

# MATEMÁTICAS II

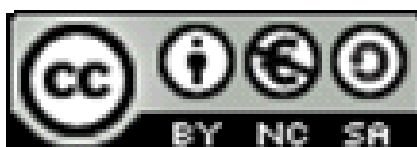
## Selectividad 2025

### Comunidad autónoma de GALICIA



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)

Autor: Dolores Vázquez Torró





PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD  
(PAU)  
FASE GENERAL  
CURSO: **2024–2025**  
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA:  
ORDINARIA DE  
**JUNIO**

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

**BLOQUE OBLIGATORIO**

**PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)**

**Ejercicio 1. CONTEXTO**

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

**1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

**1.2.** Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

**1.3.** Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**

**PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).** Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

**Ejercicio 2.1:**

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

**2.1.1.** Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , halle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$  donde  $I$  y  $0$  son las matrices identidad y cero respectivamente.

**2.1.2.** Calcule la matriz cuadrada  $X$  tal que  $XA = B$ , si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . ¿Son iguales  $XA$  y  $AX$ ?

**Ejercicio 2.2:**

**2.2.** Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema 
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2****PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos).** Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**Ejercicio 3.1:**

**3.1.** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - m & \text{si } x > 1 \end{cases}$  se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir  $k$  y  $m$  para que  $f$  sea continua en  $x=1$ ?

3.1.2. ¿Para qué valores de  $k$  y  $m$  es  $f$  derivable en  $x = 1$ ?

**Ejercicio 3.2:**

**3.2.** Dibuje la región encerrada por la gráfica de  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 4$ . Luego, calcule su área.

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3****PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos).** Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**Ejercicio 4.1:**

**4.1.** Determine el valor que debe tomar  $k$  para que los planos

$$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \text{ y } \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de  $k$  que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

**Ejercicio 4.2:**

**4.2.** Considérense el punto  $P(0,1,0)$  y la recta  $r: (x,y,z) = (2,0,3) + \lambda(1,2,3), \lambda \in \mathbb{R}$ .

**4.2.1.** Determine la ecuación continua de la recta  $s$  que es paralela a  $r$  y pasa por el punto  $P$ .

**4.2.2.** Obtenga la ecuación implícita o general del plano  $\pi$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

## RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

### BLOQUE OBLIGATORIO

#### PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

##### Ejercicio 1: CONTEXTO

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

1.2. Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

1.3. Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

##### Solución:

Definimos los sucesos: E “los clientes son Estudiantes”.

$$P(E)=0.65$$

U: “los clientes son personal de la Universidad”.

$$P(U)=0.25$$

A: “los clientes son personas Ajenas a la universidad”.

$$P(A)=0.1$$

Definimos la variable: X: “tiempo de espera hasta que el cliente es atendido, en minutos”.

$$1.1. \quad X \equiv N(5, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-5}{\sigma} \equiv N(0,1)$$

$$P(X < 8) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{8-5}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0.9$$

Buscamos en la tabla de la  $N(0, 1)$  de forma inversa

|     |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |

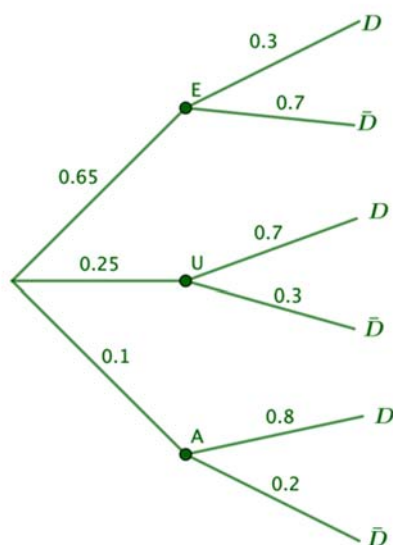
$$\frac{3}{\sigma} = 1.285 \Rightarrow \sigma = 2,33$$

$$P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-5}{2.33}\right) = P(Z < -0.43) = 1 - P(Z \leq 0.43) = 1 - 0.6664 = 0.3336$$

