

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

CANTABRIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Checa y Juan Antonio Martínez García



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

 Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INDICACIONES: – Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una tarea de cada apartado/bloque. – En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen. – Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. – Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado. – No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet. Apartado 1A: APARTADO 1 [2,5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B): 1A) Considera la matriz presentada a continuación, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones: a) [0,5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a. b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a. c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple: $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ Apartado 1B: 1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$ dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones: a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a. b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general. c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general. Apartado 2A: APARTADO 2 [2,5 puntos]. Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B): 2A) Considera la función presentada a continuación, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$ donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones: a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$. b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.		

Apartado 2B:

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

Apartado 3:

APARTADO 3 [2,5 puntos]. Bloque C. Resuelve esta cuestión.

3) Considera los puntos $A = (0, 0, 4)$, $B = (-3, 0, 0)$ y $C = (0, -2, 0)$.

- a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .
- b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1, 1, 1)$ y la recta que contiene a A y B .
- c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0, 0, 0)$.

Apartado 4A:

APARTADO 4 [2,5 puntos]. Bloque E. Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B).

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al alzar una cobaya blanca es de 0,2:

- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

Apartado 4B:

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) [0,5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Apartado 1A:

APARTADO 1 [2,5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera la matriz presentada a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- [0,5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .
- [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a .
- [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

1Aa) Como $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se tiene que $\text{rg}(A) \geq 2$.

Además, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$. Por lo tanto

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 0 \\ 3 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

1Ab) Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

Observamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ y concluimos que $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$.

*Si se quisiera probar por inducción, tenemos que:

$$\blacksquare \text{ Para } n = 1, A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^1 \end{pmatrix}$$

▪ Si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$, entonces

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

1Ac) Para $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. Por abreviar, llamemos

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha, tenemos

$$A^{-1}AXA^{-1}A = X = A^{-1}BA$$

Calculamos A^{-1} por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow -1 \cdot F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} X = A^{-1}BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Apartado 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
- [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución:**Apartado 1B.**

1Ba)

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2-a \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ son mayores o iguales que 2.

$$\text{Además } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = -(a+1)(a-1).$$

Luego

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in \{-1, 1\} \\ 3 & \text{si } a \notin \{-1, 1\} \end{cases}$$

Si $\text{rg}(A) = 3$, entonces necesariamente $\text{rg}(A^*) = 3$. Estudiamos el rango de A^* para los valores $a = -1$ y $a = 1$:

- Si $a = -1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ por lo que } \text{rg}(A^*) = 3.$$

- Si $a = 1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Claramente las filas son linealmente dependientes (ya que la segunda y la tercera son iguales), luego $\text{rg}(A^*) = 2$.

En conclusión, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius:

- Si $a = -1$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $a \notin \{-1, 1\}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

1Bb)

Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado.

$$\begin{aligned} A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow 3F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow 3F_2 + 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{F_1 \rightarrow F_1/3 \\ F_2 \rightarrow 3F_2/3 \\ F_3 \rightarrow -F_3/3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -1/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

1Bc)

Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La tercera fila es redundante ($F_3 = F_2$), llamamos $\lambda = z$ y obtenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{array} \right)$$

De aquí $y = 1 - \lambda$, y $x = -\lambda - y = -\lambda - 1 + \lambda = -1$.

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Apartado 2A:**APARTADO 2 [2,5 puntos]. Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):**

2A) Considera la función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

Solución:**Apartado 2A.****2Aa)**

Para calcular los valores m, n de la asíntota oblicua $y = mx + n$, tenemos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2x} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - \frac{x^2 + a^2x}{x + a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a - a^2)x + 1}{x + a^2} = a - a^2 \end{aligned}$$

Buscamos $n = -6$, luego

$$a - a^2 = -6 \rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

La función f tiene asíntota oblicua $y = x - 6$ para $a \in \{-2, 3\}$.

