

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de LA RIOJA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García





PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

- (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.
- (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.

- (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3}A^T\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$? Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos sub apartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.

b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos sub apartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la recta r , $r \equiv x - 2 = y + 1 = -z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$.

b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ halla los valores de m para que sean:
i) paralelos.
ii) perpendiculares.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Ejercicio 1:

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(\mu, \sigma)$.

- a) Nos dicen que “solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha” $\rightarrow P(X > 9000) = 0.02$. También sabemos que “en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha” $\rightarrow P(X < 8315) = 0.56$.

$$P(X > 9000) = 0.02 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9000 - \mu}{\sigma} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055 \Rightarrow 9000 - \mu = 2.055\sigma \Rightarrow 9000 - 2.055\sigma = \mu$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

$$P(X < 8315) = 0.56 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z < \frac{8315 - \mu}{\sigma}\right) = 0.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8315 - \mu}{\sigma} = 0.15 \Rightarrow \boxed{8315 - \mu = 0.15\sigma}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 9000 - 2.055\sigma = \mu \\ 8315 - \mu = 0.15\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 8315 - 9000 + 2.055\sigma = 0.15\sigma \Rightarrow -685 = -1.905\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{685}{1.905} \approx 359.58 \Rightarrow \mu = 9000 - 2.055 \cdot \frac{685}{1.905} \approx 8261.06$$

La media de producción tiene un valor aproximado de 8261 kg por hectárea y la desviación típica es de 359 kg/ha.

- b) X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(8261, 359)$.
Nos piden calcular $P(X > 8500)$.

$$P(X > 8500) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{8500 - 8261}{359}\right) = P(Z > 0.666) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.666) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7454 = \boxed{0.2546}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764

a) Media = 8261 kg/ha; Desviación típica = 359 kg/ha

b) $P(X > 8500) = 0,2546$

ANÁLISIS

Ejercicio 2:

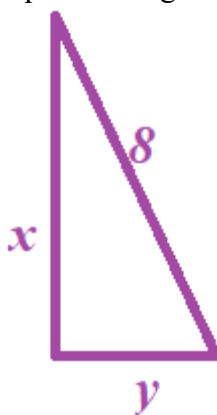
APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2**

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

Solución 2.1:

Como se habla de hipotenusa suponemos que el triángulo es rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 8^2 \rightarrow y^2 = 64 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$. El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(x, y) = \frac{xy}{2}$$

Sustituimos en la expresión del área “y” por la expresión obtenida $y = \sqrt{64 - x^2}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{64 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2}$$

Derivamos la función área obtenida y averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos)

$$A(x) = \frac{x\sqrt{64-x^2}}{2} \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{64-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{64-x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{64-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{64-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{64-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{64-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 64-x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{32}}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo estudiando el signo de la derivada antes y después $x = \sqrt{32}$.

- En el intervalo $(0, \sqrt{32})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{\sqrt{64-1^2} - \frac{1^2}{\sqrt{64-1^2}}}{2} = \frac{31\sqrt{7}}{21} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{32}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{32}, 8)$ tomamos $x=7$ y la derivada vale

$$A'(7) = \frac{\sqrt{64-7^2} - \frac{7^2}{\sqrt{64-7^2}}}{2} = \frac{-17\sqrt{15}}{15} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{32}, 8).$$

Como la función crece antes y decrece después podemos afirmar que en $x = \sqrt{32}$ hay un máximo relativo. Para este valor tenemos $y = \sqrt{64-x^2} = \sqrt{64-(\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$

La superficie de la vela es máxima con $x = \sqrt{32}$ e $y = \sqrt{32}$.

Solución 2.2:

Si la función tiene un máximo relativo en $x = 1/2$ entonces la derivada se anula para este valor.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \alpha x + 11 \Rightarrow f'(x) = -2x + \alpha \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -2 \cdot \frac{1}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

El valor buscado es $\alpha = 1$. La función queda $f(x) = -x^2 + x + 11$.

Calculamos la derivada de la función $f'(x) = -2x + 1$.