**La probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos es 0.3336 (33.36%)**

**1.2.** Definimos el suceso D: “pagar con efectivo” y representamos el diagrama de árbol.

Aplicamos el teorema de la probabilidad total:



$$P(\bar{D}) = P(E) \cdot P(\bar{D}/E) + P(U) \cdot P(\bar{D}/U) + P(A) \cdot P(\bar{D}/A) =$$

$$= 0.65 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.55$$

**La probabilidad de que el pago no se realice en efectivo es 0.55.**

**1.3.** Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0.65 \cdot 0.3}{1 - 0.55} = 0.43$$

$$P(U/D) = \frac{P(U \cap D)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.7}{1 - 0.55} = 0.38$$

**Si el pago se hizo en efectivo es más probable que lo haya realizado un estudiante (0.43)**

## BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

**PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

## Ejercicio 2.1:

**2.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes:

**2.1.1.** Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  halle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$ , donde  $I$  y  $0$  son las matrices identidad y cero, respectivamente.

**2.1.2.** Calcule la matriz cuadrada  $X$  tal que  $XA = B$ , si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . ¿Son iguales  $XA$  y  $AX$ ?

## Solución:

**2.1.1.**  $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$ ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos  $\begin{pmatrix} 14 + 2\alpha + \beta & 5 + 5\alpha \\ 2 + 2\alpha & 11 - \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Resolvemos } \begin{cases} 14 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 5 + 5\alpha = 0 \\ 2 + 2\alpha = 0 \\ 11 - \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = -12 \end{matrix}$$

Recordar comprobar que se verifican las cuatro ecuaciones.

$$\alpha = -1, \beta = -12$$

**2.1.2.**  $X$  tal que  $XA = B$ , si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que  $A$  es invertible.  $|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$XA = B \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿ $XA=AX$ ? Esto se reduce a comprobar si  $AX=B$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq B$$

**Ejercicio 2.2:**

**2.2.** Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema 
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

**Solución:**

Expresamos el sistema en forma matricial y estudiamos el rango de la matriz de coeficientes ( $A$ ) y el de la ampliada ( $A^*$ ). El teorema de Rouché-Frobenius nos permitirá calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2$$

Resolvemos, utilizando la regla de Ruffini  $-m^3 + 3m - 2 = 0$  obteniendo  $m=1$  (solución doble) y  $m=-2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1| & & -1 & -1 & 2 \\ & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \quad -m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -2$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para  $m=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Todas las filas son iguales, por lo tanto } \text{rang } A^* = 1 \text{ y } \text{rang } A = 1$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para  $m=-2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A^* = 3$$

$$\text{Rang } A = 2 \quad \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius:

**$m \neq 1, m \neq -2, \text{rang } A = \text{rang } A^* = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado.}$**

**$m = 1, \text{rang } A = \text{rang } A^* = 1 \neq n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeterminado.}$**

**$m = -2, \text{rang } A \neq \text{rang } A^* \Rightarrow \text{Sist. Incompatible.}$**

## BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

**PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos).** Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

**Ejercicio 3.1:**

**3.1.** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - m & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir  $k$  y  $m$  para que  $f$  sea continua en  $x = 1$ ?

3.1.2. ¿Para qué valores de  $k$  y  $m$  es  $f$  derivable en  $x = 1$ ?

**Solución:**

**3.1.1** La función debe cumplir las tres condiciones para ser continua en  $x=1$ :

1)  $\exists f(1) = k + 2$

2)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} kx^2 + 2x = k + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - m = 1 - m \end{array} \right\} \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = 1 - m$

3)  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = 1 - m$

$$f \text{ es continua en } x = 1 \Leftrightarrow k + m = -1$$

**3.1.2.** Para estudiar la derivabilidad en  $x=1$ :

1)  $f$  es continua en  $x=1 \Leftrightarrow k + m = -1$

2) Estudiamos las derivadas laterales. (Más correcto sería utilizar la definición de derivadas laterales pero se da por válido este procedimiento).

$$f'(x) = \begin{cases} 2kx + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