2Ab) Para $a = -2$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$$

Primero vemos que $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Derivamos

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 4) - (x^2 - 2x + 1)(1)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2}$$

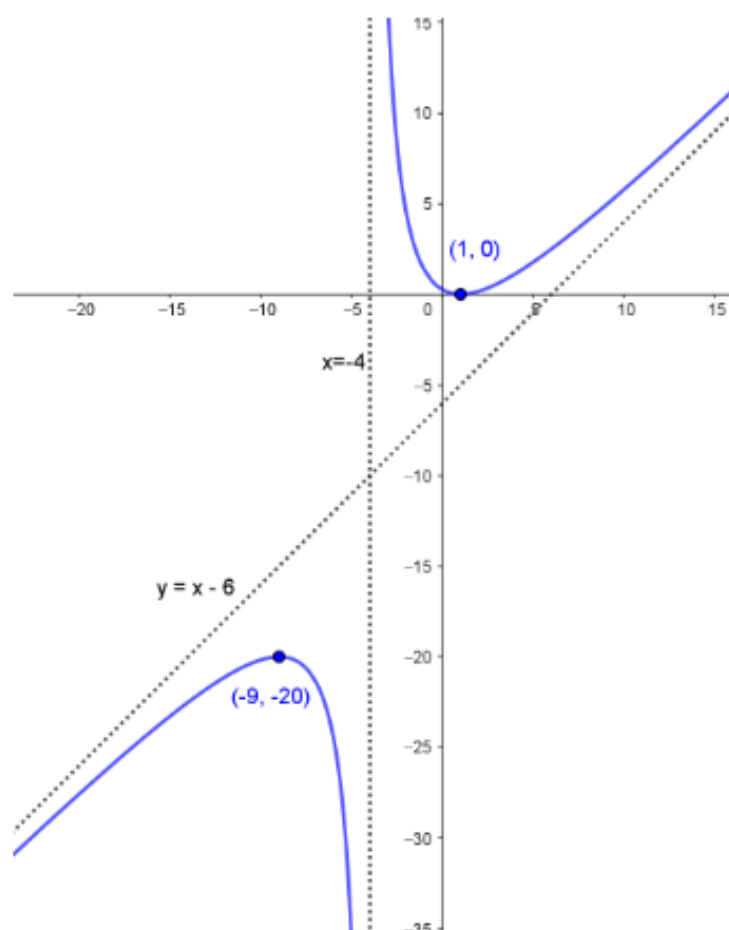
El denominador es un cuadrado, por lo que $(x + 4)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Hallamos las raíces del numerador:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} 1 \\ -9 \end{cases}$$

Esto es, $x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9)$. Reunimos toda la información en una tabla

	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$	
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+9)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

En conclusión, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -9) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-9, -4) \cup (-4, 1)$.



2Ac)

La recta tangente en $x = -1$ viene dada por la ecuación punto-pendiente por

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

Sustituyendo,

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1}{-1 + 4} = \frac{4}{3}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 9}{(-1 + 4)^2} = -\frac{16}{9}$$

Por lo que la recta tangente viene dada por

$$y - \frac{4}{3} = -\frac{16}{9}(x + 1)$$

Apartado 2B:

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

Solución:**Apartado 2B.**

2Ba)

Asíntotas verticales.

Calculamos $\text{dom}(f)$.

$$e^{2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln(4^{1/2}) = \ln 2$$

Por lo que

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

Estudiamos los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{2^- - 1}{(e^{\ln 2^-})^2 - 4} \right] = \left[\frac{2^- - 1}{(2^-)^2 - 4} \right] = \left[\frac{2^- - 1}{4^- - 4} \right] = \left[\frac{1^-}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{2^+ - 1}{(e^{\ln 2^+})^2 - 4} \right] = \left[\frac{2^+ - 1}{(2^+)^2 - 4} \right] = \left[\frac{2^+ - 1}{4^+ - 4} \right] = \left[\frac{1^+}{0^+} \right] = +\infty$$

Por lo tanto f presenta una asíntota vertical dada por $x = \ln 2$.

