

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

NAVARRA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano



VÍDEOS

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBFccP66b44M

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DG8LlfgQwYew

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.

Problema P1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Problema P2:

P2) Siendo $p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$) es: (1.25 puntos)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Problema A1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9 \\ (3m - m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema A2:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema B1:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Problema B2:

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, 4, 2)$ y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto $P(6, -4, -4)$.

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A . (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Problema C1:

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$.

a) Demuestra que f es continua en $[2, 3]$. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Problema C2:

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema P1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Solución:

Llamamos “ x ” al número de máquinas que se usan.

Como 1 máquina tarda 80 horas, con 2 máquinas tardaremos $\frac{90}{2} = 45$ horas y si utilizamos “ x ”

máquinas tardaremos $\frac{90}{x}$ horas en realizar el trabajo.

Hallamos la expresión de la función gasto $G(x)$ que depende del número de máquinas en uso. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de

otros 5 euros por cada hora de uso $\rightarrow G(x) = 10x + 5 \frac{80}{x} x = 10x + 400$.

Hay que sumarle el gasto del operario que cobra 18 euros por hora.

$$G(x) = 10x + 400 + 18 \frac{80}{x} = \frac{1440}{x} + 10x + 400$$

Hallamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$G(x) = \frac{1440}{x} + 10x + 400 \Rightarrow G'(x) = \frac{-1440}{x^2} + 10$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1440}{x^2} + 10 = 0 \Rightarrow \frac{1440}{x^2} = 10 \Rightarrow 1440 = 10x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1440}{10} = 144 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{144} = 12}$$

Como estamos hablando de número de máquinas no nos sirve el valor negativo de la raíz. Sustituimos $x = 12$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$G'(x) = \frac{-1440}{x^2} + 10 = -1440x^{-2} + 10 \Rightarrow G''(x) = 2880x^{-3} = \frac{2880}{x^3} \Rightarrow G''(12) = \frac{2880}{12^3} > 0$$

Como la segunda derivada toma valor positivo podemos afirmar que en $x = 12$ hay un mínimo relativo de la función gasto.

Con 12 máquinas se consigue un mínimo gasto.

Problema P2:

P2) Siendo $p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo.

(1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$) es: (1.25 puntos)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Solución:

a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \Rightarrow \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 \right]$$

$$p'(t) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot t = 0 \rightarrow \boxed{t=0} \\ \frac{\pi}{2} \cdot t = \pi \rightarrow \boxed{t=2} \end{cases} \\ 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 = 0 \rightarrow 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 1 \rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot t = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \rightarrow \boxed{t = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.60817} \end{cases}$$

Tenemos dos extremos relativos. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en estos dos valores y determinamos los valores máximo y mínimo del precio.

$$\left. \begin{aligned} p(0) &= 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0.15 \\ p(0.60817) &= 0.15 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5349 \\ p(1) &= 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = 0.15 \end{aligned} \right\}$$

El valor máximo se produce en $t = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.60817$ y el mínimo se produce en $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

b) Calculamos lo pedido.

$$\bar{p} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 p(t) dt = \int_0^1 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt &= 0.15t + \int \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = x \rightarrow dx = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \frac{2}{\pi} dx \end{array} \right\} = \\ &= 0.15t + \int \frac{2}{\pi} x^2 dx = 0.15t + \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} = 0.15t + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + C \end{aligned}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_0^1 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \left[0.15t + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right]_0^1 = \\ &= \left[0.15 \cdot 1 + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \right] - \left[0.15 \cdot 0 + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \right] = 0.15 + \frac{2}{3\pi} = 0.3622 \end{aligned}$$

El precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ es de 0.3622 por kilowatio/hora

Problema A1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9 \\ (3m - m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m \\ m^2 - 3m & 3 & 3m \\ 3m - m^2 & m & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ m^2 - 3m & 3 & 3m & m + 9 \\ 3m - m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ m^2 - 3m & 3 & 3m & m + 9 \\ 3m - m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ m^2 - 3m \quad 3 \quad 3m \quad m + 9 \\ -m^2 + 3m \quad m \quad -2m \quad -3 \\ \hline 0 \quad 3 + m \quad m \quad m + 6 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 1}^a \\ 3m - m^2 \quad m \quad -m \quad 0 \\ m^2 - 3m \quad -m \quad 2m \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m \quad 3 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3 + m & m & m + 6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m \\ 0 & 3 + m & m \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m(3 + m)(m^2 - 3m) = m(3 + m)m(m - 3) =$$

