

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García





PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es único y obligatorio. CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO. En cada apartado se indica la correspondiente puntuación. Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio. Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen: Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio. Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final. Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

BLOQUE 1

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z = 2 + k \\ 2x - y - kz = 1 - k \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro k .
b) Resolver para el caso $k=1$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$

- a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.
b) Calcular m para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
c) Para $m=2$ obtener la inversa de la matriz $A+B-I$.

BLOQUE 2

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x) = (x-1)e^{-x}$ a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$. c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$

- a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X .

BLOQUE 3**EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.**

- a) Comprobar que el plano $\pi: x+y-z=3$ y la recta $r: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.
- b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.
- c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $(0,1,-1)$.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,m,6)$, $C(2,1,4)$ y $D(4,3,2)$. Se pide:

- a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.
- b) Obtener la ecuación general del plano ACD .
- c) Para $m=2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC .

BLOQUE 4**EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos**

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

- a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm
- b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?
- c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE 1

Ejercicio 1A

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z = 2 + k \\ 2x - y - kz = 1 - k \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro k .
 b) Resolver para el caso $k=1$.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2+k \\ 2 & -1 & -k & 1-k \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - k^2 - 2 + 1 + 2k - k = -k^2 + k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + k = 0 \Rightarrow k(-k+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B .

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xrightarrow{A/B} & & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xleftarrow{A} & & & \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2 y menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -2 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad -12 \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xrightarrow{A/B} & & & \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xleftarrow{A} & & & \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B es 2, son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ o $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $k=1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de esas infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & A & B \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -3y-3z=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ \boxed{z=2-y} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2-y=3 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \quad ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}}$$

Para $k=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \quad ; \alpha \in \mathbb{R} . \\ z=2-\alpha \end{cases}$

BLOQUE 2

Ejercicio 1B

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$

- Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.
- Calcular m para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
- Para $m=2$ obtener la inversa de la matriz $A+B-I$.

Solución:

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned}
 A^2 - A &= B \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2+0 & m-m \\ 0+0 & 0+m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-m & -1 \\ 0 & m^2+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} m^2-m=0 \rightarrow m(m-1)=0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \rightarrow \boxed{m=1} \end{cases} \\ m^2+m=2 \rightarrow m^2+m-2=0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=m} \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = m \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para que se cumplan las dos igualdades debe ser $m=1$.

Se cumple la igualdad $A^2 - A = B$ para $m=1$.

- b) Para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Determinamos la expresión de $A+B-I$.

$$A+B-I = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A+B-I| = \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(-m+1)$$

$$|A+B-I|=0 \Rightarrow (m-1)(-m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \rightarrow m=1 \\ -m+1=0 \rightarrow \boxed{m=1} \end{cases}$$

La matriz $A+B-I$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.

c) Para $m=2$ la matriz queda $A+B-I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tiene inversa. La calculamos.

$$|A+B-I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$(A+B-I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A+B-I)^T)}{|(A+B-I)|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A+B-I$$

Ejercicio 2A**EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.**Dada la función $f(x) = (x-1)e^{-x}$

- a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$.

Solución:

- a) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

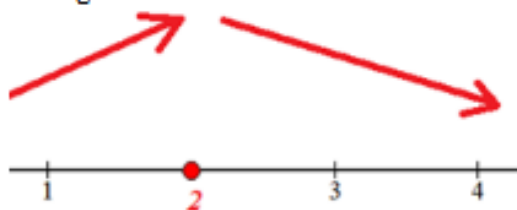
$$f(x) = (x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot (-1)e^{-x} = (1-x+1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = (2-0)e^{-0} = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = (2-3)e^{-3} = -e^{-3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=2$.

Como $f(2) = (2-1) \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2, \frac{1}{e^2}\right)$.

- b) Para estudiar la curvatura averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = (2-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (-1)e^{-x} + (2-x)(-1)e^{-x} = (-1-2+x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-3)e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada segunda antes y después de $x=3$.

- En el intervalo $(-\infty, 3)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = (0-3)e^{-0} = -3 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 3)$.

