

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

VALENCIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez



Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3Dd6S1L1-VGKk

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DGkXhMrUvnY4



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024-2025
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

BAREMO DEL EXAMEN: *Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.*
 La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Ejercicio 2.2:

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

- 2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .
- 2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.
- 2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 3.1 Y 3.2:****PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

- 3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.
- 3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- 3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

- 3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2,1,2)$.
- 3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .
- 3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 4.1 y 4.2:****PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

- 4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .
- 4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.
- 4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

- 4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.
- 4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2024–2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
	BAREM DE L'EXAMEN: <i>Cada pregunta puntua fins a 2,5 punts.</i> La qualificació de l'examen serà la suma de les qualificacions de cada pregunta. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguem realitzar càlculs simbòlics ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats. Per cada falta d'ortografia a partir de la tercera s'han de deduir 0,10 punts, fins a un màxim d'un punt. Per errors en la redacció, en la presentació, falta de coherència, falta de cohesió, incorrecció lèxica i incorrecció gramatical es podrà deduir un màxim de mig punt. La deducció màxima total és d'un punt.	
BLOQUE OBLIGATORIO		
Ejercicio 1:		
PREGUNTA 1: PROBABILIDAD I ESTADÍSTICA (2,5 punts)		
Una pizzeria ofereix tres tipus de pizza: margarida, vegetariana i pepperoni. Al llarg dels anys, utilitzant la seua aplicació per a telèfons intel·ligents, el restaurant ha recollit dades sobre les preferències dels clients i ha trobat que el 40% de la clientela demana pizza margarida, el 25% tria la pizza vegetariana i la resta prefereix la pizza pepperoni.		
1.1 (0,25 punts) Si es tria un client a l'atzar, quina és la probabilitat que haja demanat una pizza pepperoni?		
1.2 (0,75 punts) Quina és la probabilitat que dos clients triats a l'atzar hagen demanat diferents tipus de pizza?		
Per tal de millorar el seu servei i agilitzar els temps de preparació, la pizzeria decideix considerar un grup típic de 10 clients amb l'objectiu de decidir quantes pizzes margarida ha de preparar amb antelació i evitar retards durant les hores amb més demanda, minimitzant el malbaratament.		
1.3 (0,75 punts) Quina és la probabilitat que exactament 4 dels 10 clients demanen pizzes margarida?		
1.4 (0,75 punts) Quina és la probabilitat que almenys un dels 10 clients del grup demane una pizza margarida?		
BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1		
Ejercicio 2		
PREGUNTA 2: ÀLGEBRA (2,5 punts)		
Respon a l'apartat 2.1 o a l'apartat 2.2		
2.1 En un sistema de processament d'imatges es fa servir una matriu per transformar certes dades. La matriu depèn del paràmetre real α i és:		
$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$		
2.1.1 (1,25 punts) En un dels processos, perquè el sistema funcione, cal que la matriu siga idempotent, és a dir, que el seu quadrat coincidisca amb ella, $A^2 = A$. Obtén els valors de α que permeten que el sistema funcione.		
2.1.2 (1,25 punts) En un altre procés diferent, cal utilitzar la matriu inversa d'A. Obtén els valors de α per als quals hi ha la inversa i calcula aquesta inversa en funció de α.		
2.2 Siga el sistema d'equacions lineals:		
$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$		
on a és un paràmetre real.		
2.2.1 (1 punt) Discuteix el sistema en funció del paràmetre a.		
2.2.2 (0,75 punts) Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat.		
2.2.3 (0,75 punts) Calcula la solució del sistema per a $a = 0$.		

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 3****PREGUNTA 3: GEOMETRIA (2,5 punts)****Respon a l'apartat 3.1 o a l'apartat 3.2**

3.1 Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ i la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcula:

3.1.1 (1 punt) Si existeixen, les coordenades del punt de tall de totes dues rectes.

3.1.2 (1 punt) L'equació del pla que conté totes dues rectes.

3.1.3 (0,5 punts) La distància del punt $P = (1,0,2)$ a aquest pla.

3.2 Donats el pla $\pi: 3x - y + 2z = 4$ i el punt $P = (-1,0,1)$, obtén:

3.2.1 (1 punt) L'equació del pla perpendicular a π que passa per P i per $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 (0,5 punts) La distància del punt Q al pla π .

3.2.3 (1 punt) El punt simètric de P respecte al pla π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 4****PREGUNTA 4: ANÀLISI (2,5 punts)****Respon a l'apartat 4.1 o a l'apartat 4.2**

4.1 Una empresa de paqueteria vol dissenyar diferents models de caixes. Un d'aquests models consisteix en una caixa de 80 cm^3 de volum, amb base i tapa quadrades. El preu del material de les parets laterals és d'1 cèntim per cm^2 . La base i la tapa es construïran amb un material de qualitat superior a les cares laterals de la caixa i que és un 25% més car.

