

Matemáticas II

PAU 2026

Comunidad autónoma de
ISLAS BALEARES



www.apuntesmareaverde.org.es

**Autores: Guillermo Cotrina y Universidad de las Islas
Baleares**

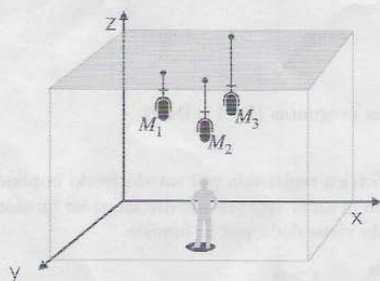


RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
La prueba consta de cinco preguntas: las tres primeras obligatorias, y en la cuarta y quinta se puede elegir entre dos opciones. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Véase la puntuación en cada ejercicio. Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).		

Problema 1:

Problema 1. — En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.



Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

- Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1m.
- Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2m.
- Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4,3,0)$, que representa su posición sobre el escenario.

- [1 punto] Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.
- [1 punto] Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1 , M_2 y M_3 . Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π . Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

Problema 2:

Problema 2. — [2 puntos] Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Problema 3:

Problema 3. — Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40 % de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30 % participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, de entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20 % también participa en torneos oficiales.

- (a) [0.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?
- (c) [1.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no?

Problema 4:

Parte B. preguntas 4 y 5

Problema 4. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal $I(t)$ (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

- (a) [1 punto] Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.
- (b) [1 punto] Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t) dt$.

P4.2 [2 puntos] La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0,$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta.

Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Problema 5:

Problema 5. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1 Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible y

$$AB + A + I = 2A,$$

con I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) [1 punto] Calcula la inversa de A en función de I y B .

(b) [1 punto] Sean

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcula $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x , y y z .

Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

donde $m \geq 0$ es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro m , si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Parte A (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte.

Problema 1:

En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.

Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7 m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

* Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1 m.

* Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2 m.

* Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3 m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4,3,0)$, que representa su posición sobre el escenario.

(a) [1 punto] Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.

(b) [1 punto] Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1 , M_2 y M_3 . Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π . Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

Solución:

(a) Para determinar la altura de cada micrófono, coordenada z , deberemos restar la longitud del cable a la altura del techo. Así $M_1(2,3,6)$, $M_2(4,4,5)$, $M_3(5,1,4)$.

Para hallar la ecuación del plano hallamos primero dos vectores contenidos en el plano, por ejemplo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (4,4,5) - (2,3,6) = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = (5,1,4) - (2,3,6) = (3,-2,-2)\end{aligned}$$

Cualquier vector

siendo X un punto del plano debe ser combinación lineal de . Por tanto el determinante formado por los tres vectores debe ser cero

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-2) + y-3 - 7(z-6) = 0, \Rightarrow -4x + 8 + y - 3 - 7z + 42 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{-4x+y-7z+47=0}$$

(b)

Primero hallaremos la recta r perpendicular al plano π que pasa por P . La intersección de la recta r con el plano π nos proporcionará la proyección de P perpendicular al plano π . La recta r pasa por P y tiene por vector director el normal del plano π $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (-4, 1, -7)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -7\lambda \end{cases}$$

Para hallar la intersección de la recta con el plano, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano. Al resolver la ecuación obtendremos el parámetro, que al sustituirlo en la recta nos dará la proyección de P sobre π .

$$-4(4 - 4\lambda) + 3 + \lambda - 7(-7\lambda) + 47 = 0 \Rightarrow -16 + 16\lambda + 3 + \lambda + 49\lambda + 47 = 0 \Rightarrow 66\lambda + 34 = 0 \Rightarrow \lambda =$$

< >

$$\begin{cases} x = 4 + \frac{68}{33} = \frac{200}{33} \\ y = 3 - \frac{17}{33} = \frac{82}{33} \\ z = -7\left(-\frac{17}{33}\right) = \frac{119}{33} \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33}\right)$

Problema 2:

Problema 2 [2 puntos] Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2+1} \ln(x) = 0 \cdot \ln 0^+ = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{4x^3}{x^2+1}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{T.L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x \cdot 4x^3 - (x^2+1) \cdot 12x^2}{(4x^3)^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4x^4 - 12x^2}{16x^6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16x^5}{-4x^4 - 12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{-x^2 - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

