

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Javier Rodrigo Hitos



VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

Examen Matemáticas II del 2025:

<https://www.youtube.com/watch?v=hl-kThLEppl>

<https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM>

Noticias:

[Un ingeniero, tras resolver el examen de Matemáticas II de la PAU de Madrid: "Lo siento mucho por los chavales"](#)

[¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER](#)



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?
- (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

- (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 4

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

- a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A-C)} \cap B)$.
- b) (1.25 puntos) $P((A \cap B) / \overline{C})$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1:

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución 1.1:

Llamamos x , y , z al número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido.

Obtenemos las ecuaciones que surgen del enunciado.

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres $\rightarrow 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80$.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos $\rightarrow \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5}$.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos $\rightarrow 2z = x + y - 5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80 \\ \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5} \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.8x + y + 1.2z = 80 \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - 0.8x - 1.2z \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(80 - 0.8x - 1.2z) = 3x + 3z \\ 2z = x + 80 - 0.8x - 1.2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 - 4x - 6z = 3x + 3z \\ 3.2z = 0.2x + 75 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z = x + 375 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z - 375 = x \end{array} \right\} \Rightarrow 400 = 7(16z - 375) + 9z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = 112z - 2625 + 9z \Rightarrow 3025 = 121z \Rightarrow \boxed{z = \frac{3025}{121} = 25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 16 \cdot 25 - 375 = 25} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 0.8 \cdot 25 - 1.2 \cdot 25 = 30}$$

En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

$$\mathbf{x = 25; y = 30; z = 25.}$$

Llamando: x - Lanzamientos de 1
 y - Lanzamientos de 2
 z - Lanzamientos de 3

Antonio Malaver
 @a.malaver

1ª condición:

$$1 \cdot 0'8 \cdot x + 2 \cdot 0'5 \cdot y + 3 \cdot 0'4 \cdot z = 80 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0'8 \cdot x + y + 1'2 \cdot z = 80 //$$

2ª condición:

$$\frac{1}{3}y = \frac{1}{5}(x+z) \rightarrow 3x - 5y + 3z = 0 //$$

3ª condición:

$$2z = x + y - 5 \rightarrow x + y - 2z = 5 //$$

Así, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 0'8 \cdot x + y + 1'2 z = 80 \\ 3 \cdot x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 25 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}$$

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Solución 1.2

a) Calculamos la expresión de la matriz $A - \lambda I$ y la de su determinante.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda) - 2] = (2-\lambda)[12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2] =$$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Tenemos que el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$.

Determinamos las raíces de este polinomio.

$$\left. \begin{array}{l} P(\lambda) = (2-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] \\ P(\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 2} \\ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = \lambda} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = \lambda} \end{cases} \end{cases}$$

Las raíces del polinomio son $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$.

$$a) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda)$$

¿Qué es este ejercicio?
 Si son autovalores y autovectores!

$$= (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 4 + 2\lambda$$

$$= (24 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3) - 4 + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 - 4 + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 //$$

Antonio Malaver
 @a.malaver

Hallamos las raíces igualando a 0:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{¡Aparece 2 veces!}$$

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

$$\lambda = 5; \lambda = 2$$

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

b) Para $\lambda = 5$

$$(A - 5I) \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Reducimos la matriz a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 + 2f_1 \\ f_3 + 3f_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No tiene sentido preguntar esto en selectividad... ¡Esto se da en primera de carrera!

$$\text{Así: } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

Poniendo todo en función de z :

$$\begin{cases} x = y \\ y = \frac{3}{5}z \end{cases} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}z \\ \frac{3}{5}z \\ z \end{pmatrix}$$

Cogiendo $z=1$ por ejemplo:

$$\vec{v}(z=1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

b) Para $\lambda = 5$ la matriz $A - \lambda I$ queda $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hemos visto que tiene

determinante nulo y la situación planteada tiene infinitas soluciones.
Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \Rightarrow x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 1ª} = \text{Ecuación 2ª} \} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 2y - 3z = 0 \Rightarrow 5y - 3z = 0 \Rightarrow 5y = 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $\alpha = 3$ tenemos el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ que cumple lo pedido.