Obtén:

4.1.1 (0,75 punts) La funció $P(x)$ que proporciona el preu del material de la caixa en funció del costat de la base x .

4.1.2 (1,25 punts) Les dimensions de la caixa perquè la funció $P(x)$ tinga el menor valor possible.

4.1.3 (0,5 punts) El preu del material en el cas anterior.

4.2 Donada la funció real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

4.2.1 (1 punt) Representa la regió compresa entre la gràfica de la funció f , l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = -1$ i $x = 5$.

4.2.2 (1,5 punts) Calcula l'àrea de la regió anterior.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO**BLOQUE OBLIGATORIO****Ejercicio 1:****PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)**

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Solución:

1.1) 0.35.

1.2) 0.655.

1.3) 0.2508.

1.4) 0.9941.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**Ejercicio 2:****PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)****Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 (1,25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1,25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 punts)**Respon a l'apartat 2.1 o a l'apartat 2.2**

2.1 En un sistema de processament d'imatges es fa servir una matriu per transformar certes dades. La matriu depèn del paràmetre real α i és:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 (1,25 punts) En un dels processos, perquè el sistema funcione, cal que la matriu siga idempotent, és a dir, que el seu quadrat coincidisca amb ella, $A^2 = A$. Obtén els valors de α que permeten que el sistema funcione.

2.1.2 (1,25 punts) En un altre procés diferent, cal utilitzar la matriu inversa d' A . Obtén els valors de α per als quals hi ha la inversa i calcula aquesta inversa en funció de α .

Solución:

2.1.1 $\alpha = 0$.

$$2.1.2 \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Si $\alpha \neq -3$ SCD y si $\alpha = -3$ SCI.

Ejercicio 2.2:

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0,75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0,75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

2.2 Siga el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

on a és un paràmetre real.

2.2.1 (1 punt) Discuteix el sistema en funció del paràmetre a .

2.2.2 (0,75 punts) Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat.

2.2.3 (0,75 punts) Calcula la solució del sistema per a $a = 0$.

Solución:

$$\mathbf{2.2.3 \text{ } x = 1, y = 0, z = 1.}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 3:****PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)****Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0,5 puntos) La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

PREGUNTA 3: GEOMETRIA (2,5 punts)**Respon a l'apartat 3.1 o a l'apartat 3.2**

3.1 Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ i la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcula:

3.1.1 (1 punt) Si existeixen, les coordenades del punt de tall de totes dues rectes.

3.1.2 (1 punt) L'equació del pla que conté totes dues rectes.

3.1.3 (0,5 punts) La distància del punt $P = (1,0,2)$ a aquest pla.

3.2.2 (0,5 punts) La distància del punt Q al pla π .

3.2.3 (1 punt) El punt simètric de P respecte al pla π .

Solución:

3.1.1 Punto de corte $(-1, -1, 3)$.

3.1.2 Plano $-x + 4y + 2z - 3 = 0$.

3.1.3 Distancia 0.

Ejercicio 3.2:

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 **(1 punto)** La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 **(0.5 puntos)** La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 **(1 punto)** El punto simétrico de P respecto al plano π .

3.2 Donats el pla $\pi: 3x - y + 2z = 4$ i el punt $P = (-1, 0, 1)$, obtén:

3.2.1 **(1 punt)** L'equació del pla perpendicular a π que passa per P i per $Q = (2, 1, 2)$.

Solución:

3.2.1 Plano $x - y - 2z + 3 = 0$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 4.1:****PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)****Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

- 4.1** Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

- 4.1.1 (0,75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .
- 4.1.2 (1,25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.
- 4.1.3 (0,5 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

PREGUNTA 4: ANÀLISI (2,5 punts)**Respon a l'apartat 4.1 o a l'apartat 4.2**

- 4.1** Una empresa de paqueteria vol dissenyar diferents models de caixes. Un d'aquests models consisteix en una caixa de 80 cm^3 de volum, amb base i tapa quadrades. El preu del material de les parets laterals és d'1 cèntim per cm^2 . La base i la tapa es construiran amb un material de qualitat superior a les cares laterals de la caixa i que és un 25% més car.

Obtén:

- 4.1.1 (0,75 punts)** La funció $P(x)$ que proporciona el preu del material de la caixa en funció del costat de la base x .
- 4.1.2 (1,25 punts)** Les dimensions de la caixa perquè la funció $P(x)$ tinga el menor valor possible.
- 4.1.3 (0,5 punts)** El preu del material en el cas anterior.