Solución: 0

Problema 3:

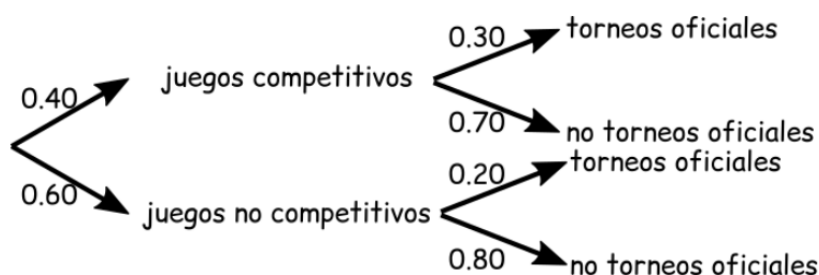
Problema 3. Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40% de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30% participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20% también participa en torneos oficiales.

(a) [0.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?

(c) [1.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no? (Nota: No aparece apartado b en la hoja original)

Solución:**(a)**

Hacemos el diagrama de árbol



Designamos por JC los que hacen juegos competitivos y TO los que participan en torneos oficiales. La probabilidad de que no participe en torneos oficiales sabiendo que no juega principalmente a juegos competitivos es

$$P(\overline{TO} / \overline{JC}) = 0.8$$

Solución: 0.8**(c)**

$$P(JC/TO) = \frac{P(JC \cap TO)}{P(TO)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.2} = \frac{0.12}{0.24} = 0.5$$

$$P(\overline{JC}/TO) = \frac{P(\overline{JC} \cap TO)}{P(TO)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.2} = \frac{0.12}{0.24} = 0.5$$

Solución: $P(\overline{JC}/TO) = P(JC/TO) = 0.5$, igualmente probables

Problema 4.1:**Parte B. Preguntas 4 y 5**

Problema 4. Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal I (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función $I(t) = 50te^{-0.2t}$, $t \geq 0$.

(a) [1 punto] Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.

(b) [1 punto] Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t) dt$.

$$\int 50t e^{-0.2t} dt$$

Solución:

(a)

Hallamos la derivada de la función e igualamos a cero para hallar los posibles máximo y mínimos relativos

$$I'(t) = 50 e^{-0.2t} - 10t e^{-0.2t} \Rightarrow 50 e^{-0.2t} - 10t e^{-0.2t} = 0 \Rightarrow e^{-0.2t}(50 - 10t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-0.2t} = 0 \text{ S.S.} \\ 50 - 10t = 0 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$$

<				>
	0		5	$\rightarrow \infty$
$f'(x)$	$\searrow$	+	0	—
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{250}{e}$	$\searrow$

En $t = 5 \text{ ms}$ la intensidad alcanza un máximo de $\frac{250}{e} \mu V$

Solución: l máxima de $\frac{250}{e} \mu V$ en $t = 5 \text{ ms}$

(b)

Empleamos el método por partes $\begin{cases} t = u \rightarrow dt = du \\ dv = e^{-0.2t} dt \rightarrow v = \int e^{-0.2t} dt = -5e^{-0.2t} \rightarrow \end{cases}$

$$\int 50t e^{-0.2t} dt = 50 \left(-5t e^{-0.2t} + \int 5 e^{-0.2t} dt \right) = -250t e^{-0.2t} - 1250 e^{-0.2t} + C$$

$$\text{Solución: } \int 50t e^{-0.2t} dt = -250t e^{-0.2t} - 1250 e^{-0.2t} + C$$

Problema 4.2:

P4.2. La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0.$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta.

Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Solución:

$y(t)$ es una función racional, numerador y denominador son funciones polinómicas continuas, en la que el denominador no se anula para ningún valor de t . Por tanto $y(t)$ es una función continua. Además $y(0) = -\frac{1}{2} < 0$ e $y(1) = 1 > 0$, por tanto según el teorema de Bolzano existe al menos 1 $c \in (0,1)$ tal que $y(c) = 0$ es decir ha alcanzado la altura de referencia.