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale $f''(4) = (4-3)e^{-3} = e^{-3} > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(3, +\infty)$.

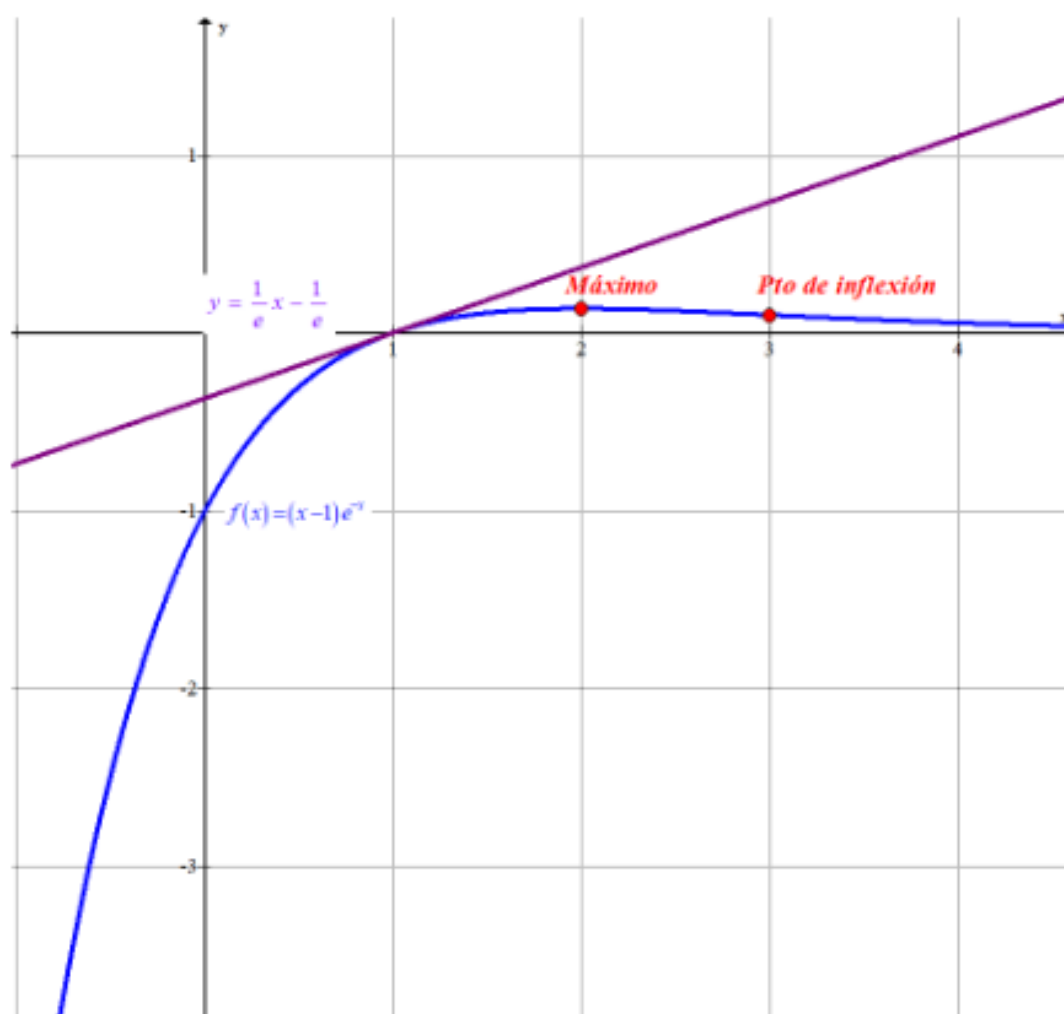
La función presenta un punto de inflexión en $x = 3$. Para dicho valor tenemos que

$$f(3) = (3-1)e^{-3} = \frac{2}{e^3} \text{ por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas } \left(3, \frac{2}{e^3}\right).$$

c) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x-1) \\ f(1) = (1-1)e^{-1} = 0 \\ f'(1) = (2-1)e^{-1} = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$ es $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$.



