

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

CANARIAS



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Gómez Pastrana Valdepeñas y Juan Antonio Martínez García



	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
Instrucciones: Debe responder un máximo de 5 preguntas: 3 obligatorias y 2 opcionales de bloques diferentes. - En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque opcional, se considerará sólo la primera pregunta. - En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso. - Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet		
Bloque 1.- Análisis I (La barredora de ceniza volcánica) 1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en km^2, siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima. $f(t) = \frac{10t + 5}{2t^2 + 4} + 5$ a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto. ¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto? b) Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta. c) La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza?		
Bloque 2.- Álgebra 2. Dada la matriz A $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A. Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A.		
Bloque 3.- Geometría 3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto: $\pi: 2x + 3y = 0 ; P(1, -5, 1)$ a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.		

b) Estudiar la posición relativa de la recta $s: \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral definida:

$$2 \quad \int_1^2 x e^x dx$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

2 Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dar la expresión de la función resultante.

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

a) Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios.

b) Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares.

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

a) Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año.

b) Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis I (La barredora de ceniza volcánica)

1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en km^2 , siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima.

$$f(t) = \frac{10t + 5}{2t^2 + 4} + 5$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto.

¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto?

b) Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta.

c) La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza?

Solución:

Apartado a)

Estamos ante una función claramente continua, pues el denominador de la fracción presente en su expresión no se anula en ningún punto, y el denominador es una función lineal. Además definida en el intervalo $]0, +\infty[$, pues no tiene sentido tomar valores negativos ya que la variable atiende al número de días transcurridos desde la erupción. Además, también es derivable, y la función derivada es la siguiente:

$$f'(t) = \frac{-20 \cdot (t^2 + t - 2)}{(2t^2 + 4)^2}$$

La derivada también es continua, ya que el denominador es positivo en todo el dominio de definición (el cual es el mismo que la función de partida) y la expresión del numerador atiende a una función cuadrática. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de nuestra función inicial, bastará con estudiar el signo de la función derivada en el dominio de definición.

Para ello, veamos en qué valores de t se anula la función derivada y estudiemos qué sucede con su signo para valores muy próximos a estos.

Para ver en qué valores se anula la función derivada, estudiemos la ecuación $2t^2 + t - 2 = 0$:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{4} \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

de donde concluimos que la única solución a tener en cuenta por la naturaleza del dominio de definición de la función es $t_1 = 1$

Sean $k_0 = 0.5$ y $k_1 = 1.5$ valores reales positivos cumpliendo $k_0 < t_1 < k_1$. ¿Cuál es el signo de la derivada en k_0 y k_1 ? Bastará con estudiar los signos en estos puntos por la continuidad de la función

derivada.

Caso k_0 :

$$f'(k_0) = \frac{-20 \cdot (0.5^2 + 0.5 - 2)}{(2 \cdot 0.5^2 + 4)^2} > 0,$$

lo cual indica que la función f es **creciente** en el intervalo $]0, t_1[$.

Caso k_1 :

$$f'(k_1) = \frac{-20 \cdot (1.5^2 + 1.5 - 2)}{(2 \cdot 1^2 + 4)^2} < 0,$$

lo cual indica que la función f es **decreciente** en el intervalo $]t_1, +\infty[$. Con esta información, podemos además afirmar que t_1 es un **máximo** de la función f , y que además es **absoluto**, ya que es el único extremo relativo de la función.

Por último, ante la pregunta “¿Existe algún valor extremo en el modelo?”, la respuesta es evidentemente sí, y se trata del valor t_1 . La extensión de la mancha de ceniza en este punto es la siguiente:

$$f(t_1) = \frac{10 \cdot 1 + 5}{2 \cdot 1^2 + 4} + 5 \simeq 7.5 \text{ km}^2$$

Apartado b)

En base a la información del apartado anterior, sabemos que la función decrece una vez alcanzado su máximo valor. Debemos comprobar si, con el transcurso de los días, el decrecimiento se aproxima a 0:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t+5}{2t^2+4} + 5 = \frac{\infty}{\infty},$$

lo que supone una indeterminación. Como el denominador de esta expresión es de mayor grado que la del numerador, podemos asegurar que el límite es 0.

Con esta información, podemos asegurar que la afirmación del técnico del equipo es cierta, ya que la extensión de la mancha de ceniza decrece con el paso de los días y tiene a hacerse 0.

Apartado c)

Veamos primero la extensión de la mancha de ceniza en el cuarto día:

$$f(4) = \frac{10 \cdot 4 + 5}{2 \cdot 4^2 + 4} + 5 = 6.25 \text{ km}^2$$

Dado que la barredora limpia a razón de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$, calculemos el número de horas necesarias para barrer los 6.25 km^2 . Para ello, resolvamos la siguiente ecuación. Sea x el número de horas invertidas en barrer:

$$0.5x = 6.25 \Rightarrow x = \frac{6.25}{0.5} = 12.5 \text{ horas}$$

La barredora tardará entonces 12.5 horas en realizar el trabajo.