Problema 5.1:

Problema 5. Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1. Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible y $AB + A + I = 2A$, con I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) [1 punto] Calcula la inversa de A en función de I y B .

$$AB + A + I = 2A \Rightarrow AB + I = A \Rightarrow A^{-1}(AB + I) = A^{-1}A \Rightarrow A^{-1}AB + A^{-1} = I \Rightarrow IB + A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = I - B$$

Solución: $A^{-1} = I - B$

(b) [1 punto] Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcula x tal que $Ax = b$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Solución: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Problema 5.2:

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x , y y z . Las

condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

donde ($m \geq 0$) es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro (m), si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

Solución:

Analizamos el rango de la matriz de los coeficiente A y la matriz ampliada A^+ . Para ello empezamos calculando el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 3 - 2 - 2m = -m + 1 \Rightarrow -m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A^+)$ por tanto el sistema será compatible determinado y la solución será única.

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ las filas 1 y 3 son iguales. } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^+) = 2 \text{ y}$$

el sistema será compatible pero indeterminado y no podremos determinar la cantidad de cada sustancia.

Solución: Sólo pueden determinarse si $m \neq 1$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
--	--	---------------------------------

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Esta prueba consta de 4 ejercicios.
- En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre los apartados A) o B). Responda **solo** el apartado que elija. En caso contrario, **solo** se corregirá el que aparezca en primer lugar.
- En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
- Se permitirá el uso de calculadoras no programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
- La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10%.

Problema 1:
EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- (0.75 puntos) Calcule los valores de m para que el rango de la matriz A sea 3.
- (1.75 puntos) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial $A^t \cdot X - B^2 = 2 \cdot X$.
- (0.5 puntos) ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t \cdot A = B \cdot D$?

Problema 2:
EJERCICIO 2 Elija solo **uno** de los apartados A) o B):

- A)** Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80, \quad 1 \leq t \leq 6,$$

siendo t el tiempo medido en años.

- (0.75 puntos) Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.
- (0.75 puntos) Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.
- (1.5 puntos) Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

- B)** El coste en euros de producción de x toneladas de un determinado producto en una factoría es $C(x) = 0.2x^2 + 40x + 5000$. El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

- (0.25 puntos) Calcule la función $B(x)$ que expresa el beneficio obtenido al vender x toneladas del producto.
- (1 punto) Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.
- (1.25 puntos) Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?
- (0.5 puntos) Estudie cuándo los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

Problema 3:
Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solució:

Problema 1. — Solució.

- (a) Sigui π el pla que conté els satèl·lits A , B i C . Notem que els vectors directores del pla són

$$\vec{AB} = (2, 0, -2), \quad \vec{AC} = (4, 2, 0).$$

Aleshores,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ y = 2 + 2\beta, \\ z = 3 - 2\lambda. \end{cases}$$

Per veure que formen un pla orbital, cal veure que el centre de la Terra (origen) pertany a aquest pla. En efecte,

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ 0 = 2 + 2\beta, \\ 0 = 3 - 2\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta \Rightarrow 1 + 2\frac{3}{2} + 4(-1) = 0 \checkmark \\ \beta = -1, \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nota: Si es vol donar l'equació explícita del pla, tenim que el vector normal de π és

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, -8, 4) \equiv (1, -2, 1),$$

Per tant, l'equació explícita del pla és $x - 2y + z + d = 0$ tal que

$$x - 2y + z + d = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 2 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = 0.$$

És a dir, $\pi_1 : x - 2y + z = 0$ on podem observar que, en efecte, el punt $(0, 0, 0)$ hi pertany.

- (b) Hem de proporcionar un punt F de tal manera que D , E i F formen un pla orbital. Així doncs, F ha de ser un punt del pla DEO (sent O l'origen $(0, 0, 0)$).

Calculem el pla DEO . Notem que té vectors directores

$$\vec{DE} = (2, 2, 0) \equiv (1, 1, 0), \quad \vec{DO} = (2, 1, 1).$$

Aleshores,

$$\pi_1 : \begin{cases} x = \lambda + 2\beta, \\ y = \lambda + \beta, \\ z = \beta. \end{cases}$$

Per tant, F és qualsevol punt de la forma

$$(\lambda + 2\beta, \lambda + \beta, \beta); \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

diferents de O , D i E (és a dir, $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1), (2,1), (0,0)\}$). Un possible punt a donar seria $F(6,4,2)$.

