

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANTABRIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García



Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBbDwCPh__JI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D_oxotfMqu2g

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DsXN1cOoANvY

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3Dpl-td_-GHWc

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1Z--h4UYt00

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DE2-fz-t-LdA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DqIW260_jH9U

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, debe responder solo a una de las opciones. Si realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 1A:**APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelva la ecuación $AX + 3B = C$.

Problema 1B:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Problema 2A:**APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde $\ln$ denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Problema 2B:

2B) Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Problema 3:**APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]**

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P .

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r . Calcule el área del paralelogramo determinado por $\vec{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r .

Problema 4A:**APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Problema 4B:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B .

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A .

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelva la ecuación $AX + 3B = C$.

Solución:

1A.a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 + 2 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

El determinante de A es distinto de cero y esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1A.b) Calculamos la matriz $C - 3B$.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 & 0+6 & 2-0 \\ -1-0 & 2+3 & 1-6 \\ 0-3 & -2+3 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1A.c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + 3B = C \Rightarrow AX = C - 3B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 3B)$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 5+1 & -5+2 \\ -2-3 & 10+1 & -10+2 \\ 9+1 & -6-5 & -2+5 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } X \text{ tiene la expresión } X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 1B:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Solución:

1B.a) Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -3 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad -6 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -4 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -3 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Los rangos de la matriz A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas

(3). El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{A} & & & \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -6y+4z=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y+2z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y=2-2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-2z+z=2 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ -3y=2-2\alpha \rightarrow y=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Para $a=2$ las soluciones del sistema son $x=\alpha$; $y=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}\alpha$; $z=\alpha$ para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

1B.b) Para $a=8$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=8 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -3 \quad 3 \quad 8 \\ \hline 1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 10 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad -6 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 10 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ \hline & \underbrace{A} & & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Problema 2A:**APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde $\ln$ denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Solución:

2A.a) El único problema se puede plantear al calcular el logaritmo neperiano, pero si $x > 3$ entonces $x^2 - 9 > 9 - 9 = 0$ y el logaritmo neperiano $\ln(x^2 - 9)$ existe.

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

2A.b) En el intervalo $(-\infty, 3)$ la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $f(x) = \ln(x^2 - 9)$ que es una función logarítmica que es continua pues $x^2 - 9 > 0$.

Comprobamos la continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = \ln(9 - 9) = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 3$. La función es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2A.c) Hallamos los puntos de corte.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9) & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \rightarrow \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &x = 0 \in (-\infty, 3) \\ &x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}}{2} = 3 \end{aligned} \right. \\ &\text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} &\ln(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 1 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow \\ &\quad \rightarrow x = \sqrt{10} \approx 3.16 \in (3, +\infty) \end{aligned} \right.$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas son $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$.

2A.d) **Asíntotas verticales.** $x = a$.

$x = 3$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = \ln(9 - 9) = -\infty$.

Asíntota horizontal. $y = b$.

Buscamos en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Buscamos en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 9) = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 6x + 9 = +\infty \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 9)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 9} = 0 \end{cases}$$

Como el valor obtenido es $+\infty$ y 0 la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical por la derecha: $x = 3$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

Problema 2B:

2B) Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

2B.a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador nunca se anula. Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos:
 $x = -1$ y $x = 1$

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{1 - (-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - 2^2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2B.b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(1 + x^2)2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2 + 1) - 4x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2) = \frac{2(-2)^3 - 6(-2)}{((-2)^2 + 1)^3} = \frac{-4}{125} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la segunda derivada vale

$$f''(-1) = \frac{2(-1)^3 - 6(-1)}{((-1)^2 + 1)^3} = \frac{4}{8} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (-\sqrt{3}, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la segunda derivada vale

$$f''(1) = \frac{2(1)^3 - 6(1)}{(1^2 + 1)^3} = \frac{-4}{8} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (0, +\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale

$$f''(2) = \frac{2(2)^3 - 6(2)}{(2^2 + 1)^3} = \frac{4}{125} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (+\sqrt{3}, +\infty).$$

La función es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, +\sqrt{3})$.

