

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de MURCIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García



	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024–2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.		
CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B): 1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €. a) [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio. b) [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m). c) [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$. 1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. a) [1,25] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas. b) [1,25] Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la traspuesta de A. CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B): 2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm. a) [0,5] Demuestre que su área viene dada por la expresión $f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{98 - x^2}$ b) [2] Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima? 2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$ b) [1] Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 1$ y $x = 2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.		

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

- a) [0,5] Compruebe que se cruzan.
 b) [1,5] Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
 c) [0,5] Calcule la distancia entre r y s .

3B) Considere los planos $\pi_1: x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y - z = 2$

- a) [1] Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .
 b) [0,75] Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .
 c) [0,75] Calcule la proyección ortogonal de P en π_1 .

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- a) [0,5] Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
 b) [0,5] Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
 c) [0,5] Salga una bola verde en U_2 .
 d) [0,5] Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

- a) [1] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
 b) [1,5] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

- 1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.
- a) [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
- b) [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
- c) [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

Solución 1A:

- a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al ejercicio.

El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0 \rightarrow x = my$.

El sueldo de Hugo es el doble del de José $\rightarrow y = 2z$.

La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 € $\rightarrow mz + x + y = 600$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - my = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + mz = 600 \end{array} \right.$$

- b) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{pmatrix}.$$

Determinamos la expresión del determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 2m + 0 - 0 - 0 + 2 = 3m + 2$$

Esta expresión del determinante de A nunca se anula pues $m > 0 \rightarrow 3m > 0 \rightarrow 3m + 2 > 0$.

El rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m > 0$.

c) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = m \cdot 2z \\ mz + x + 2z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2mz \\ (m+2)z + x = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)z + 2mz = 600 \Rightarrow (m+2+2m)z = 600 \Rightarrow (3m+2)z = 600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m > 0 \Rightarrow 3m+2 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{600}{3m+2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2m \frac{600}{3m+2} = \frac{1200m}{3m+2}} \\ \boxed{y = 2 \frac{600}{3m+2} = \frac{1200}{3m+2}} \end{cases}$$

El sueldo de Darío es $\frac{1200m}{3m+2}$, el de Hugo es $\frac{1200}{3m+2}$ y el de José es $\frac{600}{3m+2}$. Todos dependen del valor de m .

Para $m = 2$ los sueldos quedan: El sueldo de Darío es $\frac{1200 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 2} = 300$ euros, el de Hugo es $\frac{1200}{3 \cdot 2 + 2} = 150$

euros y el de José es $\frac{600}{3 \cdot 2 + 2} = 75$ euros

$$\mathbf{x = 300 \text{ €}, y = 150 \text{ €}, z = 75 \text{ €}.}$$

Ejercicio 1B:

1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.
 b) [1,25] Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la traspuesta de A.

Solución 1B:

- a) Para que las matrices sean invertibles su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Ambas matrices son invertibles. Determinamos la matriz inversa de cada una de ellas.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Como la matriz A es simétrica se cumple que $A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^t X B = C \Rightarrow A X B = C \Rightarrow A X = C B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} C B^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X = A^{-1} C B^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15-5 & 0+0 \\ -5+10 & 0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10+0 & 0+0 \\ 5-0 & 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 2A:

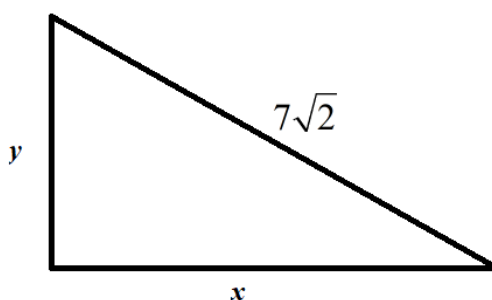
CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x y y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) [0,5] Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) [2] Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución:

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo.

$$x^2 + y^2 = (7\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 98 \Rightarrow y^2 = 98 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{98 - x^2}$$

El área del triángulo rectángulo ($f(x)$) es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$f(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{98-x^2}}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función área.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{98-x^2} + \frac{1}{2}x \frac{-2x}{2\sqrt{98-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{98-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-x^2}{2\sqrt{98-x^2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-x^2-x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-2x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}} \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}} = 0 \Rightarrow 49-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{49} = 7} \end{aligned}$$

No consideramos el valor negativo de la raíz pues se trata de la longitud.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=7$.