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A . Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A .

Solución:

Sean X e Y las matrices pedidas. En base a la información del problema, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + 2Y = A \\ X - 2Y = A^{-1} \end{cases}$$

Antes de proceder, calculemos A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A^*)^t$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esta información, volvamos al sistema. Despejamos de la primera ecuación la matriz X , obteniendo la expresión $X = A - 2Y$. Observemos que el orden el que escribamos las matrices es indiferente, ya que estamos trabajando con matrices cuadradas. Con esta última expresión, sustituimos en la segunda ecuación matricial:

$$X - 2Y = A^{-1} \Rightarrow A - 2Y - 2Y = A^{-1} \Rightarrow A - 4Y = A^{-1} \Rightarrow Y = \frac{1}{4} \cdot (A - A^{-1}),$$

de donde se obtiene que, sustituyendo las matrices A y A^{-1} por sus expresiones correspondientes, la matriz Y resulta ser:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y volviendo a la expresión $X = A - 2Y$, se obtiene que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto:

$$\pi: 2x + 3y = 0; P(1, -5, 1)$$

a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .

b) Estudiar la posición relativa de la recta $s: \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π

Solución:**Apartado a)**

Para calcular la recta r , tendremos que determinar su vector director (que llamaremos $\vec{v}_r$) y aplicar la condición de que el punto $P(1, -5, 1)$ esté contenido en ella. Para ello, por la naturaleza de la ecuación implícita de un plano, sabemos que el vector normal al plano π es $\vec{n}_\pi = (2, 3, 0)$.

Como r ha de ser perpendicular a π , el vector director de r y el vector normal a π han de ser proporcionales. Tomemos entonces por vector director de la recta el vector normal al plano π :

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, 3, 0)$$

Por último, apliquemos la condición de que P pertenezca a r . Para ello, usemos por ejemplo la expresión de la **ecuación continua** de una recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{0},$$

donde el 0 del tercer denominador, entiéndase, no es una división por 0, sino la tercera componente del vector director. Demos las ecuaciones implícitas de esta recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ z = 1 \end{cases}$$

Apartado b)

Para estudiar la posición relativa de la recta s dada con respecto al plano π , apliquemos el siguiente razonamiento: si el vector director de s es perpendicular al vector normal de π , estaremos en el caso en el que la recta es paralela al plano (o incluso está contenida en él). Comprobemos primero esto y, en caso contrario, podremos asegurar que la recta corta al plano.

Para ello, calculemos el vector director de s , al cual llamaremos $\vec{v}_s$. Para ello, observemos que las ecuaciones implícitas dadas nos indican los planos cuya intersección producen la recta s . Por ello, el producto vectorial de los vectores normales a ambos planos nos dará un vector director para la recta s . Llamemos a los planos de intersección π_1 y π_2 , y a sus vectores normales $\vec{n}_{\pi_1}$ y $\vec{n}_{\pi_2}$ respectivamente.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (-1, 3, -3); \vec{n}_{\pi_2} = (4, 9, -2)$$

$$\vec{v}_s = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 9\hat{j} - 21\hat{k} = (15, -9, -21)$$

Por simplicidad, tomemos $\vec{v}_s = (5, -3, -7)$, ya que es proporcional al anterior.

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 7 \cdot 0 = 1 \neq 0,$$

lo cual nos indica que dichos vectores no son perpendiculares, y por tanto, la recta s interseca con el plano π . Calculemos el punto de intersección pues. Para ello, consideremos las **ecuaciones paramétricas** de la recta s . Observemos que el punto $Q(0,0,1)$ pertenece a la recta s , ya que cumple sus ecuaciones implícitas. Con este punto y el vector director previamente calculado, tenemos que las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 1 - 7\lambda \end{cases},$$

donde λ es un parámetro real. Sustituyendo en la ecuación implícita del plano π :

$$2 \cdot (5\lambda) + 3 \cdot (-3\lambda) = 0 \Rightarrow 10\lambda - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

con lo cual, el punto de intersección es el anteriormente considerado $Q(0,0,1)$.

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)**4A.** Calcular la siguiente integral definida:

$$2 \quad \int_1^2 x e^x dx$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

- 2 Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dar la expresión de la función resultante.

Solución:**4A)**

Para resolver esta integral, apliquemos el método de integración por partes:

$$\int_1^2 x e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

4B)

Antes de continuar, observemos que la función dada es continua y derivable en cada uno de los trozos indicados, teniendo el conflicto únicamente en el punto $x = 1$, que es donde se realizará el estudio. Para dar respuesta a lo que se pide, estudiaremos la continuidad y derivabilidad en este punto de conflicto.

Continuidad:

Tendremos que estudiar el límite de la función a izquierda y derecha de $x = 1$, exigiendo que ambos sean iguales:

- Límite a izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \frac{a}{x-2} = 1 - a$$

- Límite a derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \frac{b}{\sqrt{x}} = a + b$$

Como se quiere que la función sea continua, debemos igualar ambos límites:

$$1 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 1,$$

lo cual es una ecuación en dos variables. Para resolverla, apliquemos la condición de derivabilidad en $x = 1$.