Solución:

$$4.1.1 \quad P(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{320}{x}.$$

$$4.1.2 \quad x = 4 \text{ centímetros e } y = 5 \text{ centímetros.}$$

$$4.1.3 \quad 120 \text{ céntimos.}$$

Ejercicio 4.2:

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

4.2 Donada la funció real de variable real

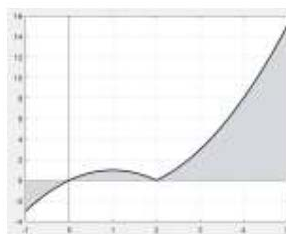
$$f(x) = x|x - 2|.$$

4.2.1 (1 punt) Representa la regió compresa entre la gràfica de la funció f , l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = -1$ i $x = 5$.

4.2.2 (1,5 punts) Calcula l'àrea de la regió anterior.

Solución:

4.2.1



4.2.2 Área = $\frac{62}{3} = 20.6667$.



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz $\square$ solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Ejercicio 2.2:

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real $\square$:

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro $\square$.

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3.1:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45° .

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Ejercicio 3.2:

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1:

4.1 Dada la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de ambas funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $\frac{3}{5}$ partes de sus publicaciones reciben un "Like". Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún "Like" si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos "Likes" en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un "Like" sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Solución:

- 1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún "Like" si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

Definimos los sucesos:

L – Nos dan un "Like"

$\bar{L}$ – No nos dan el "Like"

Según el enunciado tenemos que: $P(L) = \frac{3}{5} = 0,6$ y $P(\bar{L}) = \frac{2}{5} = 0,4$

Se trata de una distribución binomial (solo dos probabilidades y complementarias) de 4 elementos (las cuatro publicaciones) y queremos hallar la probabilidad de no recibir ningún "like" por lo que podemos aplicar la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256 = 2.56\%$$

- 1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos "Likes" en sus cuatro publicaciones?

No recibir más de dos "likes" significa que recibe 0, 1 o 2. Tenemos que sumar las probabilidades de los tres casos:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256 = 2.56\%$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.1536 = 15.36\%$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456 = 34.56\%$$

Sumando los tres casos tenemos:

$$P(X \leq 2) = 0.0256 + 0.1536 + 0.3456 = 0.5248 = 52.48 \%$$

1.3 Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

La probabilidad de recibir al menos un “Like” es complementaria a no recibir ninguno. Como queremos que sea mayor que 0.999 tenemos que la probabilidad ha de ser menor que $1 - 0.999 = 0.001$. Esta probabilidad la podemos escribir como:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \rightarrow P(X = 0) = \binom{n}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^n$$

Tenemos que hallar el valor de n en la inecuación:

$$\binom{n}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^n < 0.001$$

Sabemos que $\binom{n}{0} = 1$ y que $0.6^0 = 1$

Por lo que hay que resolver que: $0.4^n < 0.001$

Resolvemos la ecuación exponencial: $0.4^n = 0.001$

Despejando con un logaritmo: $\log_{0.4} 0.001 = n \rightarrow n = \frac{\log 0.001}{\log 0.4} \simeq 7.5388$

Como n es un valor natural tenemos que si ha de hacer más de 7.5 publicaciones el número mínimo serán 8.

Comprobamos que se cumple (no es imprescindible):

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^8 \simeq 0.000655 < 0.001$$

Podemos calcularlo para 7 publicaciones:

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^7 \simeq 0.00163 > 0.001$$

Con lo que el número mínimo de publicaciones será de 8.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**Ejercicio 2.1:**

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Solución:

2.1.1 La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

Como se trata de una ecuación matricial vamos a resolver primero con las letras:

$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$	aplicamos que $(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$
$X^{-1} \cdot ((A^{-1})^{-1})^{-1} = AA^{-1}(B^2)^{-1}$	aplicamos que $(M^{-1})^{-1} = M$ y que $M \cdot M^{-1} = I$
$X^{-1} \cdot A = I(B^2)^{-1}$	aplicamos que $I \cdot M = M$
$X^{-1} \cdot A = (B^2)^{-1}$	despejamos X^{-1} multiplicando por la derecha por A^{-1}
$X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	aplicamos que $M \cdot M^{-1} = I$
$X^{-1} \cdot I = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	aplicamos que $I \cdot M = M$
$X^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	en la derecha tenemos que $(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$
$X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1}$	calculando la inversa a ambos miembros
$X = A \cdot B^2$	

Realizamos las operaciones:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-2 \\ 0-0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como sale la identidad de orden 2 tenemos que:

$$X = A \cdot B^2 \rightarrow X = A \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1.2 El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

Vamos a aplicar las propiedades de los determinantes.