$$\mathbf{v} = (3\alpha/5, 3\alpha z/5, \alpha); \mathbf{v} = (3, 3, 5)$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?
- (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Solución:

- a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow x = 0 \\ \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow x = 9 \\ \frac{\pi x}{9} = 2\pi \rightarrow x = 18 \notin [0,12] \\ \dots \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[0,12]$ y en los puntos críticos obtenidos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3 \text{ Máximo} \\ f(9) &= \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = 1 \text{ Mínimo} \\ f(12) &= \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

El valor máximo es 3 y se alcanza en $x = 0$ y el valor mínimo es 1 y se alcanza en $x = 9$.

Como el coseno de un ángulo toma como valor mínimo -1 y máximo 1 la función

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ toma como valor mínimo $-1 + 2 = 1$ y como valor máximo $1 + 2 = 3$.

Por lo que la curva está contenida en el muro en el intervalo $[0,12]$.

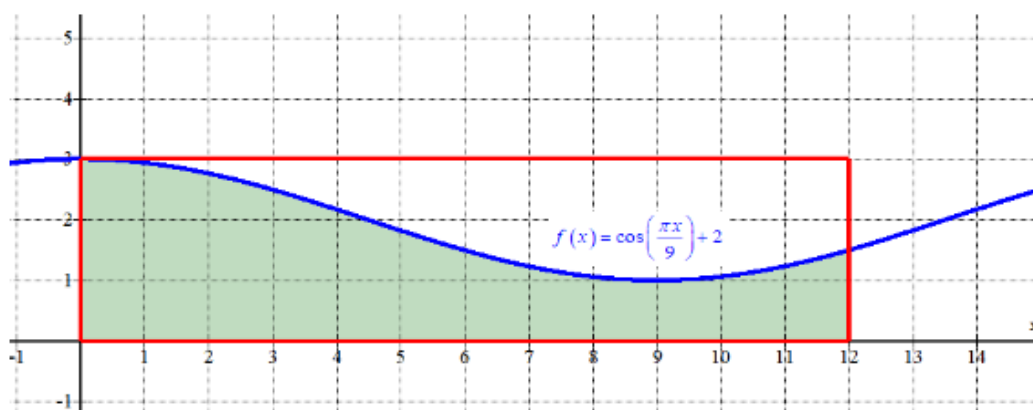
- b) El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva y otra por encima de la curva. Hallamos el área de la parte de muro situada por debajo de la curva como la integral definida de la función entre 0 y 12.

$$\int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 dx = \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 \right] - \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0 \right] = \boxed{24 + \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) \approx 21.52}$$

La parte de muro situada por debajo de la curva tiene un área aproximada de 21.52 metros cuadrados.

Como el muro tiene una superficie de $3 \cdot 12 = 36$ metros cuadrados la parte superior tiene una superficie aproximada de $36 - 21.52 = 14.48$ metros cuadrados.



- c) Debemos pintar 21.52 metros cuadrados de muro. Como con cada bote de pintura se pintan 3 metros cuadrados de muro, entonces $\frac{21.52}{3} \approx 7.17$. Para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$ se necesitarán, por lo menos, 8 botes de pintura, con 7 nos faltaría un trocito de muro por pintar y con 8 nos sobra un poco de pintura.

Máximo: (0, 3); Mínimo: (9, 1). Hacen falta 8 botes, aunque sobra algo de pintura. Con 7 no hay bastante

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

- (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

- (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

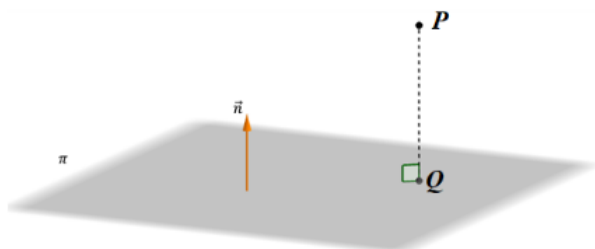
Solución:

a) Calculamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - 2 = 0 \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

b) Debemos hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 1, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Este punto Q que buscamos pertenece al plano y pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha = 2 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

El punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π tiene coordenadas $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$.

c) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow \text{No hay punto de corte con } OZ$$

Los vértices del triángulo son $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $P(0, 1, 1)$.