Ejercicio 2B**EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**Dadas las funciones $f(x)=2$ y $g(x)=x^3+x^2-2x$

- a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

Solución:

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{2}{x^3+x^2-2x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = \dots = x(x-1)(x+2)$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 2 = -2A \rightarrow A = -1 \\ x=1 \rightarrow 2 = 3B \rightarrow B = \frac{2}{3} \\ x=-2 \rightarrow 2 = -6C \rightarrow C = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{-1}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2/3}{x-1} dx + \int \frac{-1/3}{x+2} dx =$$

$$= \left[-\ln x + \frac{2}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) \right] + C$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^3 + x^2 - 2x \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes y su área la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 0 de la función más el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

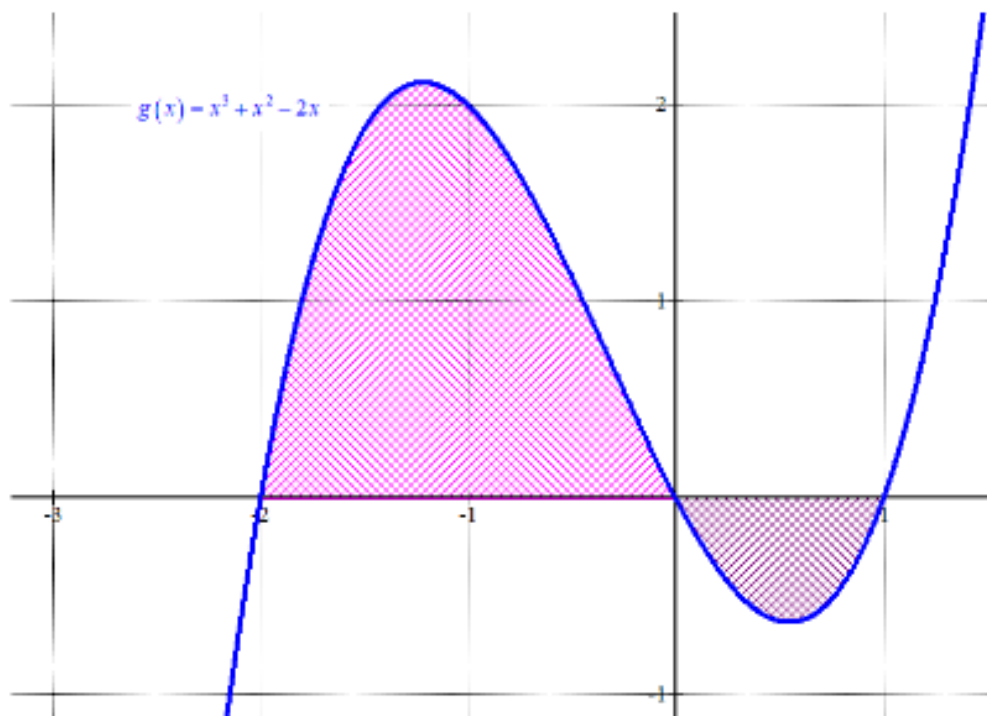
$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 g(x) dx &= \int_{-2}^0 x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 \right] = 0 - \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] = \boxed{\frac{8}{3} \approx 2.6667}\end{aligned}$$

El área del primer trozo de la región tiene un valor de $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \boxed{\frac{-5}{12} \approx -0.4167}\end{aligned}$$

El área del segundo trozo de la región tiene un valor de $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas.

El área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X tiene un valor de $\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} = 3.083$ unidades cuadradas.



BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3A

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

- a) Comprobar que el plano $\pi: x+y-z=3$ y la recta $r: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.
- b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.
- c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $(0,1,-1)$.

Solución:

- a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector normal del plano.

$$\pi: x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,-1)$$

Para que la recta sea paralela al plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano. Para que esto se cumpla debe ser su producto escalar nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1,1,-1)(3,-1,2) = 3-1-2=0$$

Como vector director de recta y normal del plano tienen producto escalar nulo el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(0,1,-1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \\ \pi: x+y-z=3 \\ \text{¿} P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0+1-(-1)=3? \Rightarrow \text{No se cumple}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.
La recta y el plano no se cortan en ningún punto.