Derivabilidad:

Primero, hallemos la función derivada de f :

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{(x-2)^2}, & \text{si } x < 1 \\ -\frac{b}{\sqrt{x^3}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$, debemos exigir que la función derivada sea continua en dicho punto. Aplicaremos un proceso análogo al caso de la continuidad:

- Límite a izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{a}{(x-2)^2} = -a$$

- Límite a derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{b}{\sqrt{x^3}} = -b$$

Como queremos que la derivada sea continua en $x = 1$, igualamos ambos límites:

$$-a = -b \Rightarrow a = b$$

Ya tenemos pues dos condiciones para los parámetros a y b :

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a = b \end{cases},$$

lo que es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Aplicando la condición de la segunda ecuación en la primera, obtenemos lo siguiente:

$$2a + a = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = b = \frac{1}{3}$$

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

- a) Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios.
- b) Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares.

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

- a) Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año.
- b) Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación?

Solución:**5A)**

- a) Para dar respuesta a lo que se pregunta, calculemos la probabilidad de obtener un valor de la variable, a la que llamaremos X , entre 70 y 80 minutos, y apliquemos esta probabilidad sobre el número total de alumnos de la muestra.

Recordemos que la expresión de la función de densidad de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ representa la media y σ la desviación típica, es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Para simplificar los cálculos, vamos a tipificar nuestra variable aleatoria haciendo el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$\text{Si } X \rightarrow N(74, 20) \Rightarrow Z \rightarrow N(0, 1)$$

Calcular la probabilidad $P(70 < Z < 80)$ es el mismo problema que calcular la probabilidad

$P\left(\frac{70-74}{20} < Z < \frac{80-74}{20}\right) = P(-0.2 < Z < 0.3)$, por medio del cambio de variable anteriormente dado. Se entiende que al pedir "entre" no se consideran los extremos. Calculemos pues $P(-0.2 < Z < 0.3)$:

$$P(-0.2 < Z < 0.3) = P(Z < 0.3) - [1 - P(Z < 0.2)]$$

Buscando los valores correspondientes de la probabilidad en la tabla de la distribución normal $N(0, 1)$:

- $P(Z < 0.3) = \int_{-\infty}^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.6179$

- $P(Z < 0.2) = \int_{-\infty}^{0.2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.5793$

Entonces, se tiene:

$$P(-0.2 < Z < 0.3) = P(Z < 0.3) - [1 - P(Z < 0.2)] = 0.6179 - (1 - 0.5793) = 0.1972,$$

o lo que es lo mismo, el **19.72%** de los alumnos usan auriculares entre 70 y 80 minutos. Dado que la muestra era de 4000 alumnos, el dato exacto del alumnado que se encuentra en este intervalo es el siguiente:

$$19.72\% \text{ de } 4000 \approx \mathbf{789 \text{ alumnos}}$$

- b) Hacer un uso moderado de los auriculares supone usarlos 50 minutos o menos. ¿Cuál será entonces la probabilidad de obtener un valor de la variable por debajo de los 50 minutos? Para hacer este cálculo, mantengamos el cambio de variable del apartado anterior tras la tipificación.

$$P(X \leq 50) = P(Z \leq -1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$$

Buscando la probabilidad correspondiente en la tabla de la distribución normal $N(0, 1)$, sabemos que $P(Z \leq 1.2) = 0.8849$

Entonces, se tiene:

$$P(X \leq 50) = P(Z \leq -1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151,$$

o lo que es lo mismo, un **11.51%** de los alumnos hace un uso moderado de los auriculares.

5B)

- a) Por la naturaleza del suceso planteado, podemos asegurar que este se modela por una variable aleatoria X que sigue una distribución **binomial** donde se llevan a cabo 150 realizaciones independientes del experimento, con una probabilidad de éxito $p = \frac{3}{5} = 0.6$:

$$X \rightarrow B(150, 0.6)$$

Se nos pide calcular la probabilidad de obtener entre 82 y 94 éxitos, es decir: $P(82 < X < 94)$. Una vez más, se entiende que al indicar “entre”, no consideraremos los extremos.

Observemos que estamos ante un caso de distribución binomial en la que el número de realizaciones del experimento es muy elevado. En estos casos, aproximaremos nuestra distribución a una distribución normal sin más que hacer lo siguiente:

Dada $X \rightarrow B(n, p)$, con $n > 10$, $n \cdot p > 5$, y $n \cdot (1 - p) > 5$, se tiene que $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$, con $\mu = n \cdot p$, y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$. Tengamos en cuenta además que, al aproximar una distribución discreta (como

es la binomial) a una distribución continua (como es la normal), tendremos que aplicar la **corrección de Yates** al calcular la probabilidad, que consiste en sumar 0.5 a los extremos si se estudia la probabilidad de que el valor de la variable quede por debajo de dicho extremo, y restar 0.5 en caso contrario.