El área del triángulo ABP es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 0, 0) \\ B(0, 2, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (0, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-2, 1, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2k + 4k + 2j = 2i + 2j + 2k = (2, 2, 2)$$

$$\text{Área } ABP = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \boxed{\sqrt{3} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

$$\text{Área} = \sqrt{3} \text{ u}^2$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A-C)} \cap B)$.

b) (1.25 puntos) $P((A \cap B) / \overline{C})$.

Solución:

Como $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$, $P(E) = 1$ y $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = p$

entonces $6p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 6p + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 6p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{12}$.

Tenemos que $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = \frac{1}{12}$

a) Obtenemos el suceso $\overline{(A-C)} \cap B$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - C = \{19\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A - C} = E - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{(A - C)} \cap B = B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$$

Hallamos la probabilidad pedida.

$$P(\overline{(A - C)} \cap B) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Determinamos el suceso $(A \cap B) / \overline{C}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{7, 13\}$$

$$\left. \begin{array}{l} C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \\ E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{C} = E - C = \{2, 17, 19\}$$

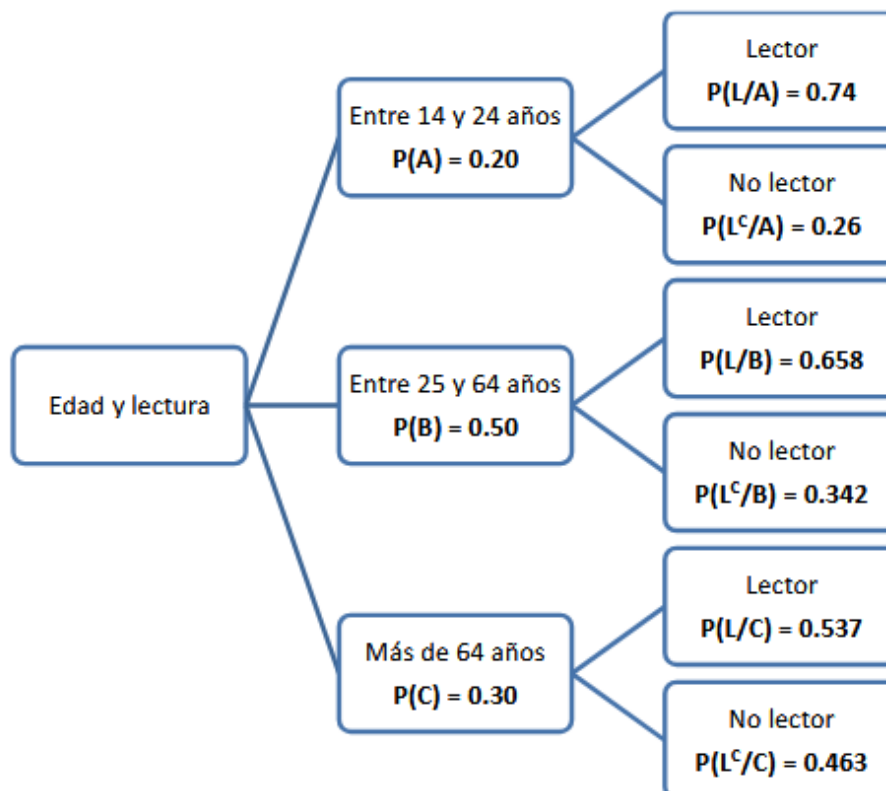
$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \{7, 13\} \\ \overline{C} = \{2, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cap B) / \overline{C} = \emptyset$$

El suceso $(A \cap B) / \overline{C}$ es un suceso imposible y su probabilidad es cero: $P((A \cap B) / \overline{C}) = 0$

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información. Llamamos A, B y C a los sucesos “edad entre 14 y 24 años”, “edad entre 25 y 64” y “mayor de 64 años”, respectivamente. También llamamos L a “ser lector habitual”.