- b) Como la recta es paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \in r \\ \pi: x+y-z-3=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0+1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}}$$

- c) El plano
- π'
- perpendicular a la recta
- r
- y que pase por el punto
- $(0,1,-1)$
- tiene como vector normal el vector director de la recta
- $\vec{v}_r = (3,-1,2)$
- .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (3,-1,2) \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': 3x-y+2z+D=0 \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 - 1 + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-2+D=0 \rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x-y+2z+3=0}$$

El plano π' perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $(0,1,-1)$ tiene ecuación implícita $\pi': 3x-y+2z+3=0$.

Ejercicio 3B**EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto**

Dados los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,m,6)$, $C(2,1,4)$ y $D(4,3,2)$. Se pide:

- Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.
- Obtener la ecuación general del plano ACD.
- Para $m=2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

Solución:

a) Hallamos el plano π que contiene los puntos A, C y D.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \in \pi \\ C(2,1,4) \in \pi \\ D(4,3,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AC} = (2,1,4) - (1,0,2) = (1,1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (4,3,2) - (1,0,2) = (3,3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 6y + 3(\cancel{z-2}) - 3(\cancel{z-2}) + 0 - 6(x-1) = 0 \Rightarrow 6y - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 1 = 0}$$

Para que los cuatro puntos estén en el mismo plano el punto B debe pertenecer al plano π definido por los puntos A, C y D.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - y - 1 = 0 \\ B(1, m, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Para $m = 0$ los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) La hemos obtenido en el apartado anterior y es $\pi: x - y - 1 = 0$.

c) Para $m = 2$ los puntos tienen coordenadas $A(1,0,2)$, $B(1,2,6)$, $C(2,1,4)$.

Un vector perpendicular al plano ABC es el vector normal del plano ABC. Este vector lo podemos obtener con el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ B(1,2,6) \\ C(2,1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,2,6) - (1,0,2) = (0,2,4) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,4) - (1,0,2) = (1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4i + 4j - 2k - 4i = 4j - 2k = (0, 4, -2)$$

Hemos obtenido un vector perpendicular al plano ABC que es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 4, -2)$.

También cumplen dicha propiedad todos los vectores $\vec{v}$ con coordenadas proporcionales a este: $\vec{v} = a(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = (0, 4a, -2a)$.

Hacemos que su módulo valga 4.

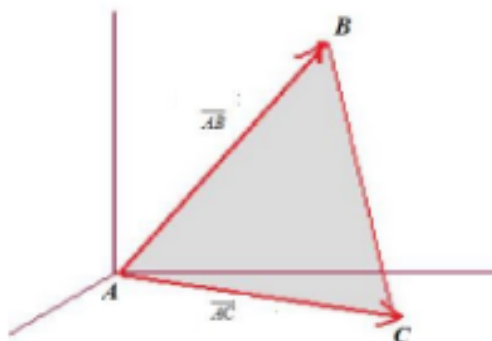
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (0, 4a, -2a) \\ |\vec{v}| = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{0^2 + (4a)^2 + (-2a)^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{16a^2 + 4a^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{20a^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{20} \cdot a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \vec{v} = \left(0, 4 \frac{2\sqrt{5}}{5}, -2 \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

El vector que buscamos es $\vec{v} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Calculamos el área del triángulo ABC.

Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (0, 2, 4) \\ \overline{AC} = (1, 1, 2) \\ \overline{AB} \times \overline{AC} = (0, 4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \boxed{\sqrt{5} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo que forman A, B y C tiene un valor de $\sqrt{5}$ unidades cuadradas.