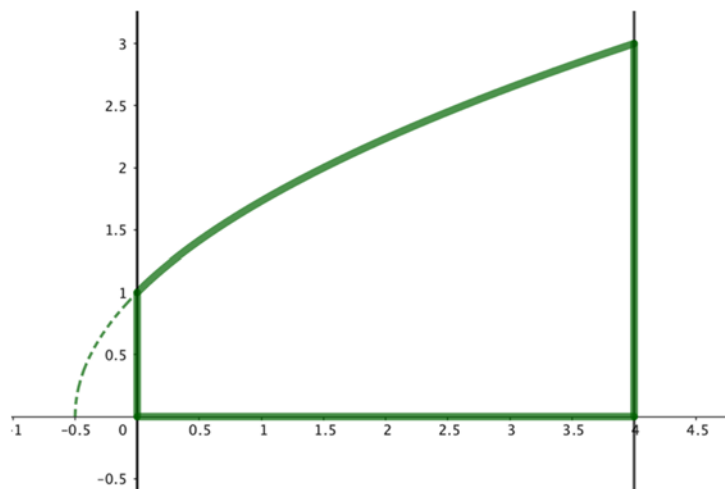
$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2k + 2 \\ f'(1^+) = 2. \end{array} \right\} f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow 2k + 2 = 2 \Leftrightarrow k = 0$$

$$k + m = -1 \Rightarrow m = -1$$

$$f \text{ es derivable en } x = 1 \Leftrightarrow k = 0, m = -1$$

**Ejercicio 3.2:**

**3.2.** Dibuje la región encerrada por la gráfica de  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ , el eje X y las rectas  $x=0$ ,  $x=4$ . Luego, calcule su área.

**Solución:**

Estudiamos el dominio.

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \geq 0\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Puntos corte con eje abscisas ( $y=0$ ),  $\sqrt{2x+1} = 0$   
 $\Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0)$

Puntos de corte con eje de ordenadas ( $x=0$ )  $\Rightarrow$   
 $(0, 1)$

Estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f(x)$$

La función es creciente en  $(0, 4)$ .



La integral puede resolverse como una integral “casi” inmediata.

$$A = \int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} \Big|_0^4 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} u^2$$

$$\text{Área} = \frac{26}{3} u^2$$

## BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

**PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

**Ejercicio 4.1:**

**4.1.** Determine el valor que debe tomar  $k$  para que los planos

$$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad , \quad \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de  $k$  que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

**Solución:**

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{1} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \Rightarrow \left(k, 1, \frac{1}{4}\right) \cdot (3, 4, 1) = 0 \Rightarrow 3k + 4 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow k = -\frac{17}{12}$$

También podemos hacerlo estudiando los rangos:  $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1/4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)$

$$\text{rang } A = 1 \quad , \quad \left|\begin{array}{cc} k & 1 \\ 3 & 4 \end{array}\right| = 0 \Rightarrow k = 3/4$$

$$\text{rang } A^* = 2 \quad , \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{array}\right| \neq 0$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow k = \frac{-17}{12}$$

**Ejercicio 4.2:**

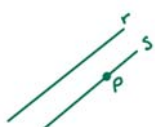
**4.2.** Considérense el punto  $P(0,1,0)$  y la recta  $r: (x, y, z) = (2,0,3) + \lambda(1,2,3), \lambda \in \mathbb{R}$ .