$$= m^2(3 + m)(m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3 + m = 0 \rightarrow m = -3 \\ m - 3 = 0 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -3$, $m = 0$ y cuando $m = 3$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} m^2-3m & -m & 2m & 3 & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 & \\ 0 & 0 & m & 3 & \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2mz = 3 \\ (3+m)y + mz = m+6 \\ mz = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \{m \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2mz = 3 \\ (3+m)y + mz = m+6 \\ \boxed{z = \frac{3}{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2m \frac{3}{m} = 3 \\ (3+m)y + m \frac{3}{m} = m+6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 6 = 3 \\ (3+m)y + 3 = m+6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my = -3 \\ (3+m)y = m+3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m+3 \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my = -3 \\ \boxed{y = \frac{m+3}{m+3} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow (m^2-3m)x - m = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-3m)x = m-3 \Rightarrow \{m^2-3m \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m-3}{m^2-3m} = \frac{m-3}{m(m-3)} = \frac{1}{m}}$$

La solución es $x = \frac{1}{m}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{m}$

CASO 2. $m = 0$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{0 \ 0 \ 0}^{A/B} & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0}_A & 3 & 3 \end{array} \right)$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada es 2. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

CASO 3. $m = 3$

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{0 \ -3 \ 6}^{A/B} & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 & \\ \underbrace{0 \ 0 \ 3}_A & 3 & 3 \end{array} \right)$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ -3 \ 6 \ 3}^{A/B} & -3y+6z=3 \\ 0 \ 6 \ 3 \ 9 & 6y+3z=9 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 3 \ 3}_A & 3z=3 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y+6z=3 \\ 6y+3z=9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y+6z=3 \\ 6y+3z=9 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y+6=3 \\ 6y+3=9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y=-3 \\ 6y=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$.

CASO 4. $m=-3$

La matriz ampliada queda

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & 18x+3y-6z=3 \\ 0 \ 0 \ -3 \ 3 & -3z=3 \\ \underbrace{0 \ 0 \ -3 \ 3}_A & -3z=3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 \ 0 \ -3 \ 3 & -3z=3 \\ 0 \ 0 \ 3 \ -3 & -3z=3 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 & \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & 18x+3y-6z=3 \\ 0 \ 0 \ -3 \ 3 & -3z=3 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A & 0=0 \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & 18x+3y-6z=3 \\ 0 \ 0 \ -3 \ 3 & -3z=3 \\ \underbrace{0 \ 0 \ -3 \ 3}_A & -3z=3 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x+3y-6z=3 \\ -3z=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x+3y-6z=3 \\ -3z=3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x+3y-6z=3 \\ \boxed{z=\frac{3}{-3}=-1} \end{array} \right\} \Rightarrow 18x+3y+6=3 \Rightarrow 18x+3y=-3 \Rightarrow 6x+y=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1-6x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$.

Resumiendo: Si $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$x = \frac{1}{m}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{m}$, si $m = -3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus

soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$, si $m = 0$ el sistema es incompatible y si $m = 3$ el sistema es

compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$.

Problema A2:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Solución:

Simplificamos la matriz C.

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1} = 2 \cdot (A \cdot B^t)(A \cdot B^t) \cdot (B^t)^{-1} = \\ &= 2 \cdot A \cdot B^t \cdot A \cdot B^t \cdot (B^t)^{-1} = \left\{ B^t \cdot (B^t)^{-1} = Id \right\} = 2 \cdot A \cdot B^t \cdot A \end{aligned}$$

Calculamos el determinante de C.

$$|C| = |2 \cdot A \cdot B^t \cdot A| = \left\{ \begin{array}{l} A \cdot B^t \cdot A \text{ es} \\ \text{una matriz } 3 \times 3 \end{array} \right\} = 2^3 |A \cdot B^t \cdot A| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinante de un} \\ \text{producto de matrices es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 8 \cdot |A| \cdot |B^t| \cdot |A| = \left\{ |B^t| = |B| \right\} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot |B| \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Problema B1:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Solución:

Debemos buscar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s tales que los puntos A, B y P estén alineados.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, -2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha)}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x = 3z + 8 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3z} + 8 + y - \cancel{3z} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \frac{3}{2}\lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right)}$$