Criteris:

- (a) 0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla. 0.5 punts per comprovar que és pla orbital $((0,0,0) \in \pi)$.
- (b) 0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla DEO . 0.5 punts per proporcionar un F vàlid. Es penalitza amb -0.25 si només proporcionen el cas general i no especifiquen un punt concret.

Aquest apartat es podria resoldre de manera diferent de la plantejada. En general, valoram amb 0.5 punts per plantejar correctament el problema i 0.5 punts per executar-lo correctament.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

Problema 2:**Solución:****Problema 2.** — *Solució.*

(a) Notem que el domini de la funció és $D = (0, +\infty)$. Per tant, hem de calcular

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = +\infty,\end{aligned}$$

ja que e^x creix més de pressa que $x^{7/2}$.

(b) Notem que $f(2) = -15.2384 < -1$ i $f(4) = -9.4018$. Aleshores, volem calcular

$$\begin{aligned}\int_2^4 (-1 - f(x)) \, dx &= \int_2^4 \left(-1 - x^{\frac{7}{2}} + 6x^{\frac{5}{2}} - e^x \right) \, dx = \left[-x - \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + 6\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - e^x \right]_2^4 \, dx \\ &= 47.0526 - 4.9776 = 42.075 \, u^2.\end{aligned}$$

Criteris:

- (a) 0.25 punts per cada límit ben plantejat i 0.25 per cada límit ben calculat.
- (b) 0.5 punts per plantejar correctament la integral, 0.25 punts per calcular bé la integral, 0.25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow. Es penalitza amb -0.25 punts si no indiquen les unitats.

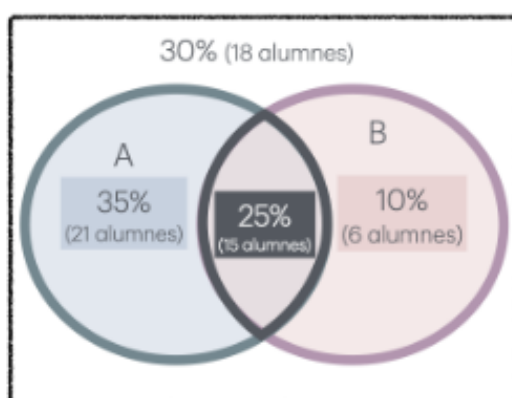
Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

Problema 3:**Solució:**

Problema 3. — *Solució.* Sigui A el succés “Jugar a bàsquet” i B el succés “Estar federat”. Segons les dades de l’enunciat, tenim que

- $P(A) = \frac{60}{100}$, que ens indica que el 60% de 60 = 36 alumnes juguen a bàsquet.
- $P(B) = \frac{35}{100}$, que ens indica que el 35% de 60 = 21 alumnes estan federats.
- $P(A \cap B) = \frac{25}{100}$, que ens indica que el 25% de 60 = 15 alumnes juguen a bàsquet i estan federats.

Tot seguit es pot observar el diagrama de Venn resultant.



- (a) $P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0.1$, per tant, el 10% de 60 = 6 alumnes estan federats, però no juguen.
- (b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.6} = 0.4167$.

Criteris:

- (a) 0.25 punts pel plantejament i notació correctes, 0.25 punts per la resposta correcta de la probabilitat i 0.5 punts per calcular el nombre d'alumnes correctament.
- (b) 0.5 punts pel plantejament i notació correctes, 0.5 punts per la resposta correcta.

Es penalitza amb -0.2 punts si no defineixen els successos correctament.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0, 1]$).

Problema 4:**Solució:****Part B.****Problema 4. — P4.1 Solució.**

- (a) Volem veure que la derivada de la funció s'anul·la en cada un dels intervals proporcionats. Per això, calculem primer la derivada i vegem després l'existència d'aquests punts aplicant el teorema de Bolzano en cada un dels intervals.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - (x^3+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^3+6x^2-1}{(x+2)^2},$$

la qual és contínua a $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, ja que el denominador s'anul·la a $x = -2$. Ara bé, en cada un dels intervals proporcionats, la funció és contínua. A més,

$$\begin{array}{llll} f'(-3) = -1 < 0, & f'(-2.5) = 21 > 0 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_1 \in (-3, -2.5); f'(c_1) = 0. \\ f'(-1) = 3, & f'(0) = -0.25 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_2 \in (-1, 0); f'(c_2) = 0. \\ f'(0) = -0.25, & f'(1) = 0.7778 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_3 \in (0, 1); f'(c_3) = 0. \end{array}$$

- (b) Pel signe de la derivada en els extrems dels intervals, es conclou que en c_1 hi ha un mínim, en c_2 un màxim i en c_3 un altre mínim.