**4.2.1.** Determine la ecuación continua de la recta  $s$  que es paralela a  $r$  y pasa por el punto  $P$ .

**4.2.2.** Obtenga la ecuación implícita o general del plano  $\pi$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

**Solución:**

**4.2.1.**

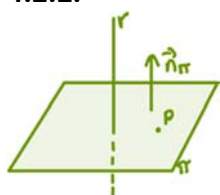


$$\vec{v}_s = (1,2,3)$$

$$P(0,1,0)$$

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ si}$$

**4.2.2.**



$$\vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi$$

$$\pi: x + 2y + 3z + D = 0$$

$$P(0,1,0) \in \pi \Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\pi: x + 2y + 3z - 2 = 0$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                    |                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
|  <p>COMISIÓN<br/>INTERUNIVERSITARIA<br/>DE GALICIA</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br/>(PAU) FASE GENERAL<br/>CURSO: <b>2024–2025</b><br/><b>MATEMÁTICAS II</b></p> | <p>CONVOCATORIA:<br/>EXTRAORDINARIA</p> |
| <p align="center"><b>INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</b></p> <p>El examen consta de <b>4 preguntas de respuesta obligatoria</b>, puntuadas cada una con <b>2,5 puntos</b>: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                    |                                         |
| <p align="center"><b>CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA</b></p> <p align="center"><b>BLOQUE OBLIGATORIO</b></p> <p><b>Ejercicio 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos) CONTEXTO</b></p> <p>En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.</p> <p>Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.</p> <p>Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.</p> <p><b>1.1.</b> ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?</p> <p><b>1.2.</b> Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?</p> <p><b>1.3.</b> Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?</p> <p align="center"><b>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1</b></p> <p><b>PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)</b> Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.</p> <p><b>Ejercicio 2:</b></p> <p><b>2.1.</b> Dadas las matrices</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p><b>2.1.1.</b> ¿Qué condición tiene que cumplir <math>k</math> para que <math>A</math> sea invertible? Calcule <math>A^{-1}</math> cuando sea posible.</p> <p><b>2.1.2.</b> Para <math>k = 0</math>, calcule la matriz <math>X</math> que satisfaga la igualdad <math>AX - A = B^2 + A^T</math> siendo <math>A^T</math> la traspuesta de <math>A</math>.</p> |                                                                                                                    |                                         |

**Ejercicio 3:**

2.2. Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3 - m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$$

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos) Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

**Ejercicio 4:**

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule  $\int e^x \cos 3x \, dx$ .

**Ejercicio 5:**

3.2. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ .

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

**Ejercicio 6:**

4.1. Considérense los planos  $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$  y  $\pi': x + z - 1 = 0$  y los puntos  $A(2,1,0)$  y  $B(-1,-2,3)$ .

4.1.1. Calcule la distancia del punto  $A$  al plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$ .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

**Ejercicio 7**

4.2. Dadas las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

## RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

## BLOQUE OBLIGATORIO

## Ejercicio 1:

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

**1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

**1.2.** Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

**1.3.** Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

## Solución:

Definimos los sucesos:

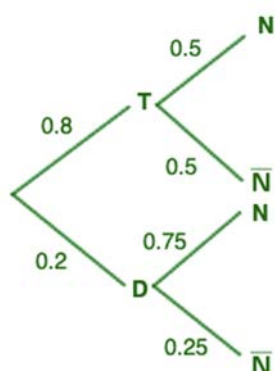
T: “zapatillas Tradicionales”.

N: “zapatillas en buen estado” (**Nuevas**).

D: “zapatillas de **D**iseño”.

B: “Zapatillas **B**lancas”.

**1.1.** Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol.



$$P(T \cup N) = P(T) + P(N)^* - P(T \cap N) = P(T) + P(N) - P(T)P(N/T) \\ = 0.8 + 0.55 - 0.8 \cdot 0.5 = 0.95$$

$$* P(N) = 0.8 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.75 = 0.55 \text{ (teorema de la probabilidad total)}$$

**La probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado es 0.95.**

**1.2.** En este apartado es muy importante leer detalladamente el enunciado. Nos piden probabilidad de llevar zapatillas de diseño y que estén en buen estado.

$$P(D \cap N) = 0.2 \cdot 0.75 = 0.15$$

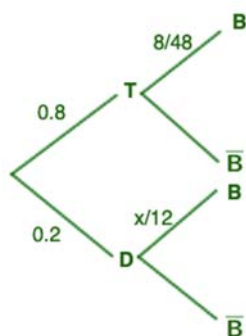
**La probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas porque lleva las zapatillas que quiere es 0.15.**

**1.3.** Necesitamos conocer cuántos pares tiene de cada tipo, para ello:

80% de 60: tiene 48 pares de zapatillas tradicionales.

20% de 60: tiene 12 pares de zapatillas de diseño.