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 11 \\ f'(x) &= -2x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 11 = -2x + 1 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-10)}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{3-7}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases}$$

El área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) - f'(x) dx &= \int_{-2}^5 -x^2 + x + 11 - (-2x + 1) dx = \int_{-2}^5 -x^2 + 3x + 10 dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^5 = \left[\frac{-5^3}{3} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} + 10(-2) \right] = \\ &= -\frac{125}{3} + \frac{75}{2} + 50 - \frac{8}{3} - 6 + 20 = -\frac{133}{3} + \frac{75}{2} + 64 = \boxed{\frac{343}{6} \approx 57.16} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{343}{6} \approx 57.16$ unidades cuadradas.

Área = 57,16 u²

NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Ejercicios 3:

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2****3.1** Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3}A^T\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .**3.2** Responda a los dos sub apartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$?Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .**Solución 3.1:**

a) Al ser el sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coinciden, por lo que el sistema siempre es compatible. Este sistema tiene la solución trivial y solo hay dos opciones tiene solo esta solución o tiene infinitas soluciones (incluyendo la trivial).

Para que el sistema tenga solo la solución trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, coincidiendo con el número de incógnitas, por lo que el determinante de esta matriz debe ser distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - m + 3 + 2 + 3 - 3m = -4m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La solución es la trivial para cualquier valor de m distinto de $\frac{1}{2}$.

El sistema es compatible indeterminado para $m = \frac{1}{2}$. Lo resolvemos para este valor.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = z \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y - 3x - y = 0 \\ x - y - 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow z = 3x - x = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A - \frac{1}{3}A^T$.

$$A - \frac{1}{3}A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que debemos resolver es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - 1 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - (3x - 1) - z = 0 \\ 3x + 2(3x - 1) + 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3x + 1 - z = 0 \\ 3x + 6x - 2 + 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - x - z = 0 \\ 9x + 3z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ 3x + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 - z) + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 3z + z = 3 \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 0 = 1} \Rightarrow \boxed{y = 3 \cdot 1 - 1 = 2}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$.

$$\mathbf{x = 1, y = 2, z = 0}$$

Solución 3.2:

3.2 Obtenemos la expresión de $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 1] = \\ &= (1-\lambda)[3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 2] \end{aligned}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \\ \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{2} = \lambda} \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

Situación 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es no nulo y el rango de $A - \lambda I$ es 3.

Situación 2. $\lambda = 1$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la primera fila y la segunda columna (nula) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 3. $\lambda = 2 + \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 + \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 4. $\lambda = 2 - \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 - \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 3. Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 4 - 0 - 1 - 24 = \boxed{-18}$$

Como el determinante de A vale -18 distinto de cero esta matriz tiene inversa. La podemos utilizar para despejar X en la ecuación $AX = b$.

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

GEOMETRÍA

Ejercicios 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2****4.1** Responda a los dos sub apartados siguientes.a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z-2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.**4.2** Responda a los dos sub apartados siguientes.a) (1.25 puntos) Dada la recta $r \equiv x-2 = y+1 = -z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$.b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ halla los valores de m para que sean:

i) paralelos.

ii) perpendiculares.

Solución: 4.1:

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-m}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, m) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = m + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3/2} = \frac{z-1}{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ Q_s(1, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \vec{w}_s = 2\vec{v}_s = (4, 3, 1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales (distinta dirección).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{w}_s = (4, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o cruzan. Para que las dos rectas se corten debe ser nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \vec{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,0,m) \\ Q_s(1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1,0,1) - (0,0,m) = (1,0,1-m)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{w_s} = (4,3,1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1,0,1-m) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1-m \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-m) + 1 + 0 - 3 - 4(1-m) - 0 = 3 - 3m + 1 - 3 - 4 + 4m = m - 3$$

$$[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Para $m=3$ las rectas r y s se cortan.

$$\text{Para } m=3 \text{ las rectas quedan } r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}.$$

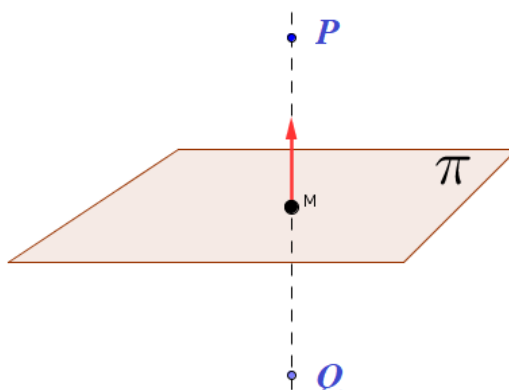
Hallamos su punto A de corte.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 4\beta \\ \alpha = 3\beta \\ 3 + \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4\beta = 3\beta \\ 3 + 1 + 4\beta = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 3\beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta = -1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4(-1) = -3 \\ y = 3(-1) = -3 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3, -3, 0)}$$

Las rectas r y s se cortan en $A(-3, -3, 0)$.