Criteris:

- (a) 0.25 per calcular la derivada de la funció, 0.5 per justificar bé que la funció és contínua, 0.25 per veure que els extrems dels intervals tenen signe oposat, 0.25 punts per indicar que empen el teorema de Bolzano i concloure l'existència dels diferents punts crítics.
(b) 0.25 punts per cada punt crític ben classificat.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

P4.2 Solució.

- (a) Volem veure cap a quina distància del punt inicial es dirigeix el dofí a mesura que passa el temps. Per tant,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 140(1 - e^{-0.05t}) = 140 \text{ m.}$$

- (b) Volem veure el creixement i decreixement de la funció velocitat, la qual és $v(t) = d'(t) = 140 \cdot 0.05e^{-0.05t} = 7e^{-0.05t}$. Calculant la derivada de $v(t)$ tenim que

$$v'(t) = -0.35e^{-0.05t} < 0,$$

per tant, la velocitat sempre decreix, ja que la seva derivada és sempre negativa. Aleshores, la velocitat màxima s'assoleix a $t = 0$, sent aquesta $v(0) = 7 \text{ m/s}$. La velocitat mínima no s'assoleix en un temps finit però sí que tendeix a 0 m/s , ja que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 7e^{-0.05t} = 0 \text{ m/s.}$$

Tendeix a aturar-se.

Problema 5:**Solució:**

Problema 5. — P5.1 Solució. Vegem primer de tot AC . Notem que tant A com C són de dimensió 2×3 . Per tant, el nombre de columnes de A no coincideix amb el nombre de files de C , per la qual cosa no es poden multiplicar.

Vegem ara $D^{-1}A$. Notem que D no és una matriu quadrada, ja que és 2×3 i, per tant, no és invertible i no es pot realitzar l'operació.

Vegem ara $B(A+C)^T$. Notem que A i C tenen la mateixa dimensió, per tant, es poden sumar, i donen lloc a una matriu 2×3 . En transposar-la obtenim una matriu 3×2 . Com que B és una matriu de dimensió 1×3 , el nombre de columnes de B coincideix amb el nombre de files de $(A+C)^T$ i, per tant, es poden multiplicar, i donen lloc a una matriu 1×2 .

Criteris:

- (i) 0.5 punts per discutir que AC no és calculable;
- (ii) 0.5 punts per veure que D no és invertible;
- (iii) 0.5 punts per discutir que $B(A+C)^T$ és calculable i 0.5 punts per dir-ne correctament la dimensió.

Una resposta sense una justificació vàlida no s'avalua.

P5.2 Solució. Necessitam discutir si es tracta d'un sistema compatible determinat o no.

El sistema en forma matricial s'escriu com a $Ax = b$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6500 \\ 22500 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 8 + 7 - 5 - 28 - 12 = 0; \quad \det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 \neq 0.$$

Per tant, el $\text{Rang}(A) = 2$. Notem que amb això ja basta per dir que el sistema no és compatible determinat, ja que $\text{Rang}(A) \neq$ nombre d'incògnites. Consegüentment, no es pot donar una única solució del sistema, la qual cosa implica que no es poden determinar de manera única els costos del servei. Notem que pot passar que el sistema no tenguí solució o que en tenguí infinites. Si es vol assegurar que en té infinites cal veure que $\text{Rang}(A|b) = 2$ (no cal).

Una altra manera d'atacar el problema seria resolent directament el sistema, d'on s'obteniria que hi ha infinites solucions o veure directament que

$$(\text{Esdeveniment } 2) = (\text{Esdeveniment } 1) + 2(\text{Esdeveniment } 3).$$

Totes les estratègies són vàlides.

Criteris: 0.5 punts per plantejar correctament el problema, 1 punt per executar-lo correctament, 0.5 punts per concloure el resultat.

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.