Para que los puntos A, B y P estén alineados los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} A(-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha) \\ B\left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right) \\ P(2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = P(2, 0, -1) - (-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha) = (3 - 2\alpha, -\alpha, 1 - \alpha) \\ \overrightarrow{BP} = P(2, 0, -1) - \left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right) = \left(-2 - \frac{3}{2}\lambda, 2, -1 - \lambda\right) \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP} \Rightarrow \frac{3 - 2\alpha}{-2 - \frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha}{-1 - \lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2\alpha}{-2 - \frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} \rightarrow 6 - 4\alpha = 2\alpha + \frac{3}{2}\alpha\lambda \\ \frac{-\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha}{-1 - \lambda} \rightarrow \alpha + \alpha\lambda = 2 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - 6\alpha = \frac{3}{2}\alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 12\alpha = 3\alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4\alpha = \alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha + 4 - 4\alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} A(3, 2, 0) \\ 6 + 2\lambda = 2 \rightarrow 2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow B(1, -2, -2) \end{cases}$$

Hallamos la recta que pasa por A, B y P.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, 2, 0) \in t \\ B(1, -2, -2) \in t \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -2, -2) - (3, 2, 0) = (-2, -4, -2) \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

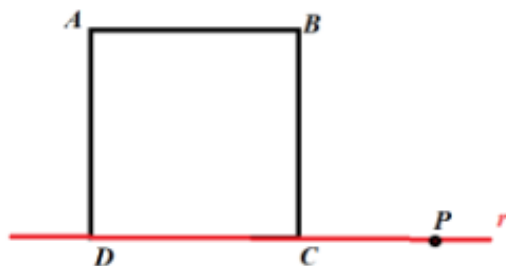
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{w_t} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{-1}{2} (-2, -4, -2) = (1, 2, 1) \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}}$$

La ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P y corta a las rectas r y s es

$$t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Problema B2:

- B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, 4, 2)$ y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto $P(6, -4, -4)$.
- (a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)
- (b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)
- (c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Solución:

- (a) Hallamos el vector $\overline{AB}$ que será el vector director de la recta r que contiene los puntos C y D.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, -1) \\ B(1, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1, 4, 2) - (1, 0, -1) = (0, 4, 3)$$

Hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos C y D.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ P(6, -4, -4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

- (b) El plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A tiene como vector normal $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ A(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: 4y + 3z + D = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 4y + 3z + D = 0 \\ A(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi: 4y + 3z + 3 = 0}$$

- (c) El punto de corte de la recta y el plano es el vértice D del cuadrado.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi: 4y + 3z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-4 + 4\lambda) + 3(-4 + 3\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow -16 + 16\lambda - 12 + 9\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\lambda - 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4 = 0 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(6, 0, -1)$$

Tenemos que $D(6, 0, -1)$. El vértice C lo hallamos sumando al punto D el vector $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ D(6, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow C = D + \overline{AB} = (6, 0, -1) + (0, 4, 3) = (6, 4, 2)$$

El cuarto vértice del cuadrado es $C(6, 4, 2)$.

Problema C1:

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$.

- a) Demuestra que f es continua en $[2, 3]$. (0,75 puntos)
 b) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Solución:

- a) Para que sea continua debe ser $x^2 + x - 5 > 0$.

$$x \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 3^2 \Rightarrow 2^2 + 2 \leq x^2 + x \leq 3^2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 + 2 - 5 \leq x^2 + x - 5 \leq 3^2 + 3 - 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 + x - 5 \leq 7$$

Por lo que existe el logaritmo neperiano y la función es un producto de funciones continuas en el intervalo $[2, 3]$ y por tanto continua en dicho intervalo.

- b) Vamos a comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Rolle.

La función es continua en $[2, 3]$.

Tenemos que $f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \cdot \ln(2^2 + 2 - 5) = \cos(\pi) \ln 1 = -1 \cdot 0 = 0$ y

$$f(3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) \cdot \ln(3^2 + 3 - 5) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ln 7 = 0 \cdot \ln 7 = 0, \text{ por lo que } f(2) = f(3).$$

La función es derivable, siendo su derivada

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x - 5}.$$

Esta derivada no plantea ningún problema en el intervalo $(2, 3)$ pues $x^2 + x - 5 > 0$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$ en el intervalo $[2, 3]$ y afirmar que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

Problema C2:

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2-4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

(2,5 puntos)

Solución:

Estudiamos la simetría.

$$f(-x) = \frac{3(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-3x^3}{x^2-4} = -\frac{3x^3}{x^2-4} = -f(x)$$

La función es impar.

Estudiamos sus asíntotas.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4} = \frac{-24}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2-4} = \frac{24}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3-4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3}{x^2-4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x(x^2-4)}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x} = \frac{12}{\infty} = 0$$

La recta $y = 3x$ es asíntota oblicua de la función.