$ (3A^5B)^2 $	aplicamos que $ (kM) = k^{(\dim M)} \cdot M $
$ (9)^2(A^5B)^2 $	aplicamos que $ M^n = M ^n$
$81 A^5B ^2 \rightarrow 81 A^5B \cdot A^5B $	aplicamos que $ M \cdot N = M \cdot N $
$81 A^5 B \cdot A^5 B $	aplicamos que $ M^n = M ^n$
$81 A ^5 B \cdot A ^5 B $	al ser los determinantes números aplicamos la conmutativa

$$81|A|^{10}|B|^2$$

Entonces tenemos que $|(3A^5B)^2| = 81|A|^{10} \cdot |B|^2$

Hallamos los dos determinantes implicados:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 = -1$$

Aplicando esos valores tenemos que:

$$|(3A^5B)^2| = 81|A|^{10} \cdot |B|^2 = 81 \cdot 1^{10} \cdot (-1)^2 = 81$$

$$\boxed{|(3A^5B)^2| = 81}$$

2.1.3 Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Vamos a intentar hallar una recurrencia para la potencia de la matriz B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz B al cuadrado da la identidad podemos agrupar las potencias de manera que cualquier exponente par dará la identidad y cualquier impar la misma matriz B .

Por lo anterior tenemos que:

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^{99} = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribimos la expresión y sustituimos el resultado de las potencias:

$$aI + bB = A + C \rightarrow a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones tenemos:

$$\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y son iguales los elementos que ocupan la misma posición tenemos cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ 0=0 \\ a-b=1 \end{cases} \rightarrow$$

Resolviendo tenemos que:

$$\boxed{a = 1 \text{ y } b = 0}$$

Ejercicio 2.2:

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro λ .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Solución:

2.2.1 Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro λ .

Para discutir el sistema vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Matriz de los coeficientes y matriz ampliada de los coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes. Para ellos calculamos el menor de orden 3 (toda la matriz) e igualamos a cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a^2 - a - a - 0 - 1 = -a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -1$$

Para ese valor la matriz NO tiene rango 3. Estudiamos un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Por lo que podemos concluir que si $a = -1$ $RgM = 2$ y si $a \neq -1$ $RgM = 3$

Estudiamos ahora el rango de la matriz ampliada de los coeficientes.

En el caso de $a \neq -1$ al tratarse de una matriz de dimensión 3×4 su rango coincidirá con el de la matriz M por lo que tenemos que si $a \neq -1 \Rightarrow RgM^* = RgM = 3$

Estudiamos el caso $a = -1$ la matriz queda:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Debemos comprobar si existe algún menor de orden 3 diferente de cero. Esto lo podemos hacer calculando los menores posibles (hay 4 de los cuales uno ya está calculado) o bien buscando una relación (combinación lineal entre las filas o columnas) que nos asegure que todos valen cero.

Es fácil comprobar que la primera y la segunda fila son proporcionales. Al ser las filas linealmente dependientes no puede tener rango 3 por lo que tendrá el mismo rango que la matriz M .

En conclusión tenemos que, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, la discusión del sistema será:

Si $a \neq -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 3 = n^{\circ}incóg. \rightarrow SCD(\text{sistema compatible determinado})$

Si $a = -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 2 < n^{\circ}incóg. \rightarrow SCI(\text{sistema compatible indeterminado})$

2.2.2 Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Para que el sistema sea compatible determinado, según lo visto en el apartado anterior, $a \neq -1$

Como tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y además el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la regla de Cramer.

Valor del determinante de los coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a - 1 = -(a+1)^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{0 - a^2 - a - a - 0 + a}{-(a+1)^2} = \frac{-a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{0 - a^2 - a^2 + a^2 - 0 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a - a^3 - a^2 - a^2 + a^3 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

Luego la solución es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{a+1}, \frac{a}{a+1}, \frac{2a}{a+1} \right)$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3.1:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45° .

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Solución:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

Para que dos planos sean perpendiculares han de serlo sus dos vectores normales. Para que dos vectores sean perpendiculares el producto escalar de ambos ha de ser cero:

$$\pi_1: x + 2y + mz = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, m)$$

$$\pi_2: x + z = 6 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, 1)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, 2, m) \cdot (1, 0, 1) = 1 + 0 + m = m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$$

Por lo cual para que ambos planos sean perpendiculares $m = -1$

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45° .