- b) Si los dos puntos P y Q son simétricos respecto del plano π el plano debe contener al punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Además, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector normal del plano.



$$\left. \begin{array}{l} P = (0, 2, -1) \\ Q = (2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{(0, 2, -1) + (2, -2, 1)}{2} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - (0, 2, -1) = (2, -4, 2) \end{array} \right.$$

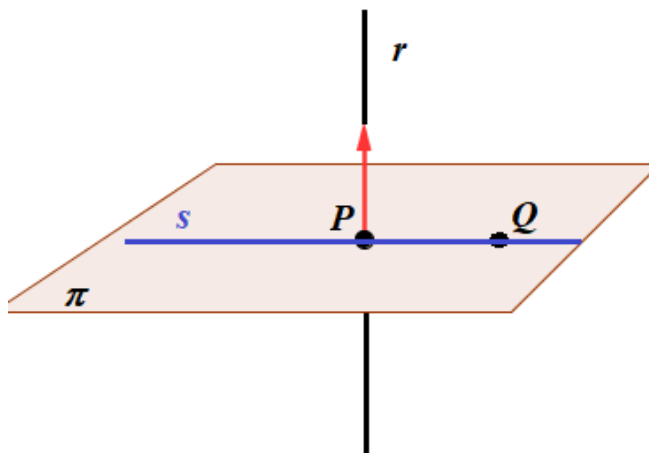
$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (2, -4, 2) = (1, -2, 1) \\ M(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M(1, 0, 0) \in \pi \\ \pi : x - 2y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + z - 1 = 0}$$

El plano $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ cumple que los puntos P y Q son simétricos respecto a él.

Solución: 4.2:

- a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto Q . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \pi : x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - z + 1 = 0 \\ r \equiv x - 2 = y + 1 = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = -z \rightarrow x = 2 - z \\ y + 1 = -z \rightarrow y = -1 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - z - 1 - z - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos es la que pasa por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) \in s \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = 3\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

La recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$ tiene ecuación:

$$s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) Hallamos los vectores normales de cada plano.

$$\pi: mx + 2y - 3z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (m, 2, -3)$$

$$\pi': 2x - 4y + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}' = (2, -4, 6)$$

b.i) Para que los planos sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n}' = (2, -4, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ los planos son paralelos o coincidentes. Los planos quedan $-x + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$. Multiplicamos la ecuación del primer plano por -2 y nos queda $2x - 4y + 6z + 2 = 0$, observamos que las ecuaciones de los dos planos no son las mismas y los planos no son coincidentes y por tanto, son paralelos.

b.ii) Para que los planos sean perpendiculares los vectores normales deben ser perpendiculares, esto implica que su producto escalar debe ser igual a cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n}' = (2, -4, 6) \\ \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (m, 2, -3)(2, -4, 6) = 0 \Rightarrow 2m - 8 - 18 = 0 \Rightarrow 2m - 26 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

Para $m = 13$ los planos son perpendiculares.

 UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024–2025 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.		
BLOQUE OBLIGATORIO. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD Ejercicio 1: APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos) Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula: - la desviación típica de la distribución, (1 punto). - cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos). - el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto). (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen) BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1: ANÁLISIS Ejercicio 2: APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos) Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2 2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible. 2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva. BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2: NÚMEROS Y ÁLGEBRA Ejercicio 3: APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos) Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2 3.1 Responda a los dos subapartados siguientes. a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema, $\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$		

b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XA X^{-1} = B$.

b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3: GEOMETRÍA

Ejercicio 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano $\pi: -x - 3y + z + 4 = 0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1, 0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Ejercicio 1:

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

- la desviación típica de la distribución, (1 punto).
 - cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).
 - el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).
- (Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

X = El tiempo, en horas, de vida de un foco. $X = N(2000, \sigma)$.