Estudiamos la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

$x = -2$ es asíntota vertical.

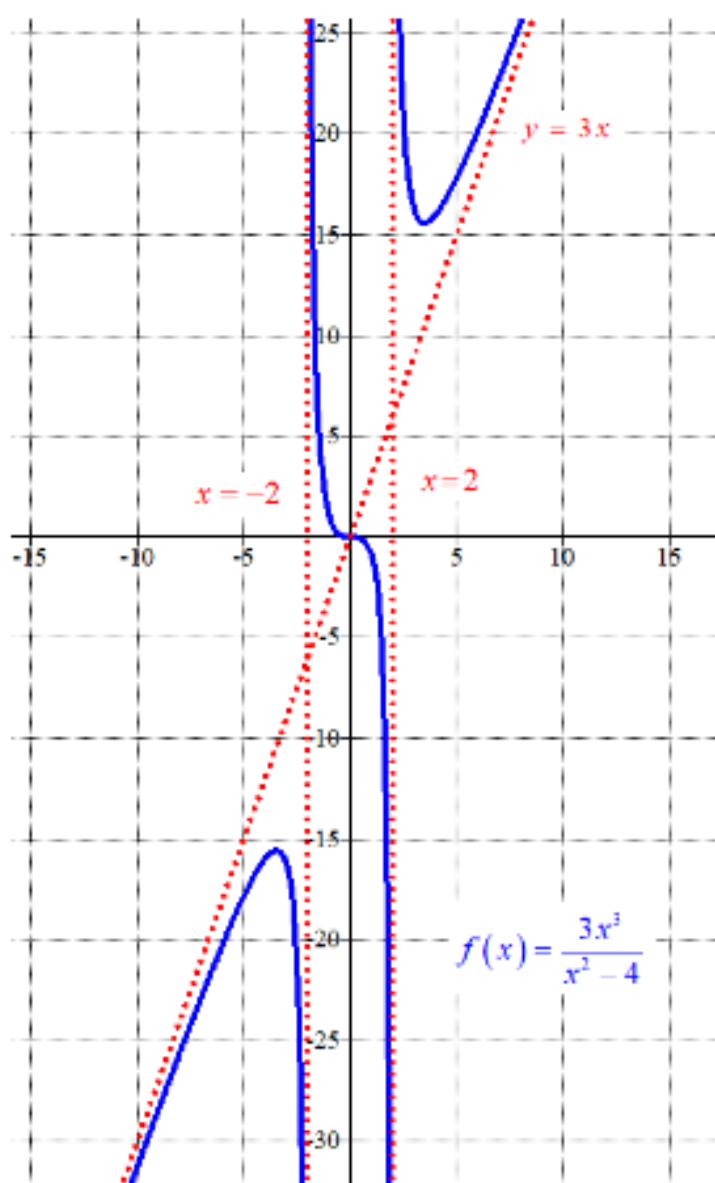
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-24}{0^-} = +\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 - 4} = \frac{24}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 - 4} = \frac{24}{0^+} = +\infty$$

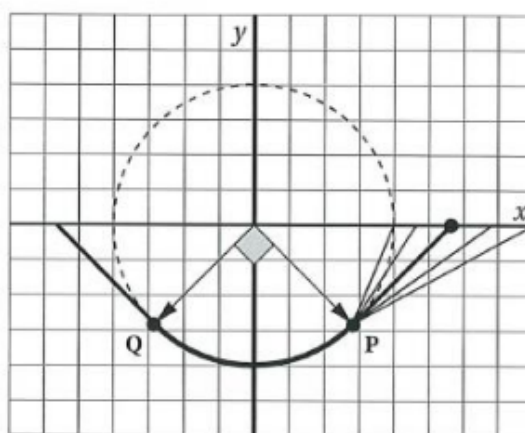
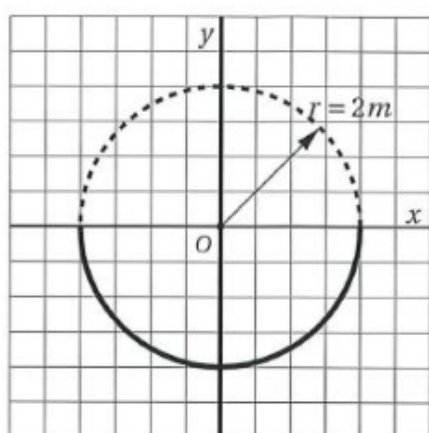


Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema P1:

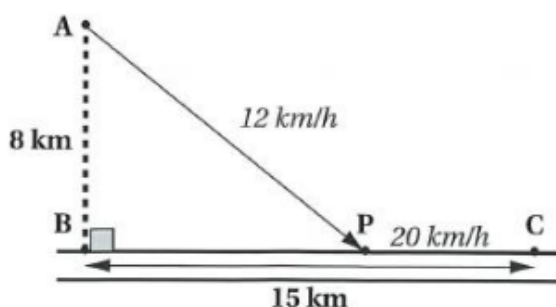
P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



- (a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)
- (b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

Problema P2:

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



Problema A:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema B:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo:

(2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3, 3, 5)$ y $B(1, -1, 1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$.

