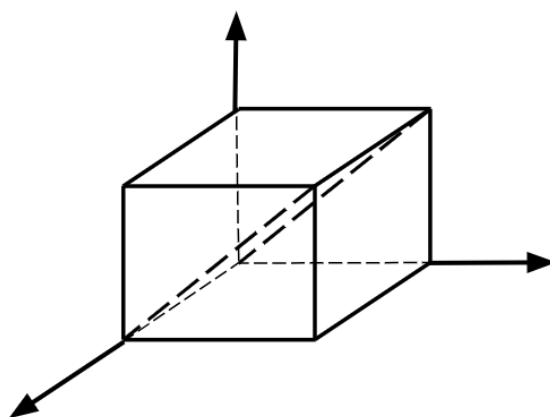
a) Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.

b) Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifique el proceso.

c) Una de las dos caras de dimensión $2 \times 2,5$ metros constituye la puerta del contenedor tal como se muestra en la figura. ¿Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones $2,75 \times 2,75$ metros?

Respuesta

a)



b)

$$d_1 = d_2 = \overline{OB} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (2,5 - 0)^2} = \sqrt{0 + 9 + 6,25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2 = \sqrt{15,25} \text{ metros} \cong 3,905 \text{ metros.}$$

El plano π que contiene a las dos diagonales contiene a los puntos O , A y B' , que determinan los vectores $\vec{OA} = (2, 0, 0)$ y $\vec{OB'} = (0, 3, 2,5)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\beta(O; \vec{OA}, \vec{OB'}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2,5 \end{vmatrix} = 0; \quad 6z - 5y = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 5y - 6z = 0}.$$

c)

La puerta es un rectángulo cuya diagonal es $\overline{B'C} = \overline{BC'}$.

La lámina se podrá introducir en el contenedor si $\overline{B'C} = \overline{BC'} > 2,75$.

$$\begin{aligned} \overline{B'C} &= \sqrt{(2-0)^2 + (3-3)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{4+0+6,25} = \sqrt{10,25} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{10,25} &= 3,20 > 2,75 \Rightarrow \underline{\text{La lámina puede introducirse en el contenedor.}} \end{aligned}$$

Solución: D = 3,9 m; Plano: 5y – 6z = 0; La lámina puede introducirse en el contenedor

Parte B.

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Dado el sistema $\{kx + y = 1 \quad ky + z = 0 \quad 3x - y - z = 0\}$, donde k es un número real cualquiera.

a) Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.

b) Resuelve el sistema cuando sea posible.

B2) Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3,50 euros, cada hamburguesa cuesta 4 euros y cada refresco cuesta 1,50 euros. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

a) ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 euros y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

b) Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas, ¿cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Respuesta B1

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = (k \ 1 \ 0 \ 0 \ k \ 1 \ 3 \ -1 \ -1) \text{ y } M' = (k \ 1 \ 0 \ 0 \ k \ 1 \ 3 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0).$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M| = |k \ 1 \ 0 \ 0 \ k \ 1 \ 3 \ -1 \ -1| = -k^2 + 3 + k = 0; \quad k^2 - k - 3 = 0; \quad k = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \quad k_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Para } \left\{ k \neq \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad k \neq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S. C. D.}$$

$$\text{Para } k = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow M' = (k \ 1 \ 0 \ 0 \ k \ 1 \ 3 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0) \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1 \ 0 \ 1 \ k \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0| = -\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $\left\{k = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

b)

Se resuelve el sistema $\forall k \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

$kx + y = 1 \quad ky + z = 0 \quad 3x - y - z = 0 \Rightarrow$ Sumando a la tercera ecuación la segunda, resulta:

$$\begin{aligned} & kx + y = 1 \quad 3x + (k-1)y = 0 \\ & -3kx - 3y = -3 \quad \underline{3kx + (k^2 - k)y = 0} \Rightarrow -3y + (k^2 - k)y = -3; \\ & (k^2 - k - 3)y = -3; \quad y = \frac{-3}{k^2 - k - 3}. \end{aligned}$$

$$kx + y = 1; \quad kx = 1 - y = 1 + \frac{3}{k^2 - k - 3} = \frac{k^2 - k}{k^2 - k - 3} \Rightarrow x = \frac{k-1}{k^2 - k - 3}.$$

$$ky + z = 0; \quad z = -ky = -k \cdot \frac{-3}{k^2 - k - 3} \Rightarrow z = \frac{3k}{k^2 - k - 3}.$$

$$\text{Solución: } x = \frac{k-1}{k^2 - k - 3}, \quad y = \frac{-3}{k^2 - k - 3}, \quad z = \frac{3k}{k^2 - k - 3}, \quad \forall k \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

Solución:

$$x = \frac{k-1}{k^2 - k - 3}, \quad y = \frac{-3}{k^2 - k - 3}, \quad z = \frac{3k}{k^2 - k - 3}, \quad \forall k \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Respuesta B2:

a)

Sean x , y , z el número de perritos calientes, hamburguesas y refrescos que se venden en el partido de baloncesto, respectivamente.