- En el intervalo $(0,7)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{49-1^2}{\sqrt{98-1^2}} = \frac{48}{\sqrt{97}} > 0$.

La función crece en $(0,7)$.

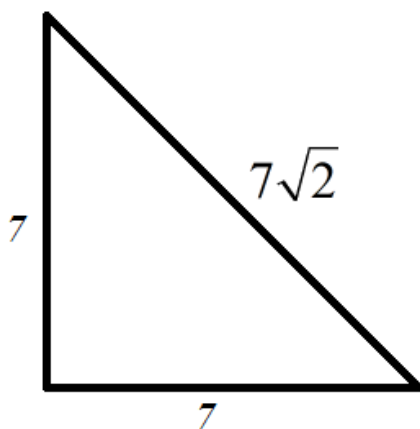
- En el intervalo $(7,7\sqrt{2})$ consideramos $x=8$ y la derivada vale

$$f'(8) = \frac{49-8^2}{\sqrt{98-8^2}} = \frac{-15\sqrt{34}}{34} < 0. \text{ La función decrece en } (7,7\sqrt{2}).$$

Como la función crece antes y decrece después de $x=7$ podemos afirmar que el área presenta un máximo relativo en dicho valor.

Para $x=7$ el valor del otro cateto es $y = \sqrt{98-7^2} = 7$. El triángulo rectángulo cumpliendo las condiciones con área máxima tiene ambos catetos iguales y de longitud 7 cm.

Este valor máximo del área es $f(7) = \frac{7 \cdot 7}{2} = 24.5$ centímetros cuadrados.



$$\text{Área} = \frac{49}{2} u^2$$

Ejercicio 2B:

2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [1] Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

Solución 2B:

a) Calculamos la integral usando las propiedades de los logaritmos.

$$\int f(x) dx = \int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \int \ln(x+1) - \ln x dx = \int \ln(x+1) dx - \int \ln x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} =$$

$$= x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx - \left[x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx - x \ln x + \int dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx - x \ln x + x =$$

$$= x + x \ln(x+1) - x \ln x - \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{-1}{x+1} dx = x + x \ln(x+1) - x \ln x - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \cancel{x} + x \ln(x+1) - x \ln x - \cancel{x} + \ln(x+1) = \boxed{(x+1) \ln(x+1) - x \ln x + C}$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x) dx = (x+1) \ln(x+1) - x \ln x + C ..$

b) Buscamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

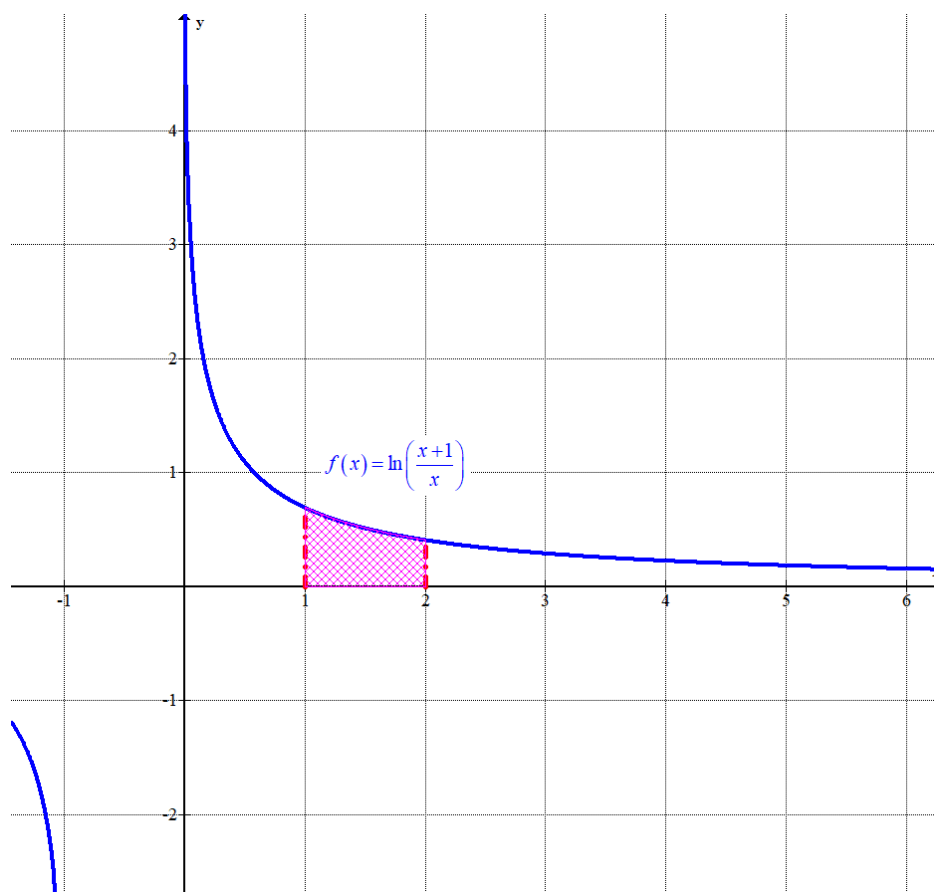
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow x+1 = x \Rightarrow \mathbf{1=0}$$