Asíntotas horizontales. Calculamos los límites en infinito:

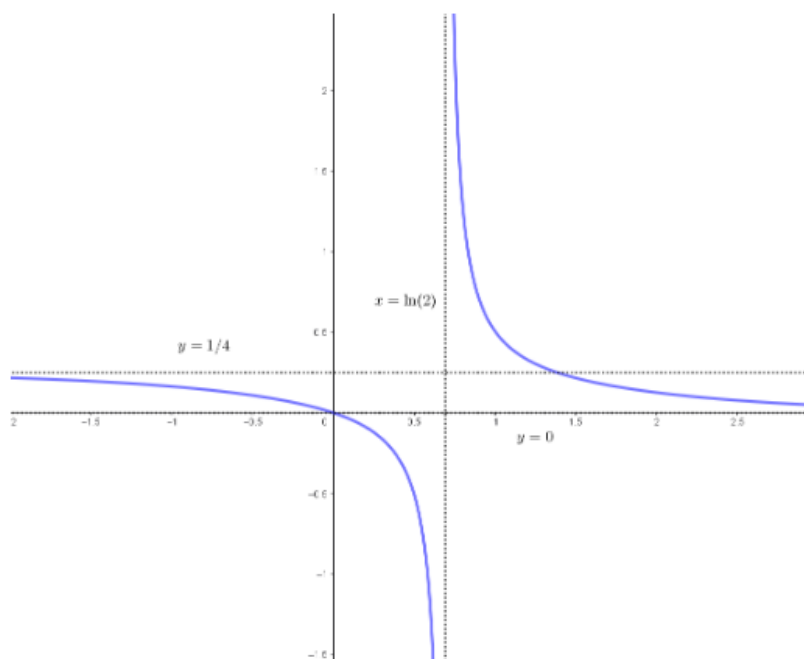
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{1 - 4e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto f presenta una asíntota horizontal en $+\infty$ dada por $x = 0$ y otra en $-\infty$ dada por $x = \frac{1}{4}$.

Asíntotas oblicuas.

La función f no presenta asíntotas oblicuas porque presenta asíntotas horizontales.



2Bb)

Calculamos la primitiva

$$F(x) = \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} dx$$

Hacemos el cambio de variable $u = e^x \leftrightarrow x = \ln u$. Derivando, obtenemos $dx = \frac{1}{u} du$. Sustituyendo, obtenemos

$$\int \frac{u - 1}{u(u^2 - 4)} du = \int \frac{u - 1}{u(u + 2)(u - 2)} du$$

Para resolver la integral racional, planteamos

$$\frac{u - 1}{u(u + 2)(u - 2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 2} + \frac{C}{u - 2} = \frac{A(u + 2)(u - 2) + Bu(u - 2) + Cu(u + 2)}{u(u + 2)(u - 2)}$$

Tomamos los valores $u \in \{-2, 0, 2\}$ para obtener:

$$-2 - 1 = B \cdot (-2) \cdot (-4) \rightarrow B = -\frac{3}{8}$$

$$0 - 1 = A \cdot (2) \cdot (-2) \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$2 - 1 = C \cdot (2) \cdot (4) \rightarrow C = \frac{1}{8}$$

Integramos

$$\int \frac{u - 1}{u(u + 2)(u - 2)} du = \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{u} + -\frac{3}{8} \frac{1}{u + 2} + \frac{1}{8} \frac{1}{u - 2} \right) du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} - \frac{3}{8} \int \frac{du}{u+2} + \frac{1}{8} \int \frac{du}{u-2} = \\
 &= \frac{1}{4} \ln|u| - \frac{3}{8} \ln|u+2| + \frac{1}{8} \ln|u-2| + C
 \end{aligned}$$

Deshacemos el cambio $u = e^x$

$$F(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{8} \ln|e^x - 2| + C$$

Se nos pide que en $x = \ln 4$ (esto es, $e^x = 4$) la primitiva tome el valor $\ln 2$.
Sustituimos

$$\frac{1}{4} \ln 4 - \frac{3}{8} \ln(4+2) + \frac{1}{8} \ln|4-2| + C = \ln 2$$

Despejamos

$$C = \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{3}{8} \ln 6 + \frac{1}{8} \ln 2$$

Por lo tanto la primitiva que se nos pide es

$$F(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{8} \ln|e^x - 2| - \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{3}{8} \ln 6 + \frac{9}{8} \ln 2$$

Apartado 3:**APARTADO 3 [2,5 puntos]. Bloque C. Resuelve esta cuestión.**

3) Considera los puntos $A = (0, 0, 4)$, $B = (-3, 0, 0)$ y $C = (0, -2, 0)$.