Con esta información, nuestra variable aleatoria sigue entonces una distribución normal de media $\mu = 90$ y desviación típica $\sigma = 6$. Tipificamos nuestra variable aleatoria mediante el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Debemos calcular $P(82 < X < 94)$, aplicamos la corrección de Yates y nos queda

$P(82.5 < X' < 93.5)$ luego, por el cambio de variable anteriormente indicado, calcular

$$P(82 < X < 94) \text{ es lo mismo que calcular } P\left(\frac{82.5-90}{6} < Z < \frac{93.5-90}{6}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.58) = P(Z \leq 0.58) - [1 - P(Z \leq 1.25)]$$

Consultando los valores de probabilidad correspondientes en la tabla de la distribución normal $N(0, 1)$, sabemos que:

- $P(Z \leq 0.58) \approx 0.7190$
- $P(Z \leq 1.25) \approx 0.8944$

Con esta información, se tiene pues:

$$P(Z \leq 0.58) - [1 - P(Z \leq 1.25)] = 0.7190 - (1 - 0.8944) = \mathbf{0.679}$$

b) Debemos calcular $P(X > 80)$. Aplicando de nuevo la corrección de Yates, calculamos

$P(X' \geq 80.5)$. Una vez más, aplicamos el cambio de variable $Z = \frac{X' - \mu}{\sigma}$ para tipificar. Así pues, calcular $P(X > 80)$ es análogo a calcular $P\left(Z \geq \frac{80.5-90}{6}\right) = P(Z \geq -1.58) = P(Z \leq 1.58)$

Buscamos el valor correspondiente de la probabilidad en la tabla de la normal $N(0, 1)$ y obtenemos $P(Z \leq 1.58) = 0.9429$.

Luego, $P(X \geq 80) = 0.9429$ es decir, la probabilidad de que germinen y sobrevivan más de 80 semillas es del 94.29 % > 90 %, y en base a los datos, incluirán esta técnica en el plan de reforestación.

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
Instrucciones: - Debe responder un máximo de 5 preguntas: 3 obligatorias y 2 opcionales de bloques diferentes. - En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque opcional, se considerará sólo la primera pregunta. - En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso. - Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet		
Problema 1: Bloque 1.- Análisis I (La ultramaratón) 1. Una ultramaratón internacional realizada en Gran Canaria atraviesa espacios naturales protegidos muy sensibles, como el Parque Natural de Tamadaba o el Parque Rural del Nublo. El Cabildo Insular ha establecido la cantidad máxima de 7500 participantes para poder garantizar la conservación de los parques por los que discurre la prueba. Siguiendo datos de otros años, se propone un modelo matemático dado por la función $I(t)$, que mide el número total de corredores inscritos (expresados en miles) transcurrido el tiempo t (en meses) desde la apertura de las inscripciones. $I(t) = \begin{cases} 5e^{0.8t-4}, & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{14t - 65}{2t - 9}, & t > 5 \end{cases}$ 1.5 a) Indicar si el modelo es continuo y derivable en su dominio de definición. 0.5 b) El modelo propuesto, ¿garantiza que no se superará el número máximo de inscripciones permitidas? Justificar la respuesta. Problema 2: Bloque 2.- Álgebra 2. Dada la siguiente matriz $A \in M_{3 \times 3}$ con $k \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$ 0.75 a) Averiguar los valores de k para los que la matriz A tiene inversa. 1.25 b) Calcular la matriz inversa de A, cuando $k = 1$		

Problema 3:**Bloque 3.- Geometría**

3. En el espacio tridimensional, se conoce que el siguiente plano y recta son secantes:

$$\pi: x + 3y + 2z = 10 \quad ; \quad r: \frac{x+21}{11} = 3 - y = \frac{5-z}{2}$$

- 1 a) Averiguar el punto de corte entre el plano π y la recta r .
- 1 b) Calcular el ángulo generado por el plano π y la recta r .

Problema 4:**Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)**

4A. Calcular la siguiente integral indefinida:

$$2 \int \sqrt{7x+5} dx$$

4B. Dada la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$$

- 1.25 a) Averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- 0.75 b) Estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando se aproxima a $\pm\infty$
¿Qué se puede afirmar en relación a la asíntota horizontal de $f(x)$?

Problema 5:**Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)**

5A. La playa de Famara (Lanzarote) es muy famosa por la calidad de sus olas para la realización de Surf. La academia de surf "FaMa-t-Surf" ofrece cursos para quienes quieren iniciarse en este deporte y garantiza que, tras sus sesiones de formación, un surfista principiante surfeará la ola con un 70% de posibilidades.

- 1.25 a) Se elige al azar un surfista que ha seguido las clases de esta academia. Si intenta surfear 5 olas, ¿cuál es la probabilidad de que logre surfear alguna de ellas?
- 0.75 b) Para contratar un nuevo monitor se evalúa a un surfista experimentado que tiene un 90% de probabilidad de surfear una ola. Se contrata si logra surfear al menos 14 de 15 olas, ¿cuál es la probabilidad de que consiga el puesto?