La gráfica de la función no corta el eje OX. En el intervalo $(1, 2)$ la función es positiva, pues si tomamos un valor del intervalo, por ejemplo $x=1.5$ y sustituimos tenemos que $f(1.5) = \ln\left(\frac{1.5+1}{1.5}\right) \approx 0.51 > 0$.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x \right]_1^2 = \\ &= \left[(2+1)\ln(2+1) - 2\ln 2 \right] - \left[(1+1)\ln(1+1) - 1\ln 1 \right] = \\ &= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln 3^3 - \ln 2^4 = \ln 27 - \ln 16 = \ln\left(\frac{27}{16}\right) \end{aligned}$$

Se cumple lo indicado en el ejercicio.



Ejercicio 3A:

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

- a) [0,5] Compruebe que se cruzan.
 b) [1,5] Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
 c) [0,5] Calcule la distancia entre r y s .

Solución 3A:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 5, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = (3, 1, 0) \\ Q_s(7, -5, 7) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pes tienen vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 5, 0) \\ Q_s(7, -5, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (7, -5, 7) - (1, 5, 0) = (6, -10, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (6, -10, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 30 - 6 - 21 - 0 = -57 \neq 0$$

Como el valor de este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) Hallamos el vector director de la recta t perpendicular a ambas como el producto vectorial de los vectores directores de r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3j + 0 - 3k - 0 - i = -i + 3j - 3k = (-1, 3, -3)$$

Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta r y que también tiene como vector director $\vec{w}_t$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1) - 0 - z + 0 + y - 5 + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3 - z + y - 5 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 6x + y - z - 11 = 0}$$

Hallamos la ecuación del plano π' que contiene a la recta s y que también tiene como vector director $\vec{w}_t$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (3, 1, 0) \\ Q_s(7, -5, 7) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-7 & y+5 & z-7 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 9(y+5) - z + 7 - 9(z-7) - 0 + 3(x-7) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y - 45 - z + 7 - 9z + 63 + 3x - 21 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x - 9y - 10z + 4 = 0}$$

La recta t buscada es la intersección de los dos planos $\pi: 6x + y - z - 11 = 0$ y $\pi': 3x - 9y - 10z + 4 = 0$.

$$t: \begin{cases} 6x + y - z - 11 = 0 \\ 3x - 9y - 10z + 4 = 0 \end{cases}$$

- c) Para hallar la distancia entre las dos rectas r y s que se cruzan determinamos el plano π'' que contiene a la recta r y que es paralelo a la recta s . La distancia entre las rectas r y s es el valor de la distancia de un punto de la recta s al plano π'' .

Hallamos la ecuación del plano π'' que contiene a la recta r y tiene como otro de sus vectores directores el director de la recta s . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}'' = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi'': -x + 3y - 3z + D = 0 \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + D = 0 \Rightarrow D = -14 \Rightarrow \boxed{\pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0}$$

Hallamos la distancia de $Q_s(7, -5, 7)$ al plano $\pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(7, -5, 7) \\ \pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(Q_s, \pi'') = \frac{|-7 + 3(-5) - 3 \cdot 7 - 14|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{57}{\sqrt{19}} = 3\sqrt{19}$$

La distancia entre r y s tiene un valor de $3\sqrt{19}$ unidades.

$$\mathbf{d(r, s) = 3\sqrt{19} \text{ u}}$$

Ejercicio 3B:

3B) Considere los planos $\pi_1: x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y - z = 2$

- a) [1] Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .
 b) [0,75] Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .
 c) [0,75] Calcule la proyección ortogonal de P en π_1

Solución 3B:

- a) La ecuación implícita de la recta donde se cortan los planos es $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$. Obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow y - z + y - z = 2 \Rightarrow 2y - 2z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z \Rightarrow x = 1 + z - z = 1 \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 es $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

- b) Comprobamos que el punto P no pertenece a ninguno de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \in \pi_1? \\ \pi_1: x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 + 3 = 0? \Rightarrow \textcolor{red}{2 = 0?}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \in \pi_2? \\ \pi_2: x + y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 2? \Rightarrow \textcolor{red}{0 = 2?}$$

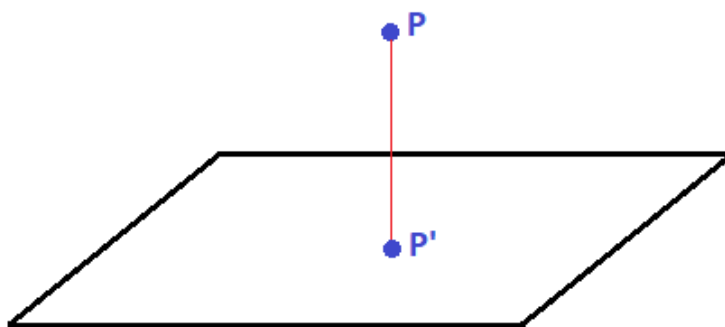
La recta s que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 es la recta paralela a la recta r que pasa por el punto P .

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (0, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

La recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 tiene ecuación $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=3+\alpha \end{cases}$

- c) Debemos hallar las coordenadas del punto P' perteneciente al plano tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea paralelo a su vector normal.



$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x-y+z=0 \\ P'(a,b,c) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow a-b+c=0 \Rightarrow a=b-c \Rightarrow P'(b-c, b, c)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (b-c, b, c) - (1, 2, 3) = (b-c-1, b-2, c-3)$$

$$\pi_1: x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \frac{b-c-1}{1} = \frac{b-2}{-1} = \frac{c-3}{1} \Rightarrow b-c-1 = 2-b = c-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-c-1 = 2-b \\ 2-b = c-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = c+3 \\ 5-b = c \end{cases} \Rightarrow 2b = 5-b+3 \Rightarrow 3b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow a = \frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

La proyección ortogonal de P en π_1 tiene coordenadas $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Ejercicio 4ª:**CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):**

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- a) [0,5] Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- b) [0,5] Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- c) [0,5] Salga una bola verde en U_2 .
- d) [0,5] Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

Solución 4A:

- a) Si sale roja de la urna U_1 entonces la urna U_2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U_2 es de $\frac{7}{10} = 0.7$.
- b) Si sale roja de la urna U_1 entonces la urna U_2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U_2 es de $\frac{3}{10} = 0.3$.
- c) Aplicamos el teorema de la probabilidad total. Sumamos las probabilidades de sacar verde en urna U_2 sacando previamente de la urna U_1 una bola roja y la probabilidad de sacar verde en urna U_2 sacando previamente de la urna U_1 una bola verde.

$$P(V_2) = P(V_1)P(V_2 / V_1) + P(R_1)P(V_2 / R_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \boxed{0.36}$$

- d) Nos piden calcular $P(R_1 / R_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R_1 / R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1)P(R_2 / R_1)}{1 - P(V_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}}{1 - 0.36} = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Ejercicio 4B:

- 4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.
- a) [1] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
- b) [1,5] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

Solución 4B:

- a) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 10$ y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. $X = B(10, 0.98)$.

Existen 10 repeticiones del experimento “ver si la pieza está en buen estado” y cada repetición es independiente de las demás.

La media es $n \cdot p = 10 \cdot 0.98 = 9.8$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.98 \cdot 0.02} \approx 0.4427$.

Para que haya exactamente 1 pieza defectuosa debe haber 9 piezas en buen estado. Debemos calcular $P(X = 9)$.

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} 0.98^9 \cdot 0.02^1 = 10 \cdot 0.98^9 \cdot 0.02 \approx \boxed{0.16667}$$

La probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa en un lote de 10 piezas vale 0.16667

- b) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 2000$ y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. $X = B(2000, 0.98)$.