(2,5 puntos)

Problema C:

C1) Sea $f(x) = e^{x \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$.

(a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado.

(1,25 puntos)

(b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f'(d) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado.

(1,25 puntos)

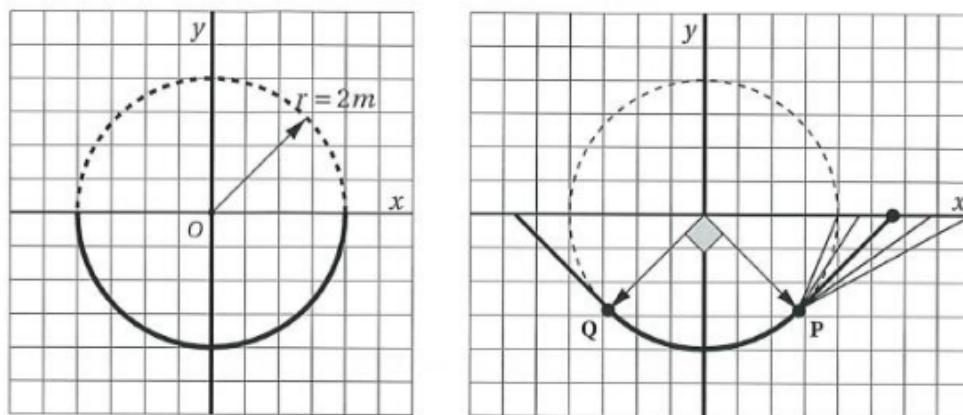
C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema P1:

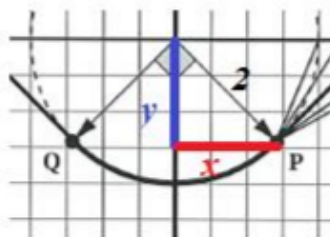
P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



- (a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)
- (b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

Solución:

- (a) Si el ángulo QOP es de 90° y la figura es simétrica el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al eje OY es de la mitad de 90° : $(\overrightarrow{OP}, OY) = 45^\circ$, por lo que las coordenadas del punto P son $P(x, -x)$.



Como P está en la circunferencia debe cumplir la ecuación que la define $x^2 + y^2 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ P(x, -x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$$

Las coordenadas del punto P son $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y las del punto Q son $Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(b) Para que la trayectoria no se vea alterada la recta debe ser tangente a la curva.

La curva tiene ecuación $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}$. Tomamos la raíz negativa pues la función es negativa.

Hallamos la tangente a la función en $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ en $x = \sqrt{2}$.

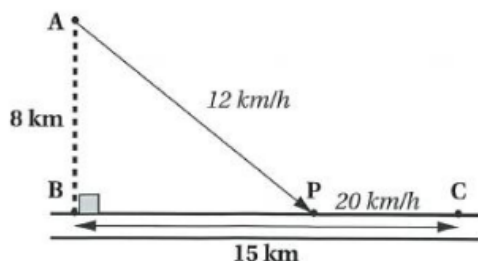
$$f(x) = -\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = -\sqrt{4 - 2} = -\sqrt{2} \\ f'(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ y - f(\sqrt{2}) &= f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + \sqrt{2} = 1(x - \sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = x - 2\sqrt{2}}$$

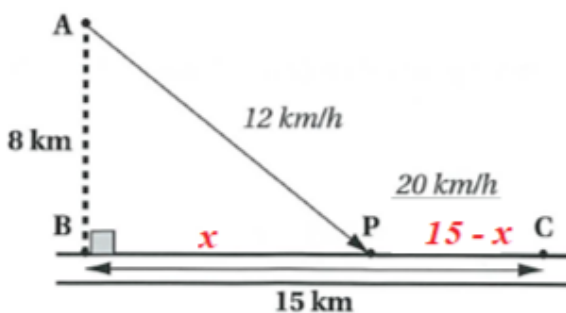
La recta que pasa por el punto P y cumple lo pedido es la recta tangente al círculo y que pasa por P, que tiene ecuación $y = x - 2\sqrt{2}$.