5B. El servicio de instrumentación del Roque de los Muchachos (La Palma) recibe un lote de 120 sensores de luz. De estos, 20 sensores de luz son de ultra-alta sensibilidad destinados al telescopio LST-1, y el resto son de sensibilidad estándar y se reparten por igual entre los telescopios MAGIC I y MAGIC II.

Tras el largo transporte por carretera hasta la cumbre, la probabilidad de que un sensor de los MAGIC sufra un micro-desajuste y se deba recalibrar en el laboratorio, es del 1.6%. Mientras que, sensores del LST-1 están en embalajes más reforzados y el micro-desajuste sucede el 0.9% de las veces.

Antes de instalarlos, el jefe de operaciones elige al azar un sensor del lote para comprobar su estado.

- 1 a) Calcular la probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado.
- 1 b) Elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, justificar razonadamente si la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Bloque 1.- Análisis I (La ultramaratón)

1. Una ultramaratón internacional realizada en Gran Canaria atraviesa espacios naturales protegidos muy sensibles, como el Parque Natural de Tamadaba o el Parque Rural del Nublo. El Cabildo Insular ha establecido la cantidad máxima de 7500 participantes para poder garantizar la conservación de los parques por los que discurre la prueba.

Siguiendo datos de otros años, se propone un modelo matemático dado por la función $I(t)$, que mide el número total de corredores inscritos (expresados en miles) transcurrido el tiempo t (en meses) desde la apertura de las inscripciones.

$$I(t) = \begin{cases} 5e^{0.8t-4}, & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{14t-65}{2t-9}, & t > 5 \end{cases}$$

- 1.5 a) Indicar si el modelo es continuo y derivable en su dominio de definición.
0.5 b) El modelo propuesto, ¿garantiza que no se superará el número máximo de inscripciones permitidas? Justificar la respuesta.

Solución:

a) La función en el intervalo $[0, 5)$ tiene la expresión $I(t) = 5e^{0.8t-4}$ que es una exponencial y por tanto continua.

La función en el intervalo $(5, +\infty)$ tiene la expresión $I(t) = \frac{14t-65}{2t-9}$ que es una racional cuyo denominador se anula para $t = 4.5$ que no pertenece al intervalo de definición y por tanto es continua.

Estudiamos la continuidad en $t = 5$.

$$\left. \begin{aligned} I(5) &= 5e^{0.8 \cdot 5 - 4} = 5e^0 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} I(t) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} 5e^{0.8x-4} = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} I(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{14t-65}{2t-9} = \frac{14 \cdot 5 - 65}{2 \cdot 5 - 9} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 5^-} I(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} I(t) = I(5) = 5$$

La función es continua en $t = 5$. La función es continua en su dominio de definición $[0, +\infty)$.

La función es derivable en $[0, 5) \cup (5, +\infty)$. Hallamos su derivada.

$$I'(t) = \begin{cases} 5 \cdot 0.8 \cdot e^{0.8t-4} = 4e^{0.8t-4}, & 0 \leq t < 5 \\ \frac{14(2t-9) - 2(14t-65)}{(2t-9)^2} = \frac{28t-126-28t+130}{(2t-9)^2} = \frac{4}{(2t-9)^2}, & t > 5 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $t = 5$.

$$\left. \begin{aligned} I'(5^-) &= \lim_{t \rightarrow 5^-} I'(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 4e^{0.8t-4} = 4e^{0.8 \cdot 5 - 4} = 4 \\ I'(5^+) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} I'(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{4}{(2t-9)^2} = \frac{4}{(2 \cdot 5 - 9)^2} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I'(5^-) = I'(5^+) = 4$$