- a) Nos dicen que “la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca más de 1800 horas es 0.8289.” $\Rightarrow P(X > 1800) = 0.8289$.

$$P(X > 1800) = 0.8289 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{1800 - 2000}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{-200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200}{\sigma} = 0.95 \Rightarrow \sigma = \frac{200}{0.95} = \frac{4000}{19} \approx 210.53 \text{ horas}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8150	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

- b) Nos piden hallar “ t ” tal que $P(X < t) = 0.90$.

$$P(X < t) = 0.90 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{t - 2000}{4000/19}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t - 2000}{4000/19} = 1.28 \Rightarrow t - 2000 = \frac{4000 \cdot 1.28}{19} \Rightarrow t = \frac{43120}{19} \approx 2269.47$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El percentil 90 está situado en las 2269.47 horas de duración.

b) Calculamos $P(X > 1600)$.

$$P(X > 1600) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1600 - 2000}{4000/19}\right) = P(Z > -1.9) =$$

$$= P(Z \leq 1.9) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9713$$

z	0	
0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,

El 97.13% de los focos tienen una duración aceptable.

97,13 %

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1: ANÁLISIS

Ejercicio 2:

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

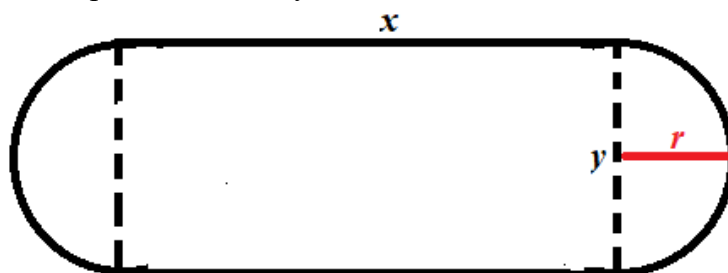
Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

Solución 2.1:

Hacemos un dibujo del campo de atletismo y damos nombre a cada uno de sus componentes.



El radio del semicírculo es la mitad del lado corto del campo: $y = 2r$.

El perímetro vale 1 km $\rightarrow 2x + 2\pi r = 1 \rightarrow 2\pi r = 1 - 2x \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi}$.

Obtenemos la expresión del área de la parte rectangular.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = 2r \\ r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2xr = 2x \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \right) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi}$$

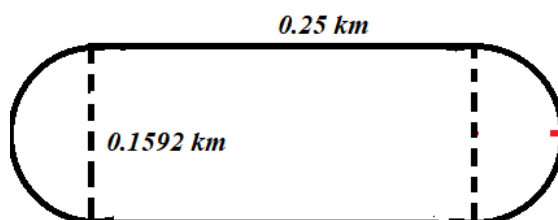
$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ km}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} \Rightarrow A''(x) = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow A''(0.25) = -\frac{4}{\pi} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada podemos decir que el área tiene un máximo relativo en $x=0.25$. Para este valor tenemos que $y = 2\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1/4}{\pi}\right) = 2\left(\frac{2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi}\right) = 2\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$.

El campo con área máxima en su parte rectangular tiene el lado recto de longitud 0.25 km y $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ km en el lado situado en la parte del semicírculo.



Rectángulo de lados 0,25 km y 0,1592 km

Solución 2.2:

Averiguamos los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+ \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(A - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ A - x = 0 \Rightarrow x = A > 0 \end{cases}$$

El área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y A de la función.

$$\int_0^A Ax - x^2 dx = \left[\frac{Ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^A = \left[\frac{A \cdot A^2}{2} - \frac{A^3}{3} \right] - \left[\frac{A \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{A^3}{2} - \frac{A^3}{3} = \frac{A^3}{6} > 0$$