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales. Vamos a utilizar la fórmula que nos da el ángulo formado por dos vectores:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Tomando los valores correspondientes tenemos:

$$\cos 45 = \frac{(1, 2, m) \cdot (1, 0, 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+m}{\sqrt{m^2+5} \cdot \sqrt{2}} \rightarrow 1 = \frac{1+m}{\sqrt{m^2+5}} \rightarrow \sqrt{m^2+5} = m+1 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^2 + 5 = (m+1)^2 \rightarrow m^2 + 5 = m^2 + 2m + 1 \rightarrow 4 = 2m \rightarrow m = 2$$

Por lo cual para que ambos planos formen un ángulo de 45° el valor ha de ser $m = 2$

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

La recta que forma la intersección de ambos planos se halla resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones (puntos que tienen en común). Será un sistema compatible indeterminado con un parámetro.

$$\begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Haciendo $z = \lambda$ tenemos:

$$\begin{cases} x + 2y + m \cdot \lambda = -1 \\ x + \lambda = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - m \cdot \lambda \\ x = 6 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo el valor hallado:

$$6 - \lambda + 2y = -1 - m \cdot \lambda \rightarrow 2y = -7 - m \cdot \lambda + \lambda \rightarrow y = \frac{-7 + (1-m)\lambda}{2}$$

Las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$\begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2} \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3.2:

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

Solución:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

Para demostrar que una recta está contenida en un plano podemos recurrir a diferentes argumentos. Lo más fácil suele ser demostrar que dos de sus puntos están contenidos (con lo que toda la recta lo estaría).

Como la recta pasa por $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$ lo más fácil es demostrar que esos dos puntos pertenecen al plano π . Recordemos que un punto pertenece a un plano si verifica su ecuación.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos en el plano tenemos:

$$\begin{cases} P = (0, 1, -1) \\ \pi: 3x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \rightarrow \text{Como verifica la ecuación tenemos que } P \in \pi$$

$$\begin{cases} Q = (1, a, 1) \\ \pi: 3x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \rightarrow \text{Para que se verifique tenemos que } a = 0$$

Para el valor del parámetro $a = 0$ la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

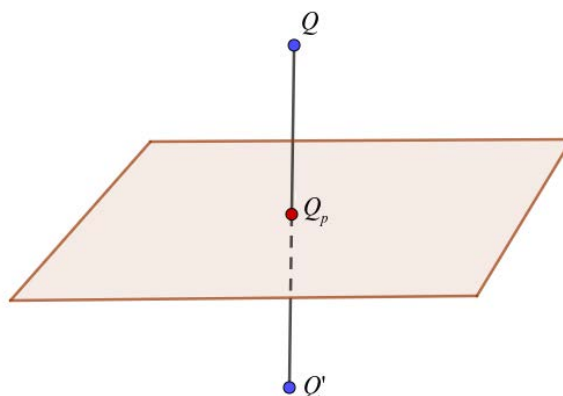
Como hemos visto en el apartado anterior para el valor $a = 1$ el punto no estará contenido en el plano y tendrá sentido buscar el simétrico respecto del mismo.

Vamos a seguir el siguiente procedimiento:

- Con el vector normal del plano y el punto Q trazamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.
- Hallamos el punto de corte entre el plano y la recta hallada Q_p (punto proyección ortogonal).
- Hallamos el vector que une el punto Q con su proyección.
- Aplicamos (sumamos) el vector hallado al punto proyección.

- Con el vector normal del plano y el punto Q trazamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

$$\vec{n} = (3, 1, -1) \text{ y } Q = (1, 1, 1)$$



Recta (en paramétricas): $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

- Hallamos el punto de corte entre el plano y la recta hallada Q_p (punto proyección ortogonal). Para ello basta con hallar el valor del parámetro que hace cierta la ecuación del plano:

$$\pi: 3x + y - z = 2 \rightarrow 3 \cdot (1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2 \rightarrow 11\lambda = -1 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{11}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases}$$

Por lo que tenemos que el punto proyección es: $Q_p = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)$

- Hallamos el vector que une el punto Q con su proyección. Esto lo hacemos restando las coordenadas del extremo menos las del origen.

$$\overrightarrow{QQ_p} = \left(\frac{8}{11} - 1, \frac{10}{11} - 1, \frac{12}{11} - 1\right) = \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right)$$

- Aplicamos (sumamos) el vector hallado al punto proyección.

$$\left(\frac{8}{11} - \frac{3}{11}, \frac{10}{11} - \frac{1}{11}, \frac{12}{11} + \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$$

El punto simétrico buscado es: $\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1:

4.1 Dada la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Solución:

4.1.1 Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

La función es una racional polinómica. Tendrá problemas de dominio en aquellos puntos que anulen el polinomio denominador. Como tenemos que:

$$x^2 + 1 \neq 0$$

El dominio son todos los reales: $\text{Dom}f(x) = \mathbb{R}$

Las **asíntotas** pueden ser verticales, horizontales u oblicuas:

- Verticales. Se encuentran en los puntos de discontinuidad del dominio. Como la función no tiene puntos de discontinuidad **no tiene asíntotas verticales**.