Recurrimos a un diagrama de árbol para organizar la información, llamando “x” al número de zapatillas blancas de diseño que tiene Antón.



Sabemos que “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes  $\Rightarrow P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D)$

Aplicamos el teorema de las probabilidades totales para el cálculo de  $P(B)$ .

$$0.2 \cdot \frac{x}{12} = \left( 0.8 \cdot \frac{8}{48} + 0.2 \cdot \frac{x}{12} \right) \cdot 0.2$$

$$\text{Operando: } \frac{0.2x}{12} = \frac{2}{75} + \frac{0.04x}{12} \Rightarrow \frac{1}{75}x = \frac{2}{75} \Rightarrow x = 2$$

**Antón tiene dos pares de zapatillas blancas de diseño.**

## BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

## Ejercicio 2.1:

2.1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir  $k$  para que  $A$  sea invertible? Calcule  $A^{-1}$  cuando sea posible.

2.1.2. Para  $k = 0$ , calcule la matriz  $X$  que satisfaga la igualdad  $AX - A = B^2 + A^T$  siendo  $A^T$  la traspuesta de  $A$ .

## Solución:

$$2.1.1. \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = 4k + 2 - 1 - 4k = 1 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Calculamos la inversa

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k+1 & -2 \\ -2k & k & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}A)^t = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ -2k+1 & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}A)^t = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ -2k+1 & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2.1.2. X - A = B^2 + A^T \Rightarrow AX = B^2 + A^T + A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B^2 + A^T + A) \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 + A^T + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.2:**

**2.2.** Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$$

**Solución:** Estudiamos el rango de la de coeficientes ( $A$ ) y de la ampliada ( $A^*$ )

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{array} \right)$$

$$|A| = m - m(3-m) - 2m = m^2 - 4m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 4$$

$$m \neq 0, m \neq 4 \quad \text{rang } A = 3$$

Estudiamos los rangos para  $m = 0$

$$\text{Rang } A = 2, \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A^* = 2 \Rightarrow \text{SCI}$$

Estudiamos los rangos para  $m = 4$

$$\text{Rang } A = 2, \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A^* = 3 \Rightarrow \text{SI}$$

Resumiendo, aplicando el teorema de Rouché- Frobenius:

$$m \neq 0, m \neq 4, \quad \text{rango } A = \text{rango } A^* = \text{n}^\circ \text{ incógnitas} = 3$$

$$\Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado (SCD)}$$

$$m=0, \text{rango } A = \text{rango } A^* = 2 \neq \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sist. Compatible Indeterminado (SCI)}$$

$$m = 4, \text{rango } A \neq \text{rango } A^* \Rightarrow \text{Sist. Incompatible (SI)}$$

**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos) Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

**Ejercicio 3.1:**

**3.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes:

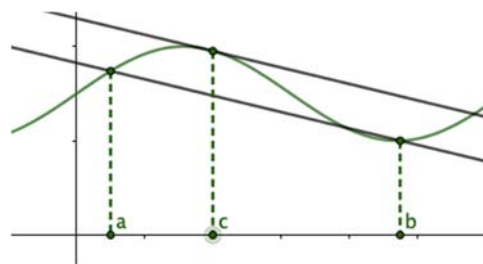
**3.1.1.** Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

**3.1.2.** Calcule  $\int e^x \cos 3x \, dx$ .

**Solución:**

**3.1.1.** Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a,b]$  y derivable en  $(a,b)$ , entonces existe, al menos, un punto  $c \in (a,b)$  /  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Esto significa que existe al menos un punto en el intervalo  $(a, b)$  en el que la tangente es paralela (tienen la misma pendiente) a la recta que une los puntos en la gráfica de  $a$  y  $b$ .



**3.1.2.**  $\int e^x \cos 3x \, dx$

La resolvemos por partes, para ello consideramos:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \cos 3x \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

$$\int e^x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^x \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3} \int e^x \operatorname{sen} 3x \, dx$$

Volvemos a aplicar el método por partes.