2B.c) La función cambia de concavidad a convexidad o viceversa en $x = 0$, $x = +\sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{4} \rightarrow A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f(0) = \frac{0}{(0)^2 + 1} = 0 \rightarrow B(0, 0)$$

$$f(+\sqrt{3}) = \frac{+\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{+\sqrt{3}}{4} \rightarrow C\left(+\sqrt{3}, \frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Sus puntos de inflexión son $A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0, 0)$ y $C\left(+\sqrt{3}, \frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$.

Problema 3:**APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]**

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P .

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r . Calcule el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r .

Solución:

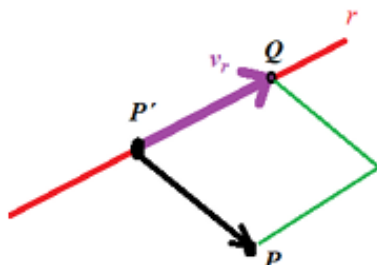
3.a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x - 1 = z \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, -1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{cases}$$

La recta s paralela a r tiene como vector director el vector director de r .

$$\left. \begin{aligned} P(1, 5, 0) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

3.b) Dibujamos el paralelogramo.



Consideramos el punto $P' = P_r(0, 2, -1)$ y el vector director $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$. Hallamos las coordenadas del punto Q sumando al punto P' el vector $\vec{v}_r$.

$$Q = P' + \vec{v}_r = (0, 2, -1) + (1, -1, 2) = (1, 1, 1)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r$.

$$\overrightarrow{P'P} = (1, 5, 0) - (0, 2, -1) = (1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6i + j - k - 3k - 2j + i = 7i - j - 4k = (7, -1, -4)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r| = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{66} \approx 8.124 \text{ u}^2$$

El área del paralelogramo tiene un valor de $\sqrt{66} \approx 8.124$ unidades cuadradas.

3.c) La distancia del punto P a la recta r es el valor del área del paralelogramo dividida por el módulo del vector $\vec{v}_r$ (base del paralelogramo).

$$\vec{v}_r = (1, -1, 2) \Rightarrow |\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base} = |\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11} \approx 3.32 \text{ unidades}$$

Problema 4A:**APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Solución:

Llamamos M al suceso “sufrir la enfermedad” y T a “el test da positivo”.

Tenemos que $P(M) = 0.015$, $P(T/\bar{M}) = 0.021$ y $P(\bar{T}/M) = 0.021$.

4A.a) Nos piden calcular $P(\bar{M})$. Como es el suceso contrario de sufrir la enfermedad tenemos que $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.015 = 0.985$.

4A.b) Nos piden calcular $P(T/M)$. Como es el suceso contrario de dar negativo si tienes la enfermedad tenemos que $P(T/M) = 1 - P(\bar{T}/M) = 1 - 0.021 = 0.979$.

4A.c) Nos piden calcular $P(M/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M) + P(\bar{M})P(T/\bar{M})} =$$

$$= \frac{0.015 \cdot 0.979}{0.015 \cdot 0.979 + 0.985 \cdot 0.021} = \boxed{\frac{979}{2358} \approx 0.415}$$

La probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo tiene un valor aproximado de 0.415.

Problema 4B:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B .

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A .

Solución:

4B.a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 1 \\ P(A) = 0.8 \\ P(B) = 0.5 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 0.8 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 1.3 - 1 = 0.3}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = 0.3$.

4B.b) Para que A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Averiguamos si se cumple la igualdad o no.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \mathbf{0.3 \neq 0.4} = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

$$4B.c) P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

4B.d) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024 – 2025 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INDICACIONES Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque. - En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen. - Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. - Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado. - No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS] Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B): 1A) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$ [0.75 puntos] Estudia el rango de A, en función de los valores de a. [0.75 puntos] Estudia el rango de BA, en función de los valores de a. [1 punto] Considera $a = 1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. 1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible. b) [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general. c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.		