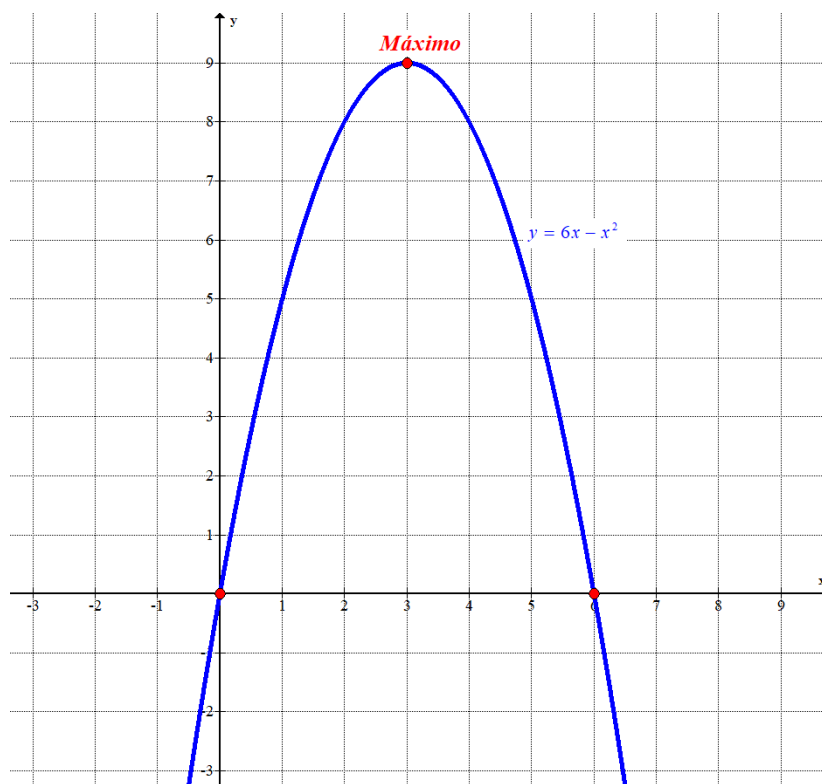
El área tiene un valor de $\frac{A^3}{6}$ unidades cuadradas.

Iguamos el área a 36 y obtenemos el valor de A .

$$\frac{A^3}{6} = 36 \Rightarrow A^3 = 6^3 \Rightarrow A = 6$$

Para $A=6$ el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas vale 36 unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica de la curva $y = 6x - x^2$. Su gráfica es una parábola con puntos de corte con el eje de abscisas $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$. Por lo que el vértice está situado en $x=3$. El vértice tiene coordenadas $V(3, 9)$ y es el máximo absoluto de la función.



NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Ejercicio 3:

APARTADO 3. NÚMEROS Y ÁLGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

- b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1} = B$.

- b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

Solución 3.1:

- b) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X = B + Y \end{cases} \Rightarrow 2(B + Y) - 3Y = A \Rightarrow 2B + 2Y - 3Y = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B - Y = A \Rightarrow Y = 2B - A = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 0-5 \\ 6-4 & 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 0-5 \\ 3+2 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

- b) Llamamos “x” al número de unidades de queso e “y” al número de unidades de mantequilla que se fabrican diariamente. Ponemos los datos en una tabla.

	Leche	Horas de mano de obra
Unidades de queso (x)	10x	6x
Unidades de mantequilla (y)	5y	8y
TOTALES	10x + 5y	6x + 8y

“Disponemos cada día de 100000 unidades de leche y 110000 unidades de mano de obra. Considerando que utilizamos todo lo disponible” $\rightarrow 10x + 5y = 100000$; $6x + 8y = 110000$.

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 5y = 100000 \\ 6x + 8y = 110000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 20000 \\ 3x + 4y = 55000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20000 - 2x \\ 3x + 4y = 55000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 4(20000 - 2x) = 55000 \Rightarrow 3x + 80000 - 8x = 55000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25000 = 5x \Rightarrow \boxed{x = 5000} \Rightarrow \boxed{y = 20000 - 2 \cdot 5000 = 10000}$$

Se producen 5 000 unidades de queso y 10 000 unidades de mantequilla.

Solución 3.2:

a) Consideramos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XAX^{-1} = B \Rightarrow XAX^{-1}X = BX \Rightarrow XA = BX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a = -9c \\ -9b = -9d \\ 9c = 6a \\ 6d = 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{6}c = \frac{3}{2}c \\ b = d \\ \frac{9}{6}c = a \\ d = b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$$

Como debe existir la inversa de la matriz X su determinante debe ser distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{vmatrix} = \frac{3bc}{2} - bc = \frac{bc}{2} \Rightarrow \frac{bc}{2} \neq 0 \Rightarrow b \neq 0, c \neq 0$$

Determinamos la inversa de X .