Para el cálculo de probabilidades dado el elevado número de elementos de la muestra aproximamos la distribución binomial a una normal Y , siendo su media $\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0.98 = 1960$ y su desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0.98 \cdot 0.02} \approx 6.26$. $Y = N(1960, 6.26)$.

Esta aproximación es buena pues $n \cdot p = 1960 > 5$ y $n \cdot q = 2000 \cdot 0.02 = 40 > 5$.

Para que haya menos de 50 piezas defectuosas debe de haber más de 1950 piezas en buen estado. Nos piden calcular $P(X > 1950)$.

$$P(X > 1950) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 1950.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1950.5 - 1960}{6.26}\right) = P(Z \geq -1.52) = P(Z \leq 1.52) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9357}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.512
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.551
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.629
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.666
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.701
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.735
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.767
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.796
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.823
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.848
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.870
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.890
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.908
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.923
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.948

La probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas en un lote de 2 000 piezas vale 0.9357.

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024–2025 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
---	--	---

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

- a) [1] Discute el sistema en función del parámetro k .
- b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
- c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

- a) [0,75] Demuestre que $(A + I)^2 = 2A + I$ y que $(A + I)^3 = 3A + I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) [0,75] Demuestre que la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.
- c) [1] Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A .

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) [0,5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5}$

c) [1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

2B) Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$.

- a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$
- b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.
- c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : x + y + 3z = 0$.

a) [1] Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π .

b) [0,75] Halle dicho punto.

c) [0,75] Calcule la distancia que debe recorrer.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

a) [1] Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.

b) [0,5] Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.

c) [1] Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

a) [0,5] Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.

b) [0,75] Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.

c) [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.

d) [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

- a) [1] Discute el sistema en función del parámetro k .
 b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
 c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

Solución 1A:

a) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = \cancel{1} + k + 2k - 2 - \cancel{1} - k^2 = -k^2 + 3k - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 3k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = k \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = k \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 1$ y $k \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el

de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $k=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el

de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) El sistema es compatible indeterminado para $k = 2$. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = -1 - 2z \end{cases} \Rightarrow x - 1 - 2z + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 + z \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

- c) Resolvemos el sistema para valores $k \neq 1$ y $k \neq 2$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +2y & +kz & = 2 \\ -2x & -2y & -2z & = -2 \\ \hline & & (k-2)z & = 0 \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} x & +ky & +3z & = 0 \\ -x & -y & -z & = -1 \\ \hline & (k-1)y & +2z & = -1 \end{array} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (k-2)z = 0 \Rightarrow \{k-2 \neq 0\} \Rightarrow \\ (k-1)y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \boxed{z = 0} \\ (k-1)y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 0 = 1 \\ (k-1)y + 2 \cdot 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (k-1)y = -1 \Rightarrow \{k-1 \neq 0\} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \boxed{y = \frac{1}{1-k}} \end{cases} \Rightarrow x + \frac{1}{1-k} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{1-k} = \frac{1-k-1}{1-k} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k}{k-1}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{k}{k-1}$, $y = \frac{1}{1-k}$, $z = 0$, para cualquier valor de k distinto de 1 y 2.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B:

- 1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).
- a) [0,75] Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) [0,75] Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.
- c) [1] Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A .

Solución:

- a) Demostramos la igualdad $(A+I)^2 = 2A+I$.

$$(A+I)^2 = (A+I)(A+I) = A^2 + A \cdot I + I \cdot A + I \cdot I = O + 2A + I = 2A + I$$

- Demostramos la igualdad $(A+I)^3 = 3A+I$.

$$(A+I)^3 = (A+I)^2 (A+I) = (2A+I)(A+I) = 2A^2 + 2A + A + I \cdot I = 2O + 3A + I = 3A + I$$

- b) Realizamos el producto $(I-A)(I+A)$ y comprobamos que se obtiene como resultado la matriz identidad.

$$(I-A)(I+A) = I \cdot I + I \cdot A - A \cdot I - A^2 = I + A - A - O = I$$

Se cumple que el producto da como resultado la matriz identidad y la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

- c) Resolvemos la ecuación matricial $X+AX=A$.

$$X+AX=A \Rightarrow X(I+A)=A \Rightarrow X(I+A)(I-A)=A(I-A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \cdot I = A - A^2 \Rightarrow X = A - O \Rightarrow \boxed{X=A}$$