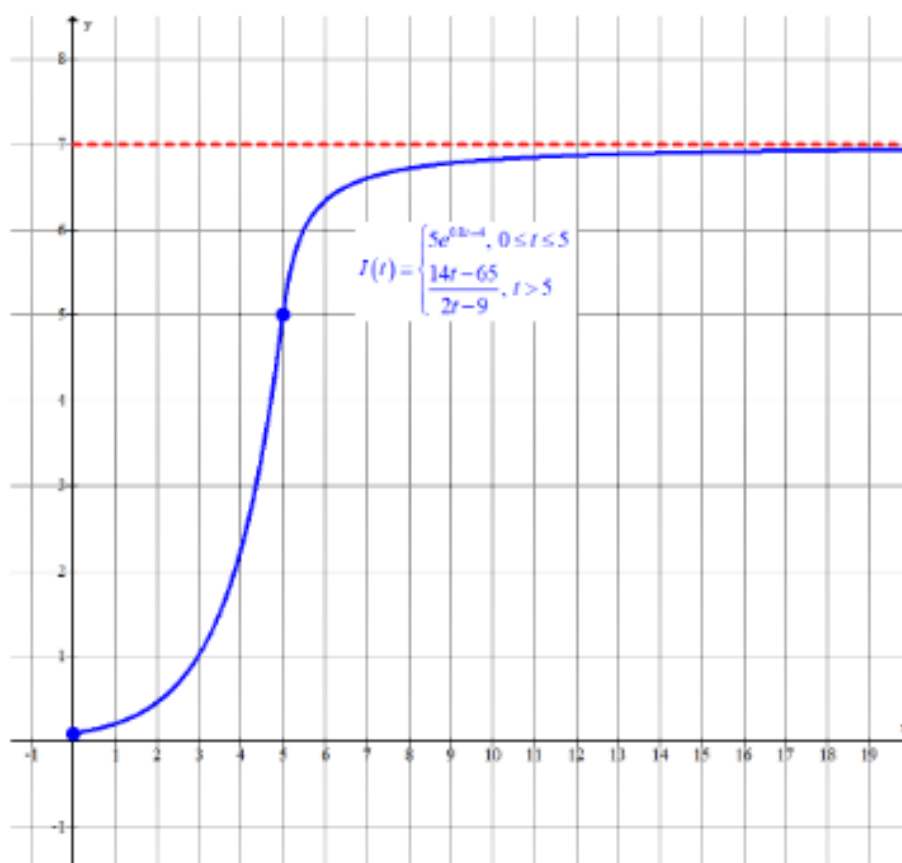
Coinciden las derivadas laterales y la función es derivable en $t=5$. La función es derivable en su dominio de definición $[0, +\infty)$.

- b) En el intervalo $[0, 5)$ la derivada es $I'(t) = 4e^{0.8t-4}$, que siempre es positiva. La función crece en dicho intervalo y su valor más alto se alcanza para $t=5$: $I(5) = 5$, es decir, el valor más alto es de 5000 corredores y no se superan los 7500.

En el intervalo $(5, +\infty)$ la derivada es $I'(t) = \frac{4}{(2t-9)^2}$, que siempre es positiva. La función crece en dicho intervalo y su valor más alto se alcanza cuando t tiende a $+\infty$. Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{14t-65}{2t-9} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{14t}{t} - \frac{65}{t}}{\frac{2t}{t} - \frac{9}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{14 - \frac{65}{t}}{2 - \frac{9}{t}} = \frac{14 - \frac{65}{\infty}}{2 - \frac{9}{\infty}} = \frac{14-0}{2-0} = 7$$

En el intervalo $(5, +\infty)$ la función no supera el valor de 7, es decir, no se superan los 7000 corredores y, por tanto, no se superan los 7500.



Problema 2:**Bloque 2.- Álgebra**

2. Dada la siguiente matriz $A \in M_{3 \times 3}$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

- 0.75 a) Averiguar los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.
1.25 b) Calcular la matriz inversa de A , cuando $k = 1$

Solución:

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{vmatrix} = 6k - k^3 + 0 - 0 + k^2 - 0 = -k^3 + k^2 + 6k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^3 + k^2 + 6k = 0 \Rightarrow -k(k^2 - k - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 - k - 6 = 0 \rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = k \\ \frac{1-5}{2} = -2 = k \end{cases} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de k distinto de -2 , 0 y 3 .

b) Para $k=1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 1 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & -1/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

Problema 3:**Bloque 3.- Geometría**

3. En el espacio tridimensional, se conoce que el siguiente plano y recta son secantes:

$$\pi: x + 3y + 2z = 10 \quad ; \quad r: \frac{x+21}{11} = 3 - y = \frac{5-z}{2}$$

- 1 a) Averiguar el punto de corte entre el plano π y la recta r .
- 1 b) Calcular el ángulo generado por el plano π y la recta r .

Solución:

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta y resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r: \frac{x+21}{11} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-21, 3, 5) \\ \vec{v}_r = (11, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -21 + 11\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

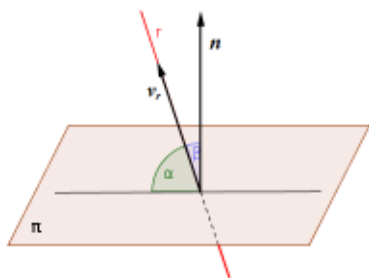
$$\pi: x + 3y + 2z = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = -21 + 11\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow -21 + 11\lambda + 3(3 - \lambda) + 2(5 - 2\lambda) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -21 + 11\lambda + 9 - 3\lambda + 10 - 4\lambda = 10 \Rightarrow 4\lambda = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -21 + 33 = 12 \\ y = 3 - 3 = 0 \\ z = 5 - 6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(12, 0, -1)}$$

El punto Q de corte del plano y la recta tiene coordenadas $Q(12, 0, -1)$.

b) Obtenemos el ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal del plano.



$$\vec{v}_r = (11, -1, -2) \quad \left. \begin{array}{l} \pi: x + 3y + 2z = 10 \rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|(11, -1, -2) \cdot (1, 3, 2)|}{\sqrt{11^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{11 - 3 - 4}{\sqrt{126} \sqrt{14}} = \frac{2}{21}$$

$$\beta = (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{21}\right) = 84.5^\circ$$

El ángulo formado entre recta y plano es $\alpha = 90^\circ - 84.5^\circ = 5.5^\circ$.