BLOQUE 4

Ejercicio 4

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

- Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm
- ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?
- Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

Solución:

Sea X = altura en centímetros de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población. $X = N(174, 12)$

a) Calculamos $P(162 \leq X \leq 186)$.

$$\begin{aligned} P(162 \leq X \leq 186) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{162-174}{12} \leq Z \leq \frac{186-174}{12}\right) = \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

z	0,00	
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1,0	0,8413	0,

b) Deseamos saber el valor de "a" para el que se cumple $P(X \geq a) = 0.67$.

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= 0.67 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ 0.67 > 0.5 \rightarrow \frac{a-174}{12} < 0 \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{a-174}{12} = 0.44 \Rightarrow -a+174 = 5.28 \Rightarrow \boxed{a=174-5.28=168.72} \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700

El alumno mide 168.72 centímetros de altura.

c) Hallamos la probabilidad de que un alumno tenga una altura superior a 170 centímetros.

$$\begin{aligned}
 P(X > 170) &= \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{170 - 174}{12}\right) = P(Z > -0.33) = \\
 &= P(Z \leq 0.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6293
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331

De una muestra de 1000 alumnos podemos encontrar $1000 \cdot 0.6293 = 629$ alumnos que midan más de 170 centímetros.



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro m .
b) Resolver para el caso $m = 1$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- a) Obtener la inversa de la matriz $A^T + I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

- a) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$, calcula los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $P(1,2)$.
b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a = 2$, $b = -2$.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x + 3$. a) Calcula la primitiva de $\frac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto $(5, 0)$ b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 3)$

- a) ¿Están A, B y C alineados?
- b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.
- c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1, -1, 0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P.
- b) Calcular la distancia del punto P a la recta s.
- c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano π .

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
- b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
- c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1ª:

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro m .
 b) Resolver para el caso $m = 1$.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 5 - 0 - 7 - m = m^2 - m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = m \\ \frac{1-3}{2} = -1 = m \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 6 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \\ 0 \quad -3 \quad -3 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2. Son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = -1$ el sistema es incompatible (sin solución)..

- b) Para $m = 1$ hemos visto que el sistema es compatible determinado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+7y+5z=0 \\ x+y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y+5z=0 \\ x+y+z=3 \\ z=-2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y+5(-2-y)=0 \\ x+y-2-y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+7y-10-5y=0 \\ \boxed{x=5} \end{cases} \Rightarrow 5+2y-10=0 \Rightarrow 2y=5 \Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{2}} \Rightarrow \boxed{z=-2-\frac{5}{2}=-\frac{9}{2}}$$

Para $m=1$ las soluciones del sistema son $x=5, y=\frac{5}{2}, z=-\frac{9}{2}$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- a) Obtener la inversa de la matriz $A^T + I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
 b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

Solución:

- a) Obtenemos la expresión de la matriz $A^T + I$, comprobamos que es invertible y calculamos su inversa.

$$A^T + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^T + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 + 10 - 12 - 8 - 15 = 36 - 35 = 1 \neq 0$$

$$(A^T + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^T + I)^T\right)}{|A^T + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 8-15 & -4+5 & 6-4 \\ -(4-9) & 2-3 & -(3-2) \\ 10-12 & -(5-6) & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^T X - I = 2B - X \Rightarrow A^T X - X = 2B + I \Rightarrow (A^T - I)X = 2B + I \Rightarrow X = (A^T - I)^{-1}(2B + I)$$

Obtenemos la expresión de X .

$$2B + I = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^T - I)^{-1} (2B + I) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 7+0+8 & 0-1+4 & -14+2-10 \\ -5+0-4 & 0+1-2 & 10-2+5 \\ 2+0+0 & 0-1+0 & -4+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2A:**EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

- a) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$, calcula los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $P(1,2)$.
- b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a=2$, $b=-2$.

Solución:

- a) La función pasa por el punto $P(1, 2)$, por lo que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b}{1^3} = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 2}$$

La función tiene un máximo relativo en $x=1$, por lo que la derivada debe anularse para $x=1$
 $\Rightarrow f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot x^3 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^4 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2a \cdot 1^2 - 3(a \cdot 1^2 + b)}{1^4} = 0 \Rightarrow 2a - 3(a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{-3b = a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ a = -3b \end{array} \right\} \Rightarrow -3b + b = 2 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow \boxed{a = -3(-1) = 3}$$

Los valores buscados son $a=3$ y $b=-1$.