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

- a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.
- b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.
- c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r: \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ y el punto $P = (-3, 2, 2)$.

- a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
- b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .
- c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

[0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?

[0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

[1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

[0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.

[1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.

[1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

1A) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) [0.75 puntos] Estudia el rango de AB , en función de los valores de a .
 b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA , en función de los valores de a .
 c) [1 punto] Considera $a = 1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación

$$\text{matricial: } BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Hallamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -a & 2 \\ 1+6 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -a & 2 \\ 7 & a & 4 \\ 1+3a & a & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1+3a & 1 & 2a \end{vmatrix} =$$

$$= a(4a - 4 - 12a + 14 - 2 - 6a + 14a - 8) = a \cdot 0 = 0$$

El determinante de AB es 0 por lo que su rango es menor de 3.Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la segunda columna y la tercera fila $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \neq 0.$$

El rango de AB es 2 para cualquier valor de a .b) Obtenemos la expresión de la matriz BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a & 1+2a \\ -3+2 & 3+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$2 \times \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA| = \begin{vmatrix} a-1 & 1+2a \\ -1 & 3+2a \end{vmatrix} = (a-1)(3+2a) + 1 + 2a = 3a + 2a^2 - 3 - 2a + 1 + 2a = 2a^2 + 3a - 2$$

$$|BA| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1. Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de BA es distinto de cero y el rango de BA es 2.

Situación 2. Si $a = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & 1 + 2\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Situación 3. Si $a = -2$

En este caso el determinante de BA vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} -2 - 1 & 1 + 2(-2) \\ -1 & 3 + 2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. El rango de BA es 1.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$ el rango de BA es 2 y si $a = -2$ o $a = \frac{1}{2}$ el rango de BA es 1.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ el determinante de BA es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$BA = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+2 \\ -1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |BA| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$$

$$(BA)^{-1} = \frac{\text{Adj}((BA)^T)}{|BA|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 - 21 \\ 3 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 2 \times 1$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
 b) [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución:

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz am-

pliada $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ a-1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 1}^a - \text{Fila 3}^a & & \\ a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -a^2-a-1 \\ a & 0 & -a^2-a \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -a^2-a \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(-a^2-a) + 3a = -a^3 - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} + a + 3a = -a^3 + 4a = a(4-a^2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(4-a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4-a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de a distinto de 0, -2 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

Para $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y + z = 4 \\ -x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. La primera ecuación y la tercera tienen el primer miembro igual, pero el segundo distinto. Esta es una situación imposible y el sistema es incompatible.

Para $a = -2$ el sistema queda $\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3z + z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 4 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = -2 \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - z \\ -3x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow -3(-2 - z) - 3z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 3z - 3z = 2 \Rightarrow 6 = 2 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x = 3z + 2 \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3z + 2) - 7z + z = 4 \\ y = -7z \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6z + 4 - 7z + z = 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de -2 y 0 .

b) Considerando $a = -1$ el sistema queda $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado

anterior sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - z + z = 4 \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 4 \rightarrow \boxed{x = -4} \\ -2x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(-4) - 3z = 2 \Rightarrow -3z = -6 \Rightarrow \boxed{z = 2} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución $x = -4, y = -2, z = 2$.

c) Considerando $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 3z = 2 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado anterior

sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que sus infinitas soluciones tienen la expresión:

$$x = 2 + 3\lambda; y = -7\lambda; z = \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2A:

2A) Considera la siguiente función: $f(x) = e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right)$

- a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Solución:

- a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow f'(x) = (-2)e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + e^{-2x} (2x - 3) = \\ &= e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3) + e^{-2x} (2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 6x - 3 + 2x - 3) = e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} (-2x^2 + 8x - 6) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = e^{-2 \cdot 0} (-2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 6) = -6 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = e^{-2 \cdot 2} (-2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6) = \frac{2}{e^4} > 0. \text{ La función crece en } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale

$$f'(4) = e^{-2 \cdot 4} (-2 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 6) = \frac{-6}{e^8} < 0. \text{ La función decrece en } (3, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(1, 3)$.