Problema 4:**Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)****4A.** Calcular la siguiente integral indefinida:

$$2 \quad \int \sqrt{7x+5} dx$$

4B. Dada la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$$

- 1.25 a) Averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- 0.75 b) Estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando se aproxima a $\pm\infty$
¿Qué se puede afirmar en relación a la asíntota horizontal de $f(x)$?

Solución 4A:

Calculamos la integral indefinida usando el método de cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{7x+5} dx &= \left\{ \sqrt{7x+5} = t \rightarrow 7x+5 = t^2 \rightarrow 7dx = 2tdt \rightarrow dx = \frac{2tdt}{7} \right\} = \\ &= \int t \frac{2tdt}{7} = \frac{2}{7} \int t^2 dt = \frac{2}{7} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{2t^3}{21} = \left\{ \sqrt{7x+5} = t \right\} = \boxed{\frac{2\sqrt{(7x+5)^3}}{21} + K} \end{aligned}$$

Solución 4B:

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot (-1)e^{1-x} = (2x - x^2)e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x)e^{1-x} = 0 \Rightarrow \{e^{1-x} \neq 0\} \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1) = (2(-1) - (-1)^2)e^{1-(-1)} = -3e^2 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = (2-1^2)e^{1-1} = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = (2 \cdot 3 - 3^2)e^{1-3} = \frac{-3}{e^2} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

b) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

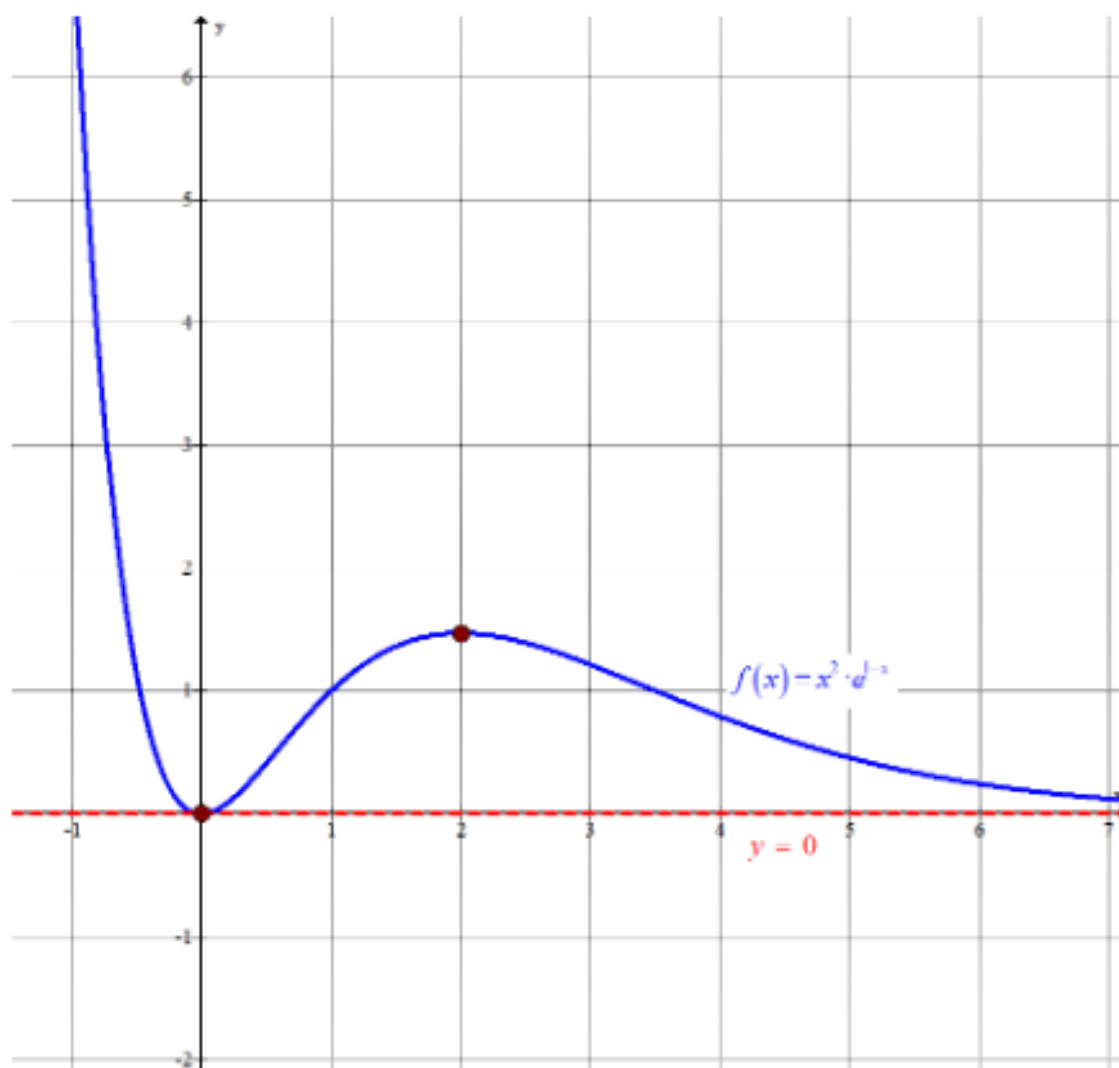
Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{1-x} = (-\infty)^2 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

La función tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$.