- b) Para $a=2$, $b=-2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3}$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot x^3 - 3x^2(2x^2 - 2)}{x^6} = \frac{4x^4 - 6x^4 + 6x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 + 6}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 6}{x^4} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = +\sqrt{3}$.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-2 \cdot (-2)^2 + 6}{(-2)^4} = \frac{-2}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

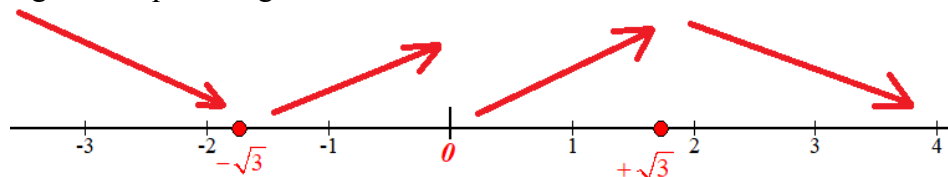
- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)^2 + 6}{(-1)^4} = 4 > 0. \text{ La función crece en } (-\sqrt{3}, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^2 + 6}{1^4} = 4 > 0$. La función crece en $(0, +\sqrt{3})$.

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 + 6}{2^4} = \frac{-2}{16} < 0$. La función decrece en $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, +\sqrt{3})$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{3}$.

$$\text{Como } f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^2 - 2}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$$

el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-\sqrt{3}, \frac{-4\sqrt{3}}{9}\right)$.

Como $f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^2 - 2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

el máximo relativo tiene coordenadas $\left(\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2 \cdot 0^2 - 2}{0^3} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Ejercicio 2b:**EJERCICIO 2B.** [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x + 3$. a) Calcula la primitiva de $\frac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int \frac{x+3}{x^2-4x+3} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{x+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow 6 = 2B \rightarrow B=3 \\ x=1 \rightarrow 4 = -2A \rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3}$$

$$\dots = \int \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = \boxed{-2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C}$$

Hallamos el valor de C tal que la primitiva $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C$ pase por el punto (5, 0).

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C \\ F(5) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \ln|5-1| + 3 \ln|5-3| + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \ln 2 - 2 \ln 2^2 + C = 0 \Rightarrow 3 \ln 2 - 4 \ln 2 + C = 0 \Rightarrow -\ln 2 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \ln 2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + \ln 2$.

b) Hallamos los posibles puntos de corte de las dos gráficas.