- a) Nos piden calcular $P(L)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(L) &= P(A)P(L/A) + P(B)P(L/B) + P(C)P(L/C) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.74 + 0.5 \cdot 0.658 + 0.3 \cdot 0.537 = \boxed{0.6381}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/L^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/L^c) = \frac{P(B \cap L^c)}{P(L^c)} = \frac{P(B)P(L^c/B)}{1 - P(L)} = \frac{0.5 \cdot 0.342}{1 - 0.6381} = \frac{1710}{3619} \approx 0.4725$$

a) P(lector habitual) = 0,6381; b) P = 0,4725



PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: 2024–2025
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 3:**

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
- (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
- (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 4:**

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
- (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

Solución 1.1:

a) El sistema es $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$. La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es } A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - k + (k+1)^2 - 1 - 0 + k^2(k+1) =$$

$$= -k + k^2 + 1 + 2k - 1 + k^3 + k^2 = k^3 + 2k^2 + k = k(k^2 + 2k + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} A/B \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B es 2, tienen el mismo rango y es menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 1. $k=-1$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} A/B \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\ \hline A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $k=-1$ el sistema es incompatible (sin solución).

- b) Hemos visto en el apartado anterior que para $k=0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las determinamos partiendo el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Solución 1.2:

a) Calculamos la expresión de la matriz $A + A^2$.

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz simétrica $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Resolvemos la igualdad planteada.

$$\begin{aligned} BA = (A + A^2)B &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a-b &= -3a-5b \\ 5a-3b &= -3b-5c \\ b-c &= a+b \\ 5b-3c &= b+c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b=0 \\ 5a=-5c \\ -c=a \\ 4b-4c=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ a=-c \\ -c=a \\ b=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ -a=c \\ b=c \end{cases} \Rightarrow b=c=-a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices B que cumplen lo pedido son $B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}$, siendo a cualquier número real.

b) Tenemos que $A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A_2 = A_1^2 + A_1 = A^2 + A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1^2 + A_1 = A^2 + A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2^2 + A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9-5 & 15-5 \\ -3+1 & -5+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_4 = A_3^2 + A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

La secuencia que hemos observado es la siguiente:

$$A_1, A_2, A_3 = A_1, A_4 = A_2, A_5 = A_1, A_6 = A_2, \dots$$

En las posiciones impares aparece A_1 y en las pares aparece A_2 .

Como 2025 es impar tenemos que $A_{2025} = A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

BLOQUE SIN OPTATIVIDAD

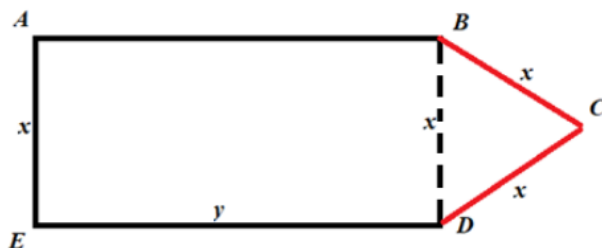
Ejercicio 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Solución:

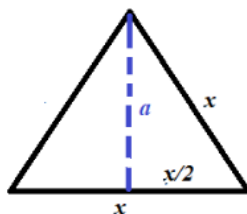
a) Dibujamos la parcela.



El perímetro de la parcela es $3x + 2y$. Como debe tener 120 metros de longitud obtenemos una igualdad de la que despejamos "y".

$$3x + 2y = 120 \Rightarrow 2y = 120 - 3x \Rightarrow \boxed{y = 60 - \frac{3}{2}x}$$

El área de la parcela es el área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Hallamos el valor de la altura del triángulo equilátero para poder hallar su área.

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{Área } BCD = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

El área del rectángulo vale $xy = x\left(60 - \frac{3}{2}x\right) = 60x - \frac{3}{2}x^2$

El área total de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 60x - \frac{3}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 40$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}-6)x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-120}{\sqrt{3}-6} = \frac{120\sqrt{3}+720}{36-3} = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} = 28.12 \text{ metros}$$

Comprobamos si para este valor la segunda derivada es negativa.