Problema P2:

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



Completamos el dibujo para establecer la función tiempo total en hacer el recorrido en función.



La distancia de A a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 8 y "x".

$$\overline{AP}^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{64 + x^2}$$

Esta distancia la recorre a 12 km/h por lo que tarda en recorrerla $\frac{\sqrt{64 + x^2}}{12}$ horas.

Solo consideramos el valor positivo de la raíz pues estamos trabajando con una distancia que debe ser positiva. Y menor o igual a 15.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

Antes de $x=6$ tomamos $x=5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5}{12\sqrt{64+5^2}} - \frac{1}{20} = -0.005 < 0$.

Después de $x=6$ tomamos $x=7$ y la derivada vale $f'(7) = \frac{7}{12\sqrt{64+7^2}} - \frac{1}{20} = 0.005 > 0$.

La función decrece antes de $x=6$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo para este valor.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para decidir donde se sitúa el valor mínimo absoluto.

$$f(0) = \frac{1}{12}\sqrt{64+0^2} + \frac{15-0}{20} = \frac{8}{12} + \frac{15}{20} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

$$f(6) = \frac{1}{12}\sqrt{64+6^2} + \frac{15-6}{20} = \frac{10}{12} + \frac{9}{20} = \frac{77}{60} \approx 1.283 \text{ mínimo absoluto}$$

$$f(15) = \frac{1}{12}\sqrt{64+15^2} + \frac{15-15}{20} = \frac{8}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

La distancia de P a C vale $15-x$. Se tarda en recorrerla $\frac{15-x}{20}$.

El tiempo que tarda en ir de A a C pasando por P es la suma de los dos tiempos obtenidos.

$$f(x) = \frac{\sqrt{64+x^2}}{12} + \frac{15-x}{20}, \quad x \in [0,15]$$

Derivamos la función obtenida y obtenemos sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{12}\sqrt{64+x^2} + \frac{15-x}{20} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12} \frac{2x}{2\sqrt{64+x^2}} + \frac{-1}{20} = \frac{x}{12\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{20} = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64+x^2}} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20x = 12\sqrt{64+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}x = \sqrt{64+x^2} \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 64+x^2 \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{36} = 6}$$

La distancia pedida es de 6 km.

Problema A:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Solución A1:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ m - m^2 \quad -(2m + 1) \quad m + 2 \quad 2m + 2 \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m + 2 \quad 2m + 4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ -m^2 + m \quad -m - 2 \quad 1 \quad -1 + m^2 \\ \hline 0 \quad m - 1 \quad 1 \quad m^2 + 1 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ 0 & m - 1 & 1 \\ 0 & 0 & m + 2 \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)(m^2 - m) = (m + 2)(m - 1)m(m - 1) =$$

$$= m(m + 2)(m - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 2 = 0 \rightarrow m = -2 \\ m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -2$, $m = 0$ y cuando $m = 1$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ (m + 2)z = 2(m + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \{m + 2 \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ z = \frac{2(m + 2)}{m + 2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - 2 = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + 2 = m^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ (m - 1)y = m^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \{m - 1 \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ y = \frac{m^2 - 1}{m - 1} = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1} = m + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x + (m + 2)(m + 1) = 3 - m^2 \Rightarrow (m^2 - m)x + m^2 + 2 + m + 2m = 3 - m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x = 1 - 3m - 2m^2 \Rightarrow \{m(m - 1) \neq 0\} \Rightarrow x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}$$

La solución es $x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}$, $y = m + 1$, $z = 2$.

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} A/B & & & \\ \hline 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m = 1$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} A/B & & & \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} A/B & & & \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y - z = 0 \\ z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$.

CASO 4. $m = -2$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de

A/B. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{6 \ 0 \ -1}^{A/B} & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x - z = -3 \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3 = z \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 6x + 3 = 5 \Rightarrow 6x - 2 = 3y \Rightarrow y = -\frac{2}{3} + 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

Resumiendo: Si $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}, y = m + 1, z = 2 .$$

Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} , \\ z = 2 \end{cases}$

Si $m = 0$ el sistema es incompatible.