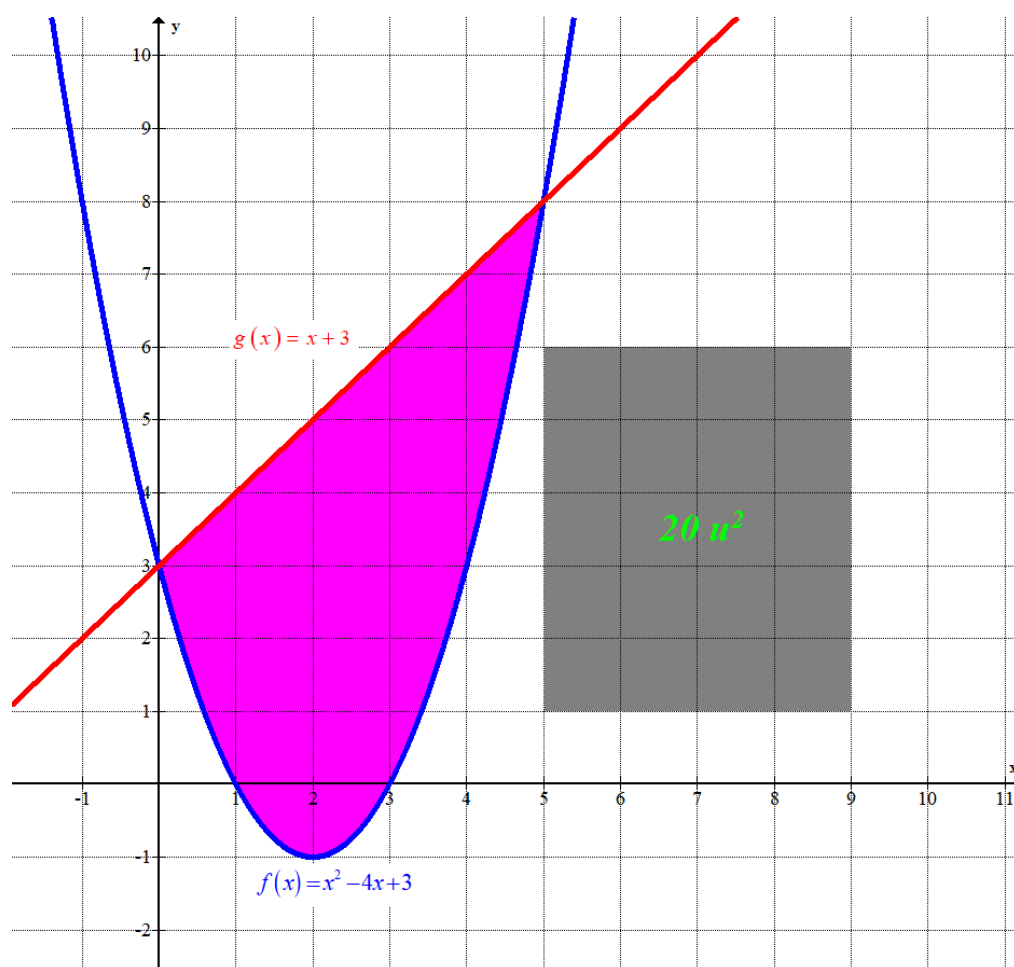
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + 3 \\ g(x) = x + 3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_0^5 f(x) - g(x) dx = \int_0^5 x^2 - 4x + 3 - (x + 3) dx = \int_0^5 x^2 - 5x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5 \cdot 5^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{125}{3} - \frac{125}{2} = \frac{-125}{6} \approx -20.8333$$

El área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor de $\frac{125}{6} \approx 20.8333$ unidades cuadradas.



Área = 20,8333 u²

Ejercicio 3a:

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

Solución:

a) Para que los tres puntos estén alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales (están en la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2, 3) \\ B = (2, 3, 4) \\ C = (3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) - (1, 2, 3) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (1, 2, 3) = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

Los vectores no tienen coordenadas proporcionales y

los puntos A, B y C no están alineados.

b) Un vector ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 2k - 2k - 2i = (-2, 2, 0)$$

Obtenemos el módulo del vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

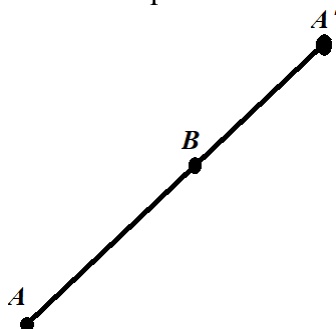
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Consideramos el vector $\vec{w} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$. Este vector es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y tiene

$$\text{módulo } |\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Vector = (-1, 1, 0)

c) Obtenemos las coordenadas del punto A' del dibujo. Este cumple que los puntos A, B y A' están alineados y la distancia de A a B es la misma que de A' a B.



El punto A' lo obtenemos sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$A' = B + \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) + (1, 1, 1) = (3, 4, 5)$$

El punto A' simétrico del punto A respecto del punto B tiene coordenadas $A' = (3, 4, 5)$.

Ejercicio 3b:

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1, -1, 0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P .
 b) Calcular la distancia del punto P a la recta s .
 c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano π .

Solución:

- a) El plano π' perpendicular a la recta s que pasa por P tiene como vector normal el vector director de la recta.