- Horizontales. Se encuentran en los valores, si existen y son finitos, de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \text{ ya que el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Por lo que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Para representarla luego es conveniente hallar las tendencias, es decir, si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello, hallamos un valor grande y pequeño y comparamos el valor de la función con el de la asíntota.

$$f(10) = \frac{10}{10^2+1} \simeq 0.099 > 0 \text{ Por lo que en } +\infty \text{ va por encima de la asíntota.}$$

$$f(-10) = \frac{-10}{(-10)^2+1} \simeq -0.099 < 0 \text{ Por lo que en } -\infty \text{ va por debajo de la asíntota.}$$

Como tiene asíntota horizontal **no tiene asíntotas oblicuas**.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ necesitamos derivar la función e igualar la derivada a cero.

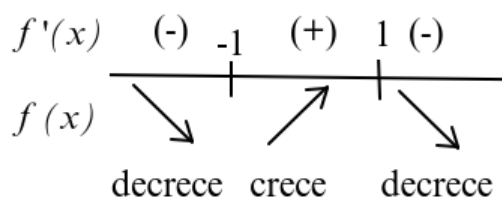
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$$

Para que un cociente valga cero lo ha de ser el denominador:

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Por lo que hay dos posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Dividimos el dominio ($\mathbb{R}$) en tres intervalos y estudiamos el signo de la derivada en ellos calculando un valor de la misma en cada uno de ellos.



$$]-\infty, -1[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(-2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0 \text{ luego decrece.}$$

$$]-1, 1[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{0+1}{(0+1)^2} > 0 \text{ luego crece.}$$

$$]1, +\infty[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0 \text{ luego decrece.}$$

Por lo que la función decrece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y crece en $]-1, 1[$

4.1.2 Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $\square$.

Como la función es continua podemos buscar extremos absolutos.

Para calcularlos deben estar en los extremos relativos o en los extremos del intervalo de definición.

Los extremos relativos son:

$x = -1$ como hemos visto en el apartado anterior en ese punto la función pasa de decrecer a crecer por lo que tendrá un **mínimo**.

$$\text{Obtenemos la segunda coordenada: } f(-1) = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

Por lo que el **mínimo** será en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

$x = 1$ como hemos visto en el apartado anterior en ese punto la función pasa de crecer a decrecer por lo que tendrá un **máximo**.

$$\text{Obtenemos la segunda coordenada: } f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Por lo que el máximo será en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Hallamos los valores en los extremos relativos y en los extremos del intervalo:

$$f(-\infty) = 0$$

$$f(-1) = \frac{-1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(+\infty) = 0$$

Por lo tanto:

El mayor valor es $x = 1$ por lo que será máximo absoluto en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

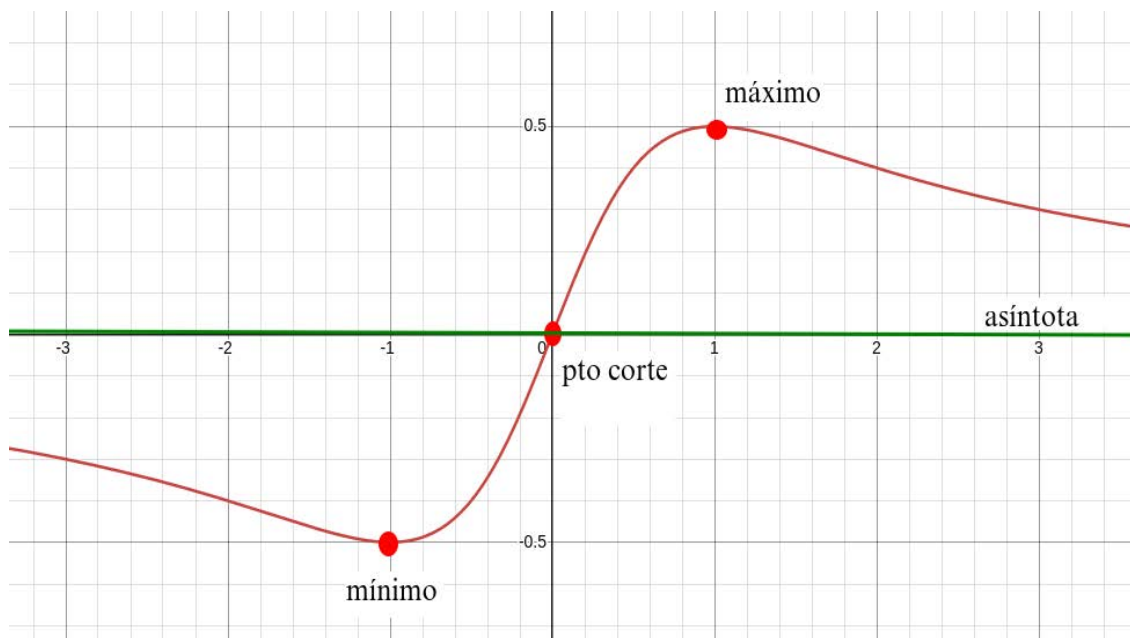
El menor valor es $x = -1$ por lo que será mínimo absoluto en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