- b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda de la función.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 6) = -2e^{-2x}(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow \\
 \Rightarrow f''(x) &= -2(-2)e^{-2x}(x^2 - 4x + 3) - 2e^{-2x}(2x - 4) = \\
 &= -2e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 6) - 2e^{-2x}(2x - 4) = -2e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 6 + 2x - 4) = \\
 &= -2e^{-2x}(-2x^2 + 10x - 10) = 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) \\
 f''(x) &= 0 \Rightarrow 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) = 0 \Rightarrow \{e^{-2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.6 = x \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.38 = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tenemos dos candidatos a punto de inflexión. Estudiamos la curvatura antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale
 $f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0}(0^2 - 5 \cdot 0 + 5) = 20 > 0$. La función es convexa (U) en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale
 $f''(2) = 4e^{-2 \cdot 2}(2^2 - 5 \cdot 2 + 5) = \frac{-4}{e^4} < 0$. La función es cóncava (O) en el intervalo $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale
 $f''(4) = 4e^{-2 \cdot 4}(4^2 - 5 \cdot 4 + 5) = \frac{4}{e^8} > 0$. La función es convexa (U) en el intervalo $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

La función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ y otro en $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Como $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{\sqrt{5}-5} \frac{3-2\sqrt{5}}{2}$ y

$$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} \left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3}{2} \right) = e^{-5-\sqrt{5}} \frac{3+2\sqrt{5}}{2} = \frac{3+2\sqrt{5}}{2e^{5+\sqrt{5}}}$$
 los puntos de in-

flexión tienen coordenadas $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-2\sqrt{5}}{2e^{5-\sqrt{5}}}\right)$ y $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+2\sqrt{5}}{2e^{5+\sqrt{5}}}\right)$.

c) **Asíntota horizontal.** $y = b$

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + \frac{3}{2}}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{2e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

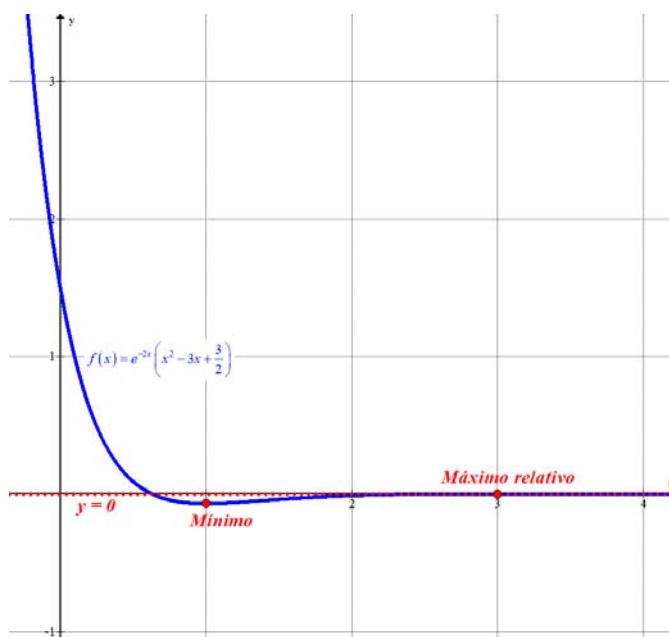
$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left(x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) = e^{+\infty} (+\infty) = +\infty$$

Cuando x tiende a $-\infty$ no existe asíntota horizontal.



BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B:

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

- a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.
 b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.
 c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

- a) Hallamos los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 1 - x^2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

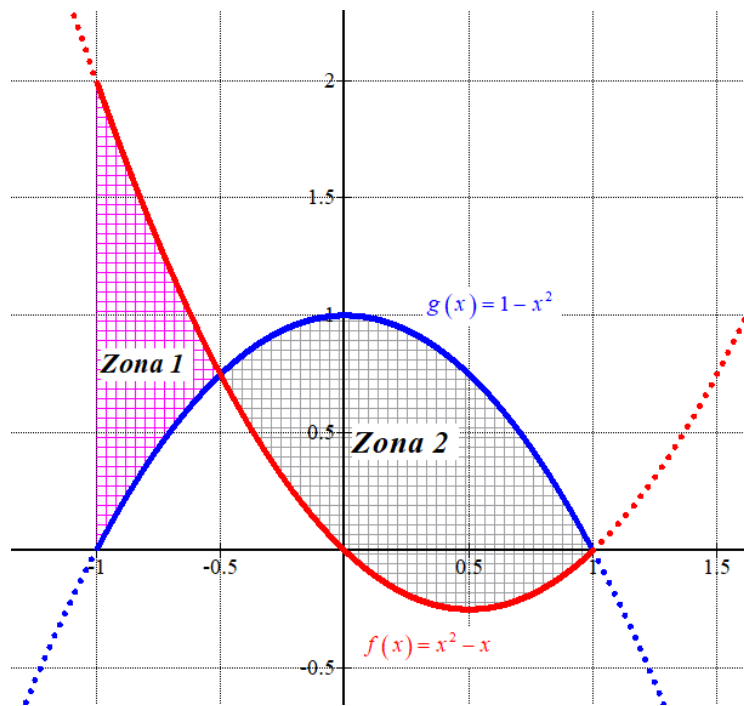
- b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = 1 - x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \boxed{1 = x} \\ \frac{1-3}{4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \end{cases}$$

Las dos gráficas coinciden en $x = \frac{-1}{2}$ y en $x = 1$. Se cortan en $(-0.5, 0.75)$ y $(1, 0)$.

- c) El recinto delimitado por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividimos en dos partes y el área la obtenemos como la suma de las áreas de los dos trozos-



Calculamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-0.5} f(x) - g(x) dx &= \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - (1 - x^2) dx = \int_{-1}^{-0.5} x^2 - x - 1 + x^2 dx = \\ &= \int_{-1}^{-0.5} 2x^2 - x - 1 dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{-0.5} = \\ &= \left[\frac{2(-0.5)^3}{3} - \frac{(-0.5)^2}{2} + 0.5 \right] - \left[\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 1 \right] = -\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{\frac{11}{24}} \end{aligned}$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned} \int_{-0.5}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - (x^2 - x) dx = \int_{-0.5}^1 1 - x^2 - x^2 + x dx = \\ &= \int_{-0.5}^1 -2x^2 + x + 1 dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-0.5}^1 = \\ &= \left[-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[\frac{-2(-0.5)^3}{3} + \frac{(-0.5)^2}{2} - 0.5 \right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{8}} \end{aligned}$$

El área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es la suma de las dos áreas obtenidas y tiene un valor de $\frac{11}{24} + \frac{9}{8} = \frac{19}{12} \approx 1.5833$ unidades cuadradas.

Ejercicio 3:

-) Considera la recta $r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ y el punto $P=(-3,2,2)$.
- a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.
- b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .
- c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

Solución:

- a) Hallamos la ecuación continua de la recta.

$$r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2z \\ y=3-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2,3,0) \\ \vec{v}_r=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}}$$

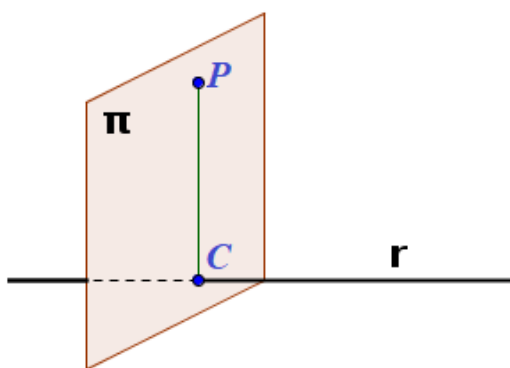
- b) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + D = 0 \\ P = (-3, 2, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-3) - 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D - 6 = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + z + 6 = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P es $\pi: 2x - y + z + 6 = 0$.