Ejercicio 2A:

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right)$

b) [0,5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5}$

c) [1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

Solución:

a) Calculamos el primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right) &= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{\operatorname{sen}(0^+)} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = +\infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x \operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(0) - 0}{0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)} = \frac{\cos(0) - 1}{\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)} = \frac{-\operatorname{sen}(0)}{\cos(0) + \cos(0) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

b) Calculamos el segundo límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}}}{18x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{36x\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{9\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

c) Calculamos el tercer límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = (+\infty)(e^{1/\infty} - 1) = (+\infty)(e^0 - 1) = (+\infty)(0) =$$

$$= \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{1/\infty} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^{1/\infty} = e^0 = \boxed{1}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B:

2B) Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

Solución:

a) Calculamos la integral utilizando equivalencias trigonométricas y realizando un cambio de variable.

$$\int f(x) dx = \int \operatorname{tg}^3(x) dx = \int \operatorname{tg}^2(x) \operatorname{tg}(x) dx = \dots$$

$$\operatorname{tg}^2(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

$$\dots = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \operatorname{tg}(x) dx - \int \operatorname{tg}(x) dx = \dots$$

$$\begin{aligned} 1^a \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)} \operatorname{tg}(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}(x) \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} \\ 2^a \rightarrow \int \operatorname{tg}(x) dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\operatorname{sen}(x) dx \rightarrow \frac{dt}{-\operatorname{sen}(x)} = dx \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{t} \frac{dt}{-\operatorname{sen}(x)} = - \int \frac{1}{t} dt = -\ln t = -\ln |\cos(x)| \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} - (-\ln |\cos(x)|) = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln |\cos(x)| + C$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x) dx = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C.$

b) La función tangente no se anula entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y además es una función positiva.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida de la función entre estos dos valores.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/4} f(x) dx = \left[\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \left[\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \right] - \left[\frac{\operatorname{tg}^2(0)}{2} + \ln|\cos(0)| \right] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \ln 1 = \\ &= \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} - \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)} \end{aligned}$$

c) Comprobamos si el valor obtenido $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ es igual a $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

Es cierta la igualdad y el valor del área se puede expresar como $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

Ejercicio 3A:**CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):**

3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

Solución:

a) Para que el plano contenga a la recta debe contener a todos los puntos de la recta.

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = x + 2y \end{cases} \Rightarrow x + y + x + 2y = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y + 2y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow A_r(-1, 1, 1)$$

$$\lambda = -1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow B_r(2, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + y + az = b \\ A_r(-1, 1, 1) \in \pi \\ B_r(2, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 1 + a = b \\ 4 - 1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + a = b \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = -1 + a \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 3$.

b) La recta corta al plano cuando el vector director de la recta no es perpendicular al vector normal del plano. Para ello el producto escalar de ambos vectores no debe ser cero.

$$\begin{aligned}
 &\pi : 2x + y + az = b \rightarrow \vec{n} = (2, 1, a) \\
 &r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \left(\frac{-3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, a) \cdot \left(\frac{-3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) = -3 + 1 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - 2 \\
 &\vec{n} \cdot \vec{v}_r \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - 2 \neq 0 \Rightarrow a - 4 \neq 0 \Rightarrow \boxed{a \neq 4}
 \end{aligned}$$

Para cualquier valor de a distinto de 4 la recta corta el plano.

Para $a = 0$ y $b = 7$ la recta corta al plano en un punto P ($a \neq 4$). Determinamos las coordenadas de ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 &\pi : 2x + y = 7 \\
 &r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) + \lambda = 7 \Rightarrow 1 - 3\lambda + \lambda = 7 \Rightarrow -2\lambda = 6 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(-3) = 5 \\ y = -3 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(5, -3, -1)}$$

La recta corta al plano en el punto $P(5, -3, -1)$.

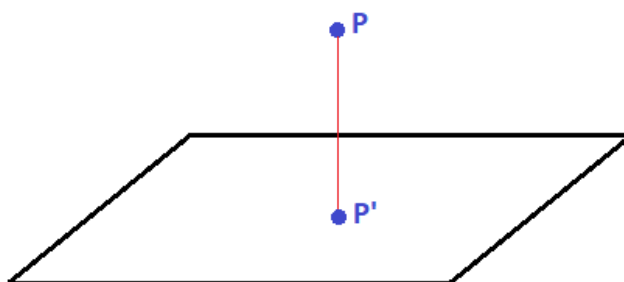
BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3B:

- 3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : x + y + 3z = 0$.
- a) [1] Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π .
- b) [0,75] Halle dicho punto.
- c) [0,75] Calcule la distancia que debe recorrer.