La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $-\infty$.

La función tiene a la recta $y=0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.



Problema 5:**Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)**

5A. La playa de Famara (Lanzarote) es muy famosa por la calidad de sus olas para la realización de Surf. La academia de surf "FaMa-t-Surf" ofrece cursos para quienes quieren iniciarse en este deporte y garantiza que, tras sus sesiones de formación, un surfista principiante surfeará la ola con un 70% de posibilidades.

- 1.25 a) Se elige al azar un surfista que ha seguido las clases de esta academia. Si intenta surfear 5 olas, ¿cuál es la probabilidad de que logre surfear alguna de ellas?
- 0.75 b) Para contratar un nuevo monitor se evalúa a un surfista experimentado que tiene un 90% de probabilidad de surfear una ola. Se contrata si logra surfear al menos 14 de 15 olas, ¿cuál es la probabilidad de que consiga el puesto?

5B. El servicio de instrumentación del Roque de los Muchachos (La Palma) recibe un lote de 120 sensores de luz. De estos, 20 sensores de luz son de ultra-alta sensibilidad destinados al telescopio LST-1, y el resto son de sensibilidad estándar y se reparten por igual entre los telescopios MAGIC I y MAGIC II.

Tras el largo transporte por carretera hasta la cumbre, la probabilidad de que un sensor de los MAGIC sufra un micro-desajuste y se deba recalibrar en el laboratorio, es del 1.6%. Mientras que, sensores del LST-1 están en embalajes más reforzados y el micro-desajuste sucede el 0.9% de las veces.

Antes de instalarlos, el jefe de operaciones elige al azar un sensor del lote para comprobar su estado.

- 1 a) Calcular la probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado.
- 1 b) Elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, justificar razonadamente si la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1.

Solución 5A:

a) Sea X = el número de olas que surfeará un surfista de un grupo de 5 olas. Es una variable binomial siendo el número de repeticiones $n = 5$ y p = probabilidad de surfear una ola = 0.70. $X = B(5, 0.7)$.

Calculamos la probabilidad de que el surfista logre surfear alguna de las 5 olas $P(X \geq 1)$ usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 1 - 0.3^5 = \boxed{0.99757}$$

La probabilidad de que logre surfear alguna de las 5 olas es de 0.99757.

b) Sea X = el número de olas que surfeará un surfista de un grupo de 15. Es una variable binomial siendo el número de repeticiones $n = 15$ y p = probabilidad de surfear una ola = 0.90. $X = B(15, 0.9)$.

Para conseguir el puesto de monitor debe surfear al menos 14 de las 15 olas. Calculamos la probabilidad de conseguirlo: $P(X \geq 14)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 14) &= P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{15}{14} 0.9^{14} \cdot 0.1^1 + \binom{15}{15} 0.9^{15} \cdot 0.1^0 = \\ &= 15 \cdot 0.9^{14} \cdot 0.1 + 0.9^{15} = \boxed{0.549} \end{aligned}$$

La probabilidad de que consiga el puesto es de 0.549.

Solución 5A:

Llamamos L al suceso “elegir un sensor de los LST-1”, M a “elegir un sensor para los MAGIC” y D a “el sensor ha sufrido un micro-desajuste y debe ser recalibrado”.
Tenemos las probabilidades siguientes:

$$P(L) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0.1667; P(M) = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} = 0.8333; P(D/M) = 0.016; P(D/L) = 0.009$$

a) Nos piden calcular $P(D)$, Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(L)P(D/L) + P(M)P(D/M) = \frac{1}{6} \cdot 0.009 + \frac{5}{6} \cdot 0.016 = \frac{89}{6000} = \boxed{0.0148}$$

La probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado tiene un valor de 0.0148.

b) Calculamos $P(M/\bar{D})$ y $P(L/\bar{D})$.

$$P(M/\bar{D}) = \frac{P(M \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(M)P(\bar{D}/M)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot (1 - 0.016)}{1 - \frac{89}{6000}} = \frac{4920}{5911}$$

$$P(L/\bar{D}) = \frac{P(L \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(L)P(\bar{D}/L)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot (1 - 0.009)}{1 - \frac{89}{6000}} = \frac{991}{5911}$$

Es cierto que elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II $\left(\frac{4920}{5911}\right)$ es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1 $\left(2 \cdot \frac{991}{5911} = \frac{1982}{5911}\right)$.