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \operatorname{sen} 3x \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} e^x \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} e^x \cos 3x - \frac{1}{3} \int e^x \cos 3x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} e^x \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9} e^x \cos 3x - \frac{1}{9} \int e^x \cos 3x \, dx \Rightarrow \end{aligned}$$

Es una integral cíclica, por lo tanto:  $\frac{10}{9} \int e^x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^x \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9} e^x \cos 3x \Rightarrow$

$$\int e^x \cos 3x \, dx = \frac{3e^x \operatorname{sen} 3x + e^x \cos 3x}{10} + C$$

**Ejercicio 3.2:**

**3.2.** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , se pide responder a las siguientes cuestiones:

**3.2.1.** Estudie la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

**3.2.2.** Estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  en  $x = 0$ .

**3.2.3.** Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = -1$ .

**Solución:**

**3.2.1.** Continuidad en  $x=0$ . Estudiamos las tres condiciones de continuidad.

- $f(0)=0$
- $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{4x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**La función  $f(x)$  es continua en  $x=0$** 

**3.2.2.** Derivabilidad en  $x=0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} e^{4x} + 4xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{4x} + 4xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 1 \\ f'(0^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \quad \text{Por lo tanto, } f \text{ es derivable en } x=0.$$

Un procedimiento más correcto sería el estudio por definición de las derivadas laterales, pero se da por válido este.

**La función  $f(x)$  es derivable en  $x=0$** 

**3.2.3.** La ecuación de la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  viene dada por su expresión punto-pendiente:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow f(-1) = -e^{-4}$$

$$f'(-1) = e^{-4} - 4e^{-4} = -3e^{-4}$$

$$y + e^{-4} = -3e^{-4}(x + 1)$$

## BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

## Ejercicio 4.1:

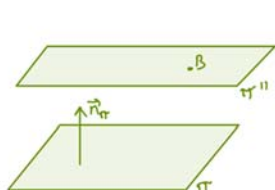
4.1. Considérense los planos  $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$  y  $\pi': x + z - 1 = 0$  y los puntos  $A(2,1,0)$  y  $B(-1,-2,3)$ .

4.1.1. Calcule la distancia del punto  $A$  al plano paralelo a  $\pi$  que pasa por  $B$ .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

## Solución:

4.1.1. Calculamos el plano paralelo a  $\pi$  pasando por  $B$ .



$$\vec{n}_\pi = (2, 3, 1)$$

$$\pi'': 2x + 3y + z + D = 0$$

$$B(-1, -2, 3) \in \pi'' \Rightarrow -2 - 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 5$$

Por lo tanto  $\pi'': 2x + 3y + z + 5 = 0$

$$\text{Determinamos } d(A, \pi'') = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 + 3 + 5|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7} u.$$

$$d(A, \pi'') = \frac{6\sqrt{14}}{7} u.$$

4.1.2.  $\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ \pi': x + z - 1 = 0 \end{array} \right\}$  Resolvemos el sistema compatible indeterminado.

$$\begin{aligned} x &= 1 - z \\ y &= \frac{1}{3}(z - 3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \frac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Ejercicio 4.2:**

**4.2.** Dadas las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

**4.2.1.** Calcule la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

**4.2.2.** Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

**Solución:**

**4.2.1.** Estudiamos los vectores directores de las rectas:

$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$  por lo tanto, las rectas son paralela o coincidentes.

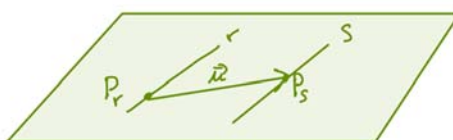
Comprobamos si un punto de  $r$  pertenece a  $s$ , en ese caso serían coincidentes, en caso contrario paralelas.

$P_r(1,2,1)$

$P_r \notin s, \frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{-2}$

**Las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas.**

**4.2.2.** El plano queda determinado si conocemos dos vectores y un punto. Para ello determinamos el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{P_r P_s}$



$P_r(1,2,1), P_s(2,1,1)$

$\vec{d}_r = (2, -1, 1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (1, -1, 0)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(x-1) + 1(y-2) - (z-1) = 0$$

**$\pi: x + y - z - 2 = 0$**