- c) La distancia entre r y P es la distancia entre P y el punto C de corte de la recta r con el plano π hallado en el apartado anterior.



Hallamos el punto C .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases} \\ \pi: 2x-y+z+6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2+2z \\ y=3-z \\ 2x-y+z+6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2+2z) - (3-z) + z + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4z - 3 + z + z + 6 = 0 \Rightarrow 6z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{z = -\frac{7}{6}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 + 2 \cdot \frac{-7}{6} = -\frac{1}{3}} \\ \boxed{y = 3 + \frac{7}{6} = \frac{25}{6}} \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es $C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right)$.

Hallamos la distancia del punto P a la recta r como la distancia del punto P al punto C .

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) \\ P(-3, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{PC} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{25}{6}, \frac{-7}{6}\right) - (-3, 2, 2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{6}, \frac{-19}{6}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, C) = |\overline{PC}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{-19}{6}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{786}}{6} \approx 4.67 u}$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{786}}{6} \approx 4.67$ unidades.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

- 4A)** Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.
- [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
 - [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
 - [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

Solución:

- a) La probabilidad de sacar una bola roja de la urna A vale $\frac{3}{5}$. En la extracción de la segunda bola de la urna A quedan 4 bolas, siendo 2 bolas rojas y 2 bolas verdes, la probabilidad de que la segunda bola sea roja, habiendo sacado una primera bola roja vale $\frac{2}{4}$.

La probabilidad de que al extraer de la urna A dos bolas de forma simultánea estas sean dos bolas rojas vale $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0.3$.

$$P = 0.3$$

- b) Este es un experimento compuesto donde primero elegimos una urna entre la A y la B, y luego extraemos una bola de la urna elegida. El suceso sacar bola roja puede pasar de dos formas distintas: una eligiendo la urna A y luego sacando bola roja o bien eligiendo la urna B y luego extraer bola roja.

La probabilidad del suceso es $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$.

$$P = 0.4667$$

- c) En el experimento elegir una urna y extraer una bola de la urna elegida la probabilidad de sacar bola verde (suceso complementario de “sacar bola roja”) es $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

La probabilidad de elegir la urna A y sacar bola verde de la urna A vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.

Si de cada 15 repeticiones del experimento sabemos que 8 saldrá bola verde y de estas 3 serán extraídas de la urna A entonces la probabilidad de que al sacar bola verde esta haya sido extraída de la urna A vale $\frac{3}{8} = 0.375$

$$P = 0.375$$

Ejercicio 4B:

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

- [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
- [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
- [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Solución:

Sea X = Altura en centímetros de un habitante de una población. $X = N(170, 16)$.

- a) Nos piden calcular $P(X > 190)$.

$$P(X > 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{190-170}{16}\right) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

- b) Nos piden calcular $P(160 < X < 190)$.

$$P(160 < X < 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{160-170}{16} < Z < \frac{190-170}{16}\right) =$$

$$= P(-0.625 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -0.625) =$$

$$= P(Z < 1.25) - P(Z > 0.625) = P(Z < 1.25) - [1 - P(Z < 0.625)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 1 + \frac{0.7324 + 0.7357}{2} = \boxed{0.62845}$$

$$\mathbf{P(160 < X < 190) = 0.62845}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

- c) La información que vamos a manejar para responder en este apartado es: “En una población, el 85% de las personas son rubias, sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm”.

Llamamos R al suceso “elegir una persona rubia” y A a “elegir una persona que mide más de 190 cm”.

Sabemos que $P(A/R) = 0.12$ y $P(R) = 0.85$.

Nos piden calcular $P(R \cap A)$.

$$P(R \cap A) = P(R)P(A/R) = 0.85 \cdot 0.12 = \boxed{0.102}$$