- a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .
- b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1, 1, 1)$ y la recta que contiene a A y B .
- c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0, 0, 0)$.

Solución:**Apartado 3.****3a)**

Calculamos la ecuación implícita del plano que pasa por A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, -4)$. Una forma de calcularlo es mediante el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} (z-4) =$$

$$= 8x - 12y + 6z - 24$$

Luego la ecuación del plano viene dada por $\pi : \{8x - 12y + 6z - 24 = 0\}$.

3b)

Podemos calcular esta distancia como

$$\text{dist}(P, \text{Recta}(A, B)) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{|-4\vec{i} - 13\vec{j} + 3\vec{k}|}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 + 13^2 + 3^2}}{5} = \frac{\sqrt{194}}{5} \approx 2,79$$

3c)

Tenemos que $\overrightarrow{DA} = (0, 0, 4)$, $\overrightarrow{DB} = (-3, 0, 0)$ y $\overrightarrow{DC} = (0, -2, 0)$. Podemos hallar el volumen del tetraedro mediante:

$$V_{\text{Tetra}} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{24}{6} = 4$$

Apartado 4A:**APARTADO 4 [2,5 puntos]. Bloque E. Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B).**

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al alzar una cobaya blanca es de 0,2:

- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

Solución:**1. Apartado 4A.**

Llamamos $C \equiv$ Pelo corto, $L \equiv$ Pelo largo, $B \equiv$ Pelo blanco, $M \equiv$ Pelo marrón.
 Se nos dice que $P(C) = 0,6 = 60\%$ y que $P(B \cap L) = 0,08 = 8\%$.
 Sabemos que las cobayas tienen únicamente pelo corto o largo, esto es, $P(L) + P(C) = 1$ y $P(L \cap C) = 0$. Del mismo modo, $P(B) + P(M) = 1$ y $P(B \cap M) = 0$.

4Aa)

$P(M | L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)}$. Sabemos que $P(M \cap C) + P(M \cap L) = P(L)$, es decir,

$$\frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{(1 - P(C)) - P(B \cap L)}{1 - P(C)} = \frac{0,4 - 0,08}{0,4} = 0,8 = 80\%$$

Apuntamos para más adelante que $P(M \cap L) = 0,4 - 0,08 = 0,32 = 32\%$.

4Ab)

Se nos dice que $P(B) = 0,2$, luego $P(M) = 0,8$.

$$P(L | M) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)} = \frac{0,32}{0,8} = 0,4 = 40\%$$

4Ac)

$$P(M | C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M) - P(M \cap L)}{P(C)} = \frac{0,8 - 0,32}{0,6} = 0,8 = 80\%$$

Apartado 4B:

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

Solución:**Apartado 4B.**

Llamamos

$$X \equiv \text{Diámetro de una mandarina} \sim N(\mu = 60, \sigma = 16)$$

4Ba)

$$\begin{aligned} P(X < 40 \text{ ó } X > 90) &= P(X < 40) + P(X > 90) = \\ &= P\left(\frac{X - 60}{16} < \frac{40 - 60}{16}\right) + P\left(\frac{X - 60}{16} > \frac{90 - 60}{16}\right) \end{aligned}$$

Sabemos que $Z = \frac{X - 60}{16} \sim N(0, 1)$. Calculamos $(40 - 60)/16 = -1,25$ y $(90 - 60)/16 = 1,875$.

$$P(Z < -1,25) + P(Z > 1,875) = 1 - P(Z < 1,25) + 1 - P(Z < 1,875)$$

Consultando estos últimos valores en la tabla de la distribución $N(0,1)$ obtenemos

$$P(X < 40 \text{ ó } X > 90) = 1 - 0,89435 + 1 - \frac{0,96926 + 0,96995}{2} \approx 0,136045$$

(Tomamos la media de los valores para 1,87 y para 1,88; ya que la tabla no tiene tantos decimales de precisión.)