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 \Rightarrow A''(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} \Rightarrow A''(28.12) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$$

La segunda derivada es negativa y el área es máxima para $x = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} \approx 28.12$ metros.

Para este valor determinamos el valor de y.

$$y = 60 - \frac{3}{2} \left(\frac{40\sqrt{3}+240}{11} \right) = 60 - \frac{60\sqrt{3}+360}{11} = \frac{300-60\sqrt{3}}{11} \approx 17.83 \text{ metros.}$$

El área de la parcela es máxima cuando situamos el punto B a 17.83 metros de A y el E a 28.12 metros de A.

Ejercicio 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
- (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
- (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Solución 3.1:

- Hallamos los vectores que definen el tetraedro ABCD. Si su volumen es nulo quiere decir que los puntos son coplanarios y no definen un tetraedro. Si el volumen es distinto de cero es que los puntos no son coplanarios y definen un tetraedro.

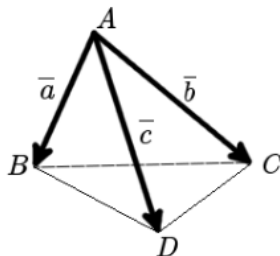
El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,2) \\ B(2,-1,0) \\ C(-2,0,3) \\ D(2,-3,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (2,-1,0) - (1,1,2) = (1,-2,-2) \\ \overline{AC} = (-2,0,3) - (1,1,2) = (-3,-1,1) \\ \overline{AD} = (2,-3,-1) - (1,1,2) = (1,-4,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 24 - 2 + 18 + 4 = -3 \neq 0$$

El producto mixto es distinto de cero y los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

El volumen del tetraedro definido por ellos vale $\frac{3}{6} = 0.5$ unidades cúbicas.



- La cara ABC es un triángulo hallamos su área como la mitad del módulo del producto vectorial $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (1,-2,-2) \\ \overline{AC} = (-3,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - k - 6k - j - 2i =$$

$$= -4i + 5j - 7k = (-4, 5, -7)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} = 4.74 \text{ u}^2$$

Si dividimos el volumen del paralelepípedo ABCD entre el área del rectángulo de la base tendremos el valor de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

$$\text{Altura} = \frac{\text{Volumen paralelepípedo } ABCD}{\text{Área Base } ABC} = \frac{[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}]}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.3162 \text{ u}$$

c) La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$.

La recta s determinada por los puntos B y D tiene como vector director $\vec{u}_s = \overline{BD}$.

$$\vec{u}_s = \overline{BD} = (2, -3, -1) - (2, -1, 0) = (0, -2, -1)$$

Las rectas tienen vectores con coordenadas no proporcionales, por lo que se cortan o se cruzan (no son ni paralelas ni coincidentes).

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overline{P_rB}]$.

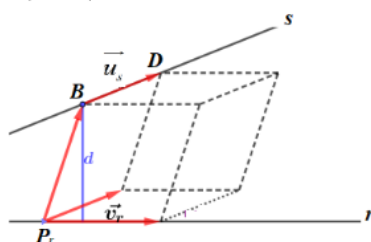
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_r(1, -1, 0) \\ B(2, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overline{P_rB} = (2, -1, 0) - (1, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overline{P_rB}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 2 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan y la distancia entre ellas se obtiene

con la fórmula $d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overline{P_rB}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.



$$\begin{cases} \vec{u}_s = (0, -2, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3i - 2j + 4k = (3, -2, 4)$$

$$d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overline{P_rB}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557 \text{ unidades}$$

La distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D tiene un valor de

$$\frac{3\sqrt{29}}{29} = 0.557 \text{ unidades.}$$

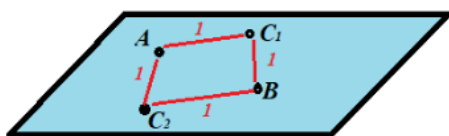
Solución 3.2.:

- a) El eje OZ es una recta con vector director $\vec{v} = (0, 0, 1)$. El plano paralelo al eje OZ tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Otro de sus vectores directores es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \\ \vec{v} = (0, 0, 1) \\ A(0, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y = 0$$

El plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B tiene ecuación $\pi: y = 0$.