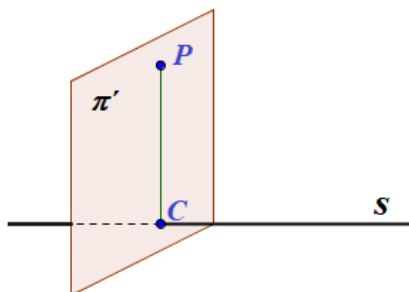
$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow -4 \cdot 1 + 3(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow \boxed{\pi': -4x + 3y + 7 = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular a la recta s que pasa por P es $\pi': -4x + 3y + 7 = 0$.

- b) La distancia del punto P a la recta s es la distancia del punto P al punto C de corte de la recta con el plano π' .



Hallamos el punto C de corte de recta y plano.

$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \\ Q_r(0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + 7 = 0 \\ s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -4(-4\alpha) + 3(1 + 3\alpha) + 7 = 0 \Rightarrow 16\alpha + 3 + 9\alpha + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-10}{25} = \frac{-2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -4\frac{-2}{5} = \frac{8}{5} \\ y = 1 + 3\frac{-2}{5} = \frac{-1}{5} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right)$$

Hallamos la distancia del punto P al C como el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) \\ P(1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) - (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right)$$

$$d(P, s) = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2} \approx 1.41u}$$

$$d(P, s) = 1,41... u$$

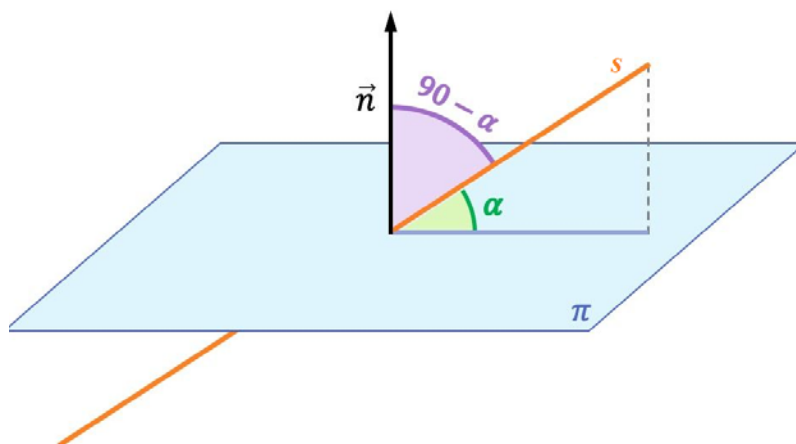
c) Hallamos el ángulo que forma el vector director de la recta con el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, -2, 3) \\ \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{n}| |\vec{v}_s|} =$$

$$= \frac{|(1, -2, 3)(-4, 3, 0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|-4 - 6|}{5\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \approx 57^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es de $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$.



Ejercicio 4:**EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto**

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
- Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
- Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

Solución:

Sea X = número de personas de un grupo de 10 que están viendo “La Revuelta”.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.30$. $X = B(10, 0.3)$

- a) Calculamos $P(X > 8)$.

$$P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0.3^9 \cdot 0.7^1 + \binom{10}{10} 0.3^{10} \cdot 0.7^0 =$$

$$= 10 \cdot 0.3^9 \cdot 0.7 + 0.3^{10} = \boxed{0.00014}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas vale 0.00014.

- b) Debemos calcular $P(X \geq 1)$. Usamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 1 - 0.7^{10} \approx \boxed{0.9718}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas vale 0.9718.

- c) Hacemos una tabla de contingencia.

	Ve “La Revuelta”	No ve “La Revuelta”	
Ve “El Hormiguero”			35
No ve “El hormiguero”		40	
	30		100

Completamos la tabla.

	Ve “La Revuelta”	No ve “La Revuelta”	
Ve “El Hormiguero”	5	30	35
No ve “El hormiguero”	25	40	65
	30	70	100

En la tabla observamos que un 5% de los habitantes del pueblo ve los dos programas.

La probabilidad de que la persona elegida al azar vea los dos programas es 0.05.