4Bb)

Suponemos que la elección de las mandarinas es independiente. La probabilidad de que una mandarina tenga menos de 50 mm de diámetro es

$$P(X < 50) = P\left(\frac{X - 60}{16} < \frac{50 - 60}{16}\right) = P(Z < -0,625) = 1 - P(Z < 0,625)$$

Consultando la tabla,

$$P(X < 50) = 1 - \frac{0,73237 + 0,73565}{2} \approx 0,26599 \approx 26,6 \%$$

La probabilidad de que esto ocurra para dos elecciones independientes es

$$P(X < 50) \cdot P(X < 50) = 0,26599 \approx 0,07075 \approx 7,07 \%$$

4Bc)

$$P(40 < X < 50) = P\left(\frac{40 - 60}{16} < \frac{X - 60}{16} < \frac{50 - 60}{16}\right) =$$

$$P(-1,25 < Z < -0,625) = P(0,625 < Z < 1,25) = P(Z < 1,25) - P(Z < 0,625)$$

Consultando la tabla,

$$P(40 < X < 50) = 0,89435 - \frac{0,73237 + 0,73565}{2} \approx 0,16034 \approx 16,03 \%$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

 Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
--	---	---------------------------------

Problema 1:

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.
b) [1.5 puntos] Considera $a = 0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x + y + az = 1 \\ ax + a^2y = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
b) [0,5 puntos] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Problema 2:

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.
b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a .
c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
- b) [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x=0$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

Problema 3:

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta tarea.

3) Considera los puntos $A = (0,5,-1)$ y $B = (-3,11,-10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

- a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B .
- b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r .
- c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A .

Problema 4:

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

- a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.
- c) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.
- c) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.

b) [1.5 puntos] Considera $a = 0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución 1A:

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a + 0 + 3 - 0 - 0 + a^2 = a^2 + 4a + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 = a \\ \frac{-4-2}{2} = -3 = a \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $a \neq -1$ y $a \neq -3$.

b) Si $a = 0$ la matriz A tiene inversa. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallamos su matriz

inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 0 - 0 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos también la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Terminamos de obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8+3+0 & 0+3+12 \\ -2+0+0 & 0+0-3 \\ 2+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 22+15 & 0+15 \\ -4-3 & 0-3 \\ 4+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ -7 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/6 & 5/2 \\ -7/6 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $a=0$ la matriz X solución de la igualdad $AXB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es $X = \begin{pmatrix} 37/6 & 5/2 \\ -7/6 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x + y + az = 1 \\ ax + a^2y = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
- b) [0,5 puntos] Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución 1A:

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de A como máximo es 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera columna y averiguamos cuando se anula su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^3$$

El determinante se anula para $a = 0$. Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$

En este caso el determinante es distinto de cero y el rango de A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante es nulo. La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 1 y el rango de A/B también es 1, tienen el mismo rango, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor de a .

b) Si $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1; \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$.

b) Si $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 8x + y + 2z = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

Problema 2A:**APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):****2A)** Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.
 b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a .
 c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución 2A:

- a) La función debe ser continua en
- $x=1$
- .

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{\ln 1}{1} + 4a = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x} + 4a = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 3x + a^2 = 1^2 + 3 + a^2 = a^2 + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + 4 = 4a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 2$.

- b) El dominio de la función es
- $\mathbb{R}$
- .

Asíntota vertical $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$ Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x + a^2 = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.Veamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 4a = \frac{+\infty}{+\infty} + 4a = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$\frac{1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4a = \frac{1}{+\infty} + 4a = 4a$$

La recta $y = 4a$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.**Asíntota oblicua.** $y = mx + n$ Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 + \frac{a^2}{x} = -\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

La única asíntota de la función es la recta $y = 4a$ que es una asíntota horizontal.

c) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x = \frac{1 - \ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función antes, entre y después de $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$ y $x = e$

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = 2(-10) + 3 = -17 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$.

La función crece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

- En el intervalo $(1, e)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - \ln 2}{2^2} = 0.08 > 0$.

La función crece en $(1, e)$.

- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale

$$f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0. \text{ La función decrece en } (e, +\infty).$$

La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (e, +\infty)$ y crece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, e)$.

Si $a = 2$ la función es continua y podemos afirmar que la función crece en $\left(-\frac{3}{2}, e\right)$, pero si

$a \neq 2$ la función no es continua y no podemos asegurar si crece o no en $x = 1$, depende del valor de a .