- b) La recta perpendicular al plano $z = 1$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Para definir la recta solo falta un punto por el que pase. Este punto puede ser un punto del plano $z = 1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B. Determinamos las coordenadas de este punto o puntos.



$$\left. \begin{array}{l} A(0, 0, 1) \\ B(1, 0, 1) \\ C \in z = 1 \Rightarrow C(a, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a, b, 1) - (0, 0, 1) = (a, b, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (a, b, 1) - (1, 0, 1) = (a-1, b, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} d(A, C) = 1 \\ d(B, C) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = 1 \\ |\overrightarrow{BC}| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + b^2 + 0^2} = 1 \\ \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + 0^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = 1 - a^2 \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1)^2 + 1 - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 1 - 2a + 1 - a^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Una de las rectas que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La otra recta que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
- (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Solución 4.1:

Llamamos X a la variable aleatoria que da la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población. $X = N(75.67, 11.05)$

a) Nos piden calcular $P(60 \leq X \leq 80)$.

$$\begin{aligned}
 P(60 \leq X \leq 80) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{60 - 75.67}{11.05} \leq Z \leq \frac{80 - 75.67}{11.05}\right) = \\
 &= P(-1.42 \leq Z \leq 0.39) = P(Z \leq 0.39) - P(Z \leq -1.42) = \\
 &= P(Z \leq 0.39) - P(Z \geq 1.42) = P(Z \leq 0.39) - [1 - P(Z \leq 1.42)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6517 - 1 + 0.9222 = 0.5739
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9206	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

b) Nos piden calcular $P(X > 100)$.

$$P(X > 100) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{100 - 75.67}{11.05}\right) = P(Z > 2.2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9861 = \boxed{0.0139}$$

z	0.00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,6	0,9452
1,7	0,9554
1,8	0,9641
1,9	0,9713
2,0	0,9772
2,1	0,9821
2,2	0,9861

c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de hombres que superan los 100 kilogramos de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.0139$. $Y = B(10, 0.0139)$.

Nos piden hallar $P(Y \leq 1)$.

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \binom{10}{0} 0.0139^0 \cdot 0.9861^{10} + \binom{10}{1} 0.0139^1 \cdot 0.9861^9 =$$

$$= 0.9861^{10} + 10 \cdot 0.0139 \cdot 0.9861^9 = \boxed{0.9919}$$

P = 0,9919

Solución 4.2:

Llamamos L al suceso “Llueve ese día” y C a “el corredor sufre una caída”.

Nos dicen que $P(C/L) = 0.08$, $P(C/\bar{L}) = 0.004$ y $P(L \cap C) = 0.032$.

Obtenemos la probabilidad de que llueva un día cualquiera:

$$P(C/L) = \frac{P(L \cap C)}{P(L)} \Rightarrow 0.08 = \frac{0.032}{P(L)} \Rightarrow P(L) = \frac{0.032}{0.08} = 0.4$$

a) Nos piden hallar el valor de $P(\bar{C})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(L)P(\bar{C}/L) + P(\bar{L})P(\bar{C}/\bar{L}) = \\ &= P(L)[1 - P(C/L)] + [1 - P(L)][1 - P(C/\bar{L})] = \\ &= 0.4(1 - 0.08) + (1 - 0.4)(1 - 0.004) = \boxed{0.9656} \end{aligned}$$

La probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído es de 0.9656.

b) Nos piden calcular $P(\bar{L}/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L}/C) = \frac{P(\bar{L} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{L})P(C/\bar{L})}{1 - P(\bar{C})} = \frac{(1 - 0.4)0.004}{1 - 0.9656} = \boxed{\frac{3}{43} \approx 0.0698}$$

La probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo vale $\frac{3}{43} \approx 0.0698$.