Solución:

- a) Debemos calcular la proyección ortogonal del punto P en el plano.
Hallamos la trayectoria que es la recta perpendicular al plano que pasa por P. Al ser ortogonal al plano el vector director de la recta es el vector normal del plano.



$$\pi : x + y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$$

La ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que sigue el helicóptero para llegar al punto más cercano a π es:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$$

- b) El punto P' al que llega el helicóptero lo determinamos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}$$

$$\pi: x+y+3z=0 \quad \left. \begin{matrix} r: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3(1+3\alpha)=0 \Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3+9\alpha=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{11} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11} \\ y=2-\frac{6}{11}=\frac{16}{11} \\ z=1-\frac{18}{11}=\frac{-7}{11} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right)$$

El punto donde aterriza el helicóptero tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right)$.

c) La distancia que debe recorrer es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\left. \begin{matrix} P'\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right) \\ P(1, 2, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right) - (1, 2, 1) = \left(\frac{-6}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-18}{11}\right)$$

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-18}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{396}{121}} = \frac{6\sqrt{11}}{11} \approx 1.8 \text{ unidades}$$

$$\mathbf{d(P, P') = 1.8 \text{ u}}$$

Ejercicio 4ª:**CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):**

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) [1] Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
 b) [0,5] Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
 c) [1] Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

Solución:

Ponemos estos datos en una tabla para obtener la información implícita y tener más cómodo acceso a toda la información.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$		240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$		180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$		80
TOTALES			

Completamos la tabla.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$	144	240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$	90	180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$	8	80
TOTALES	258	242	500

- a) De los 500 espectadores le gustó la película a 258. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al espectador elegido al azar le guste la película vale $\frac{258}{500} = 0.516$.
- b) A los espectadores de la sala S3 le ha gustado la película al 90%. La probabilidad de que al elegir un espectador de la sala S3 le guste la película vale 0.9.
- c) La película le ha gustado a 258 espectadores y de estos solo 72 estuvieron en la sala S3. La probabilidad de que el espectador al que le ha gustado la película haya estado en la sala S3 vale $\frac{72}{258} = \frac{12}{43} \approx 0.28$

Ejercicio 4B:

- 4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.
- [0,5] Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
 - [0,75] Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
 - [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
 - [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

Solución:

- a) Denominamos X = el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 280$ y p = probabilidad de que un pasajero se presente = 0.95. $X = B(280, 0.95)$.
Existen 280 repeticiones del experimento “el pasajero se presenta” y cada repetición es independiente de las demás.

La media es $n \cdot p = 280 \cdot 0.95 = 266$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{280 \cdot 0.95 \cdot 0.05} \approx 3.647$.

Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media 266 y desviación típica 3.647. $Y = N(266, 3.647)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 266 > 5$ y $nq = 280 \cdot 0.05 = 14 > 5$.

- b) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten 261 pasajeros o más. Determinamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X \geq 261) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 260.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(Z \geq -1.51) = P(Z \leq 1.51) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9345}$$

z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9309	0.9345	0.9

La probabilidad de que falten plazas en el avión es de 0.9345.

c) La probabilidad pedida es la del suceso contrario al suceso “faltan plazas en el avión”. La probabilidad de que no falten vale $1 - 0.9345 = 0.0655$.

d) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten exactamente 260 pasajeros.

$$\begin{aligned}
 P(X = 260) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(259.5 \leq Y \leq 260.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(\frac{259.5 - 266}{3.647} \leq Z \leq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(-1.78 \leq Z \leq -1.51) = \\
 &= P(Z \leq -1.51) - P(Z \leq -1.78) = P(Z \geq 1.51) - P(Z \geq 1.78) = \\
 &= [1 - P(Z \leq 1.51)] - [1 - P(Z \leq 1.78)] = P(Z \leq 1.78) - P(Z \leq 1.51) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9625 - 0.9345 = \boxed{0.028}
 \end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625

La probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión es de 0.028.