Si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

Solución A2:

Como no tenemos las matrices A ni B solo podemos utilizar las propiedades de los determinantes para determinar el valor de $|C|$.

$$\begin{aligned} |C| &= \left| 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1} \right| = 3^3 \left| (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1} \right| = 3^3 \left| (A^t)^2 \right| \cdot \left| (A \cdot B)^{-1} \right| = \\ &= 27 \cdot |A^t|^2 \cdot \frac{1}{|A \cdot B|} = 27 \cdot |A|^2 \cdot \frac{1}{|A| \cdot |B|} = \frac{27 \cdot |A| \cdot |A|}{|A| \cdot |B|} = \frac{27|A|}{|B|} = \frac{27 \cdot \frac{1}{3}}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3} \end{aligned}$$

He utilizado varias propiedades de los determinantes.

1. Si M es una matriz 3×3 entonces $\text{Det}(3M) = 3^3 \text{Det}(M)$.
2. Si M y N son dos matrices entonces $\text{Det}(M \cdot N) = \text{Det}(M) \cdot \text{Det}(N)$.
3. Si M es una matriz entonces $\text{Det}(M^t) = \text{Det}(M)$.
4. Si M es una matriz invertible entonces $\text{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(M)}$.

Problema B:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)

Solución B1:

Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x=3-z \end{cases} \Rightarrow 3-z+y-2z-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 7+3z \Rightarrow r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=7+3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=4-\alpha \\ y=-1+\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-\alpha \end{cases}$$

Debemos determinar la posición relativa de las dos rectas.

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(3, 7, 0) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (4, -1, 0) - (3, 7, 0) = (1, -8, 0)$$

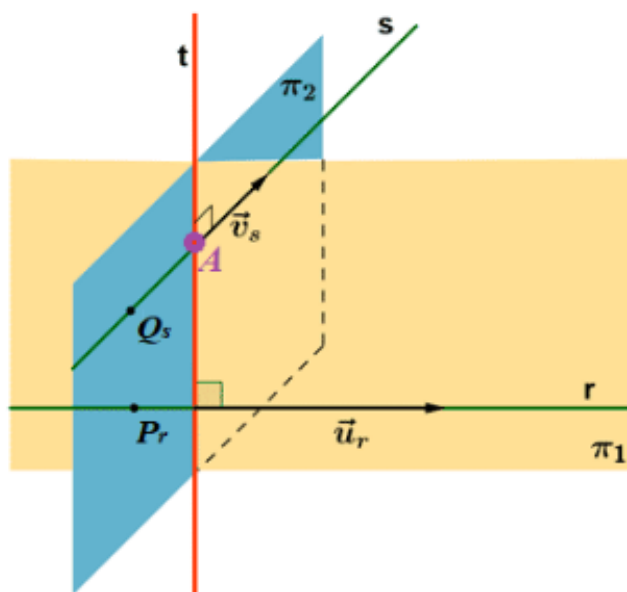
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, -8, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 8 - 1 - 0 + 8 = 12 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas no se cortan. Las rectas se cruzan.

Un vector director de la recta t perpendicular común a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 2j + 2k = (-4, -2, 2)$$

Tomamos como vector director de la recta t el vector $\vec{w}_t = \frac{-1}{2} \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \frac{-1}{2} (-4, -2, 2) = (2, 1, -1)$.



Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y que tiene como otro de sus vectores directores el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y-7+6z+z-2y+14+3x-9=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 4x-y+7z-5=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π_1 y la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 4x-y+7z-5=0 \\ s: \begin{cases} x=4-\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(4-\alpha)+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow 16-4\alpha+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow$$

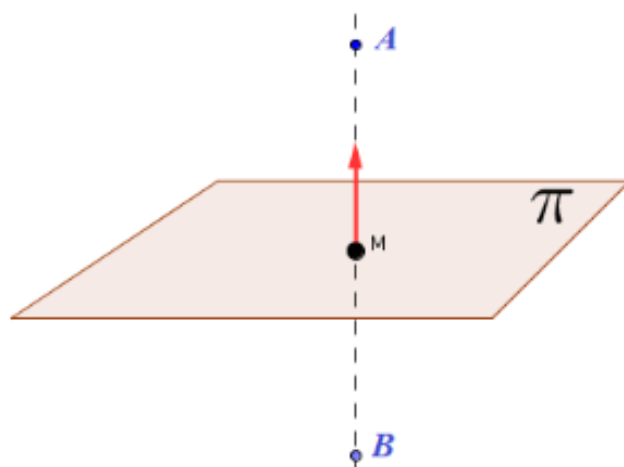
$$\Rightarrow -12\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} x=4-1=3 \\ y=-1+1=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3, 0, -1)}$$

La ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s es la ecuación de la recta que pasa por A con vector director $\vec{w}_t = (2, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, 0, -1) \in t \\ \vec{w}_t = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

La recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s tiene ecuación $t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Solución B2:



El plano que equidista de los puntos A y B contiene el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y tiene como vector normal el vector $\overline{AB}$ o un vector proporcional (en la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} A(3,3,5) \\ B(1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1,-1,1) - (3,3,5) = (-2,-4,-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \frac{-1}{2} \overline{AB} = \frac{-1}{2} (-2,-4,-4) = (1,2,2) \\ M = \frac{(1,-1,1) + (3,3,5)}{2} = (2,1,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow 10 + D = 0 \Rightarrow D = -10 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0}$$

La ecuación del plano que equidista de los puntos A y B es $\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Un plano π' paralelo a π tienen ecuación $\pi' : x + 2y + 2z + D = 0$.

Como el punto M pertenece al plano π determinamos el valor de D para que la distancia del punto M a otro plano π' paralelo a él valga 6 unidades.

$$\left. \begin{array}{l} \pi' : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \\ d(M, \pi') = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|10 + D|}{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |10 + D| = 18 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 + D = 18 \rightarrow D = 8 \rightarrow \boxed{\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0} \\ 10 + D = -18 \rightarrow D = -28 \rightarrow \boxed{\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0} \end{array} \right.$$

Los planos que equidistan 6 unidades del plano π son $\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0$.

Problema C:

C1) Sea $f(x) = e^{x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.

- (a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)
- (b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

Solución C1:

a) Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux):

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, para todo valor u comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.

La función $f(x) = e^{x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ es una función continua pues el exponente es producto de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[0, 3]$.

Si consideramos el intervalo $[0, 3]$ tenemos que $f(0) = e^{0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right)} = e^0 = 1$ y

$$f(3) = e^{3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{3(-1)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx 0.0498.$$

Como $f(1) \approx 0.0498 < \frac{1}{2} < 1 = f(0)$ podemos aplicar el teorema de Darboux y afirmar que

existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$.

b) Vamos a utilizar el teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Como $f(0) = 1$ y

$f(2) = e^{2 \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{2 \sin(\pi)} = e^0 = 1$ se cumple que $f(0) = f(2)$ por lo que aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

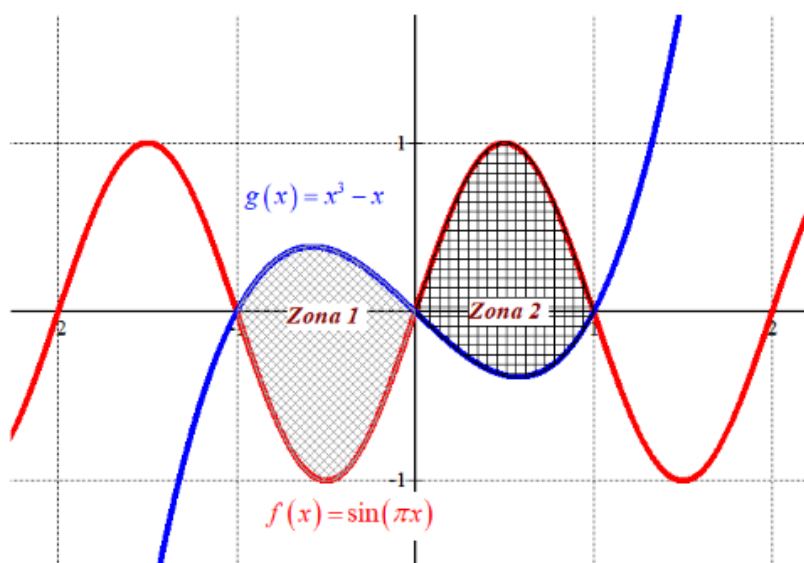
Solución C2:

Hallamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(\pi x) \\ g(x) = x^3 - x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \sin(\pi \cdot 0) = 0 = 0^3 - 0 \\ x = 1 \rightarrow \sin(\pi) = 0 = 1^3 - 1 \\ x = -1 \rightarrow \sin(-\pi) = 0 = (-1)^3 - (-1) \end{cases}$$

Los tres puntos de corte son A(0, 0), B(-1, 0) y C(1, 0).

Dibujamos las funciones para establecer los límites de integración.



Hallamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-1}^0 x^3 - x - \sin(\pi x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi(-1)) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos(-\pi)}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Hallamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \int_0^1 \sin(\pi x) - x^3 + x dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) - \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

El área encerrada entre ambas curvas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 1.77 u^2$$