4.1.3 Representar la función f .

Con lo visto en los apartados anteriores representamos el máximo y mínimo absoluto, la asíntota y sus tendencias. Además podemos hacer una pequeña tabla de valores de la función para saber por dónde va la función.

Hallamos el punto de corte con el eje OY: $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0 \rightarrow (0,0)$

Al salir el origen también es el punto de corte con OX. La representación queda:



Ejercicio 4.2:

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de ambas funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Solución:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Es una función racional polinómica por lo que presentará problemas de dominio en aquellos valores que anulen el denominador:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Por lo que el dominio es: $\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ o bien $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Las horizontales se encuentran en el valor de los límites si existen y son finitos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ por lo que la recta } y = 0 \text{ es } \mathbf{asíntota horizontal}.$$

Como después tendremos que representar podemos hallar las tendencias, es decir, si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Hallamos un valor relativamente grande y pequeño y lo comparamos con el valor de la asíntota:

$$f(10) = \frac{1}{100} = 0.01 > 0 \text{ luego irá por encima de la asíntota en } +\infty.$$

$$f(-10) = \frac{1}{100} = 0.01 > 0 \text{ luego irá por encima de la asíntota en } -\infty.$$

Como tiene horizontal **no tendrá oblicua**.

Las verticales estarán en los puntos de discontinuidad. Hallamos el valor del límite cuando tiene al valor de discontinuidad hallado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases} \text{ al ser infinito tendrá asíntota en } x = 0$$

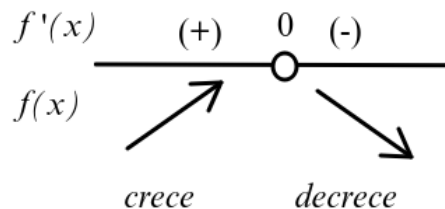
Hallamos ahora los intervalos de crecimiento y decrecimiento para lo cual hallamos la derivada e igualamos a cero:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

Como la derivada no puede ser cero tenemos que no existen máximos ni mínimos relativos. Necesitamos ahora saber el signo de la derivada en el dominio. Hallamos el valor de la derivada en los dos intervalos en los que la discontinuidad divide al dominio:

$$f'(1) = \frac{-2}{1^3} < 0 \text{ luego es decreciente}$$

$$f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} > 0 \text{ luego es creciente}$$

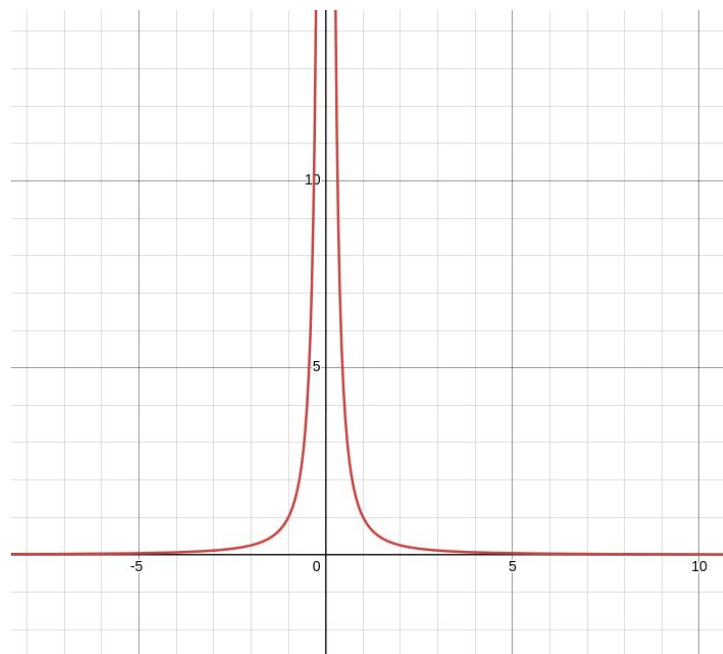


Por lo que los intervalos quedan:

crece en $]-\infty, 0[$ y decrece en $]0, +\infty[$

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

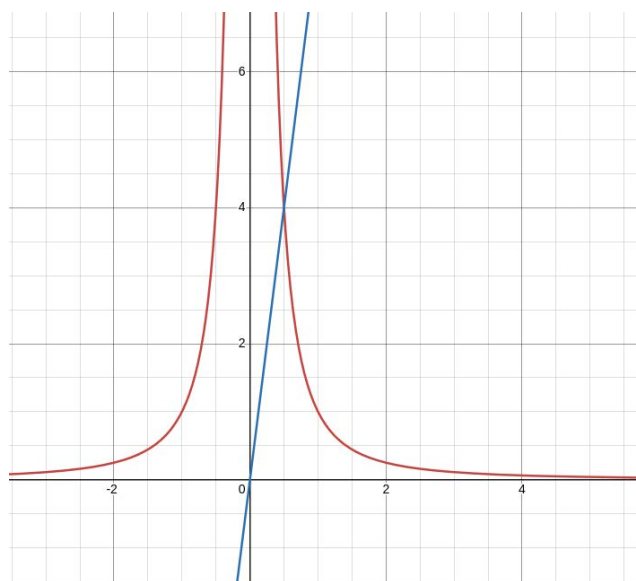
Para realizar el dibujo de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ aprovecharemos los datos hallados en el apartado anterior. Dibujamos las asíntotas y sus tendencias, tenemos en cuenta el crecimiento y decrecimiento y hallamos algunos puntos:



Para dibujar la gráfica de $g(x) = 8x$ basta con hacer una pequeña tabla de valores puesto que es una recta:

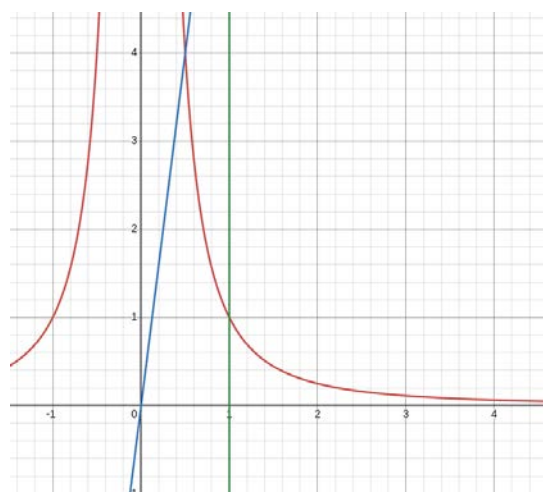
x	y
-1	-8
0	0
1	8

Unimos ambas representaciones:

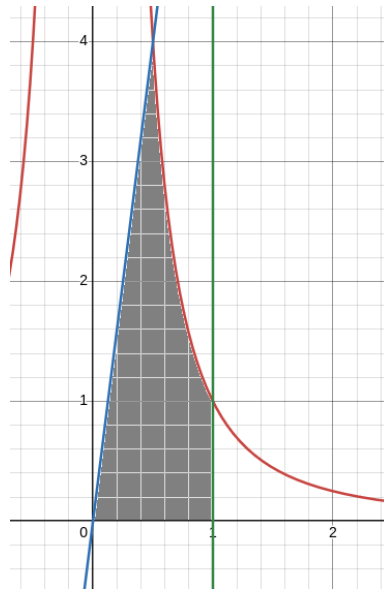


4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de ambas funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Utilizando el dibujo de las gráficas anteriores y representando la recta $x = 1$ hallamos el área a calcular.



El área a calcular es:



Podemos apreciar que tendremos que calcular la integral de $g(x) = 8x$ desde $x = 0$ hasta $x = 0.5$ y la de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ desde $x = 0.5$ hasta $x = 1$ y sumarlas.

$$\int 8x dx = [4x^2]_0^{0.5} = 1 - 0 = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \int \frac{x^{-1}}{-1} dx = \int \frac{-1}{x} dx = -1 - (-2) = 1$$

Si sumamos ambos resultados tenemos que el área pedida es de $2 u^2$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961