El sistema que resulta del enunciado es el siguiente:

$$3,5x + 4y + 1,5z = 328 \quad x + y + z = 132 \}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = (3,5 \ 4 \ 1,5 \ 1 \ 1 \ 1) \text{ y } M' = (3,5 \ 4 \ 1,5 \ 1 \ 1 \ 1 \quad 328 \ 132) \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S. C. I.}$$

No se puede deducir el número de cada artículo vendido.

b)

Para $y = 20$ el sistema resulta:
 $3,5x + 4 \cdot 20 + 1,5z = 328 \quad x + 20 + z = 132 \}$, equivalente al sistema:
 $3,5x + 1,5z = 248 \quad x + z = 112 \}$. Resolviendo:

$$7x + 3z = 496 \quad x + z = 112 \} \quad 7x + 3z = 496 - 3x - 3z = -336 \Rightarrow 4x = 160;$$

$$. \quad z = 112 - 40 = 72.$$

Se han vendido 40 perritos, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

Parte C:

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

a) Calcula la recta r tangente a la curva en el punto $P(2, 0)$.

b) Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

C2) La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función $H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}}$, donde el tiempo está medido en segundos.

a) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c) Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Respuesta C1:

a)

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2x. \quad m = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow m = 4.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2, 0)$ con $m = 4$ es:

$$y - 0 = 4 \cdot (x - 2) = 4x - 8.$$

$$\underline{\text{La recta tangente es } t \equiv 4x - y - 8 = 0.}$$

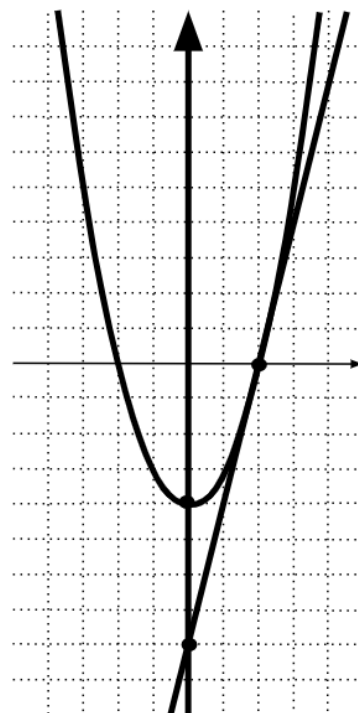
b)

La curva $y(x) = x^2 - 4$ es una parábola convexa (U), por ser positivo el coeficiente de x^2 , cuyo vértice es el siguiente:

$$y'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f(0) = -4 \Rightarrow V(0, -4).$$

Los puntos de corte de la curva y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:



$$x^2 - 4 = 4x - 8; x^2 - 4x + 4 = 0; (x - 2)^2 = 0;$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \rightarrow A(2, 0).$$

La recta contiene al punto $B(0, -8)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

La superficie pedida, que aparece sombreada en la figura, es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 [(x^2 - 4) - (4x - 8)] \cdot dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) \cdot dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right) - 0 = \frac{8}{3} - 8 + 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = \frac{8}{3} u^2 \cong 2,67 u^2. \end{aligned}$$

Respuesta C2:

a)

$$H(0) = \frac{20}{1+e^{-0}} = \frac{20}{1+e^0} = \frac{20}{1+1} = \frac{20}{2} = 10.$$

La concentración inicial de hidrógeno fue del 10 %.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$H'(t) = \frac{0 \cdot (1+e^{-t}) - 20 \cdot (-e^{-t})}{(1+e^{-t})^2} = \frac{0+20 \cdot e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{20 \cdot e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Queda demostrado que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c)

$$H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}} = \frac{20}{1+e^{-\infty}} = \frac{20}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{20}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{20}{1+0} = 20.$$

Con el tiempo la concentración de hidrógeno crece constantemente al 20 %.

Parte D:

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45 % de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40 % han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los producto no averiados, se sabe que el 55 % también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

a) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?

b) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?

c) Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

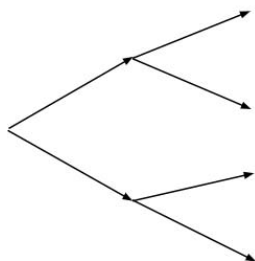
D2) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A y B los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30$, calcula:

a) $P(A \cap B)$. b) $P(B - A)$. c) $P(A' \cap B)$.

Respuesta D1:

Sean A y $\bar{A}$ las probabilidades de que se averíen o no los productos antes de 5 años, respectivamente y, U y $\bar{U}$ las probabilidades de que el producto haya recibido buen o mal uso, respectivamente.



a)

$$P = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = \underline{0,55}.$$

b)

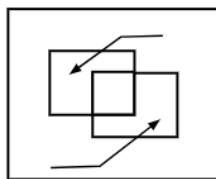
$$P = P(U/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap U)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(U/\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,55 \cdot 0,45}{0,55} = \underline{0,45}.$$

c)

$$P = P(\bar{A}/U) = \frac{P(\bar{A} \cap U)}{P(U)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{U}/\bar{A})}{P(A) \cdot P(U/A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{U}/\bar{A})} = \frac{0,55 \cdot 0,55}{0,45 \cdot 0,40 + 0,55 \cdot 0,55} =$$

$$= \frac{0,3025}{0,1800 + 0,3025} = \frac{0,3025}{0,4825} = \underline{0,6269}.$$

Respuesta D2:



Datos: $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30$.

a)

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = 0,75 - 0,30 = \underline{0,45}.$$

b)

$$P(B) = 1 - P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0,45 = 0,55.$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,55 - 0,45 = \underline{0,10}.$$

c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0,75 + 0,55 - 0,45 = 1,30 - 0,45 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,85.$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,85 = \underline{0,15}.$$