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3c/2 & c \\ b & b \end{pmatrix}}{bc/2} = \frac{2}{bc} \begin{pmatrix} b & -b \\ -c & 3c/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$ y $X^{-1} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$, siendo $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

b) Sumamos a la segunda ecuación la primera.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ \hline -2x \quad -y \quad +3z \quad = b \\ 2x \quad +y \quad -3z \quad = a \\ \hline 0 \quad = b+a \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 0 = a + b \end{cases}$$

El sistema es compatible cuando $a+b=0 \rightarrow b=-a$.

El sistema nunca puede ser compatible determinado pues hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones. El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada nunca puede ser igual al número de incógnitas (3), como mucho pueden ser iguales a 2 y obtener un sistema compatible indeterminado.

GEOMETRÍA. BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano

$$\pi: -x-3y+z+4=0.$$

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x-5y+z+3=0$.b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1, 0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-1 \\ z=8+2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+3\mu \\ y=2-\mu \\ z=-1+4\mu \end{cases}$$

Solución 4.1:

a) Son 4 planos y su punto de corte, si existe, se obtiene de la resolución del sistema formado por sus ecuaciones. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x-z \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2-x-z-z=4 \\ mx+2-x-z+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=2z \\ (m-1)x+2z=4 \\ x-2z=m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)x+x-2=4 \\ x-x+2=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx=6 \\ 2=m \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow 3-2=2z \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y=2-3-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}}$$

El sistema tiene solución cuando $m=2$ y la solución es el punto $P\left(3, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- b) Estudiamos la posición relativa de la recta y el plano. Comprobamos si el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5} \\ \pi: -x-3y+z+4=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 2, 5) \\ \vec{n} = (-1, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n} = (-1, 2, 5)(-1, -3, 1) = 1 - 6 + 5 = 0$$

El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y por tanto la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano. En cualquiera de los dos casos podemos calcular la distancia de la recta al plano como la distancia de cualquiera de sus puntos al plano. Sabemos que $P_r(3, 1, -2)$ es un punto de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(3, 1, -2) \\ \pi: -x-3y+z+4=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-3-3 \cdot 1-2+4|}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21u$$

La distancia de la recta r al plano π es de $\frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21$ unidades.

$$\mathbf{D = 1,21 u}$$

Solución 4.2:

- a) Un plano π' paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$ tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + D = 0$.

Determinamos el valor de D que hace que el plano paralelo contenga el punto $P \equiv (0, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv (0, 2, 1) \in \pi' \\ \pi': 2x - 5y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow -9 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 9}$$

El plano que buscamos tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + 9 = 0$.

- b) El plano perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta. Hallamos el vector director de la recta.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = z \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y - 5x - y + 4 = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3x - 3y = 1 \Rightarrow -1 - 3x = 3y \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{3} - x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{z = 5x - \frac{1}{3} - x - 4 = \frac{-13}{3} + 4x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-1}{3} - \lambda \\ z = \frac{-13}{3} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 4) \end{aligned}$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene el punto P y con vector normal $\vec{v}_r = (1, -1, 4)$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 4) \\ P \equiv (1, 0, -3) \in \pi \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x - y + 4z + D = 0 \\ P \equiv (1, 0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + 4(-3) + D = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + 4z + 11 = 0} \end{aligned}$$

El plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación

$$\pi: x - y + 4z + D = 0.$$

- c) Estudiamos la posición relativa de las rectas. Determinamos primero un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5, -1, 8) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 2) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2, 2, -1) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{2}{4}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(5, -1, 8) \\ Q_s(2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 2, -1) - (5, -1, 8) = (-3, 3, -9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-3, 3, -9) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 18 - 6 - 0 - 12 = 9 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

Calculamos su distancia entre las rectas r y s con la fórmula $d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6j - k + 0 - 4j + 2i = 2i + 2j - k = (2, 2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3u$$

La distancia entre las rectas r y s vale 3 unidades.