Problema 2B:

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.
- [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x=0$.
- [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

Solución 2B:

- a) El dominio de la función son todos los números reales mayores o iguales que 0 (para que exista $\sqrt{x}$) que no anulen el denominador.

$$1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1^2 = 1}$$

El dominio de la función es $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- b) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{1-\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1-t} 2t dt = 2 \int \frac{t^3}{1-t} dt = \dots$$

$$\begin{array}{r} t^3 \quad |1-t| \\ -t^3 + t^2 \quad -t^2 - t - 1 \\ \hline t^2 \\ -t^2 + t \\ \hline t \\ -t + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\dots = 2 \int -t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t} dt = 2 \left(-\int t^2 dt - \int t dt - \int dt - \int \frac{-1}{1-t} dt \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{-t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| \right) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - \sqrt{x^2} - 2\sqrt{x} - 2\ln|1-\sqrt{x}| =$$

$$= \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1-\sqrt{x})^2 + K$$

La primitiva tiene la expresión $F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1-\sqrt{x})^2 + K$.

Hallamos el valor de K para que $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-2\sqrt{0^3}}{3} - 0 - 2\sqrt{0} - \ln(1 - \sqrt{0})^2 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = K \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} - \ln(1 - \sqrt{x})^2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-2\sqrt{x^3}}{3} - x - 2\sqrt{x} + \ln(1 - \sqrt{x})^2$.

c) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (1 - \sqrt{x}) - x \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=4$.

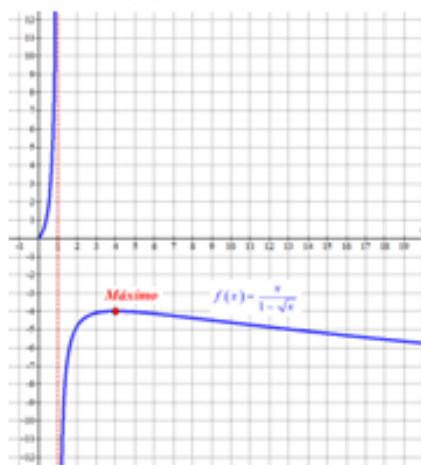
- En el intervalo $(1, 4)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} > 0. \text{ La función crece en } (1, 4).$$

- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x=16$ y la derivada vale

$$f'(16) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{16}}{(1 - \sqrt{16})^2} = \frac{-1}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (4, +\infty).$$

La función crece antes y decrece después de $x=4$. Como la función es continua en el intervalo $(1, +\infty)$ este máximo relativo también es absoluto en el intervalo $(1, +\infty)$.



Problema 3:**APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta tarea.**

3) Considera los puntos $A = (0, 5, -1)$ y $B = (-3, 11, -10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

- a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B .
 b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r .
 c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A .

Solución:

a) Obtenemos la ecuación de la recta s que contiene los puntos A y B .

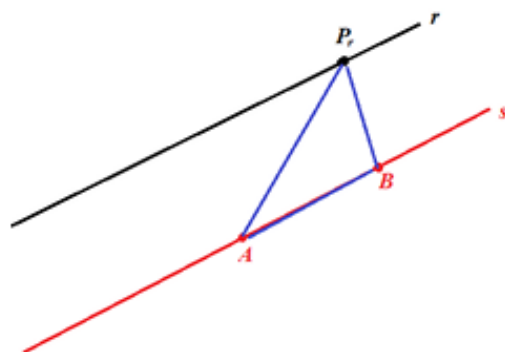
$$\left. \begin{array}{l} A = (0, 5, -1) \in s \\ B = (-3, 11, -10) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 11, -10) - (0, 5, -1) = (-3, 6, -9) \\ \vec{u}_s = \frac{-1}{3} \overrightarrow{AB} = (1, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las rectas r y s tienen el mismo vector director $\vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, -2, 3)$. Las rectas son paralelas o coincidentes. Comprobamos si la recta r contiene el punto $A(0, 5, -1)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} A(0, 5, -1) \in r? \\ r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{0-3}{1} = \frac{5+2}{-2} = \frac{-1}{3} ? \Rightarrow \text{!!!} \frac{-3}{1} \neq \frac{7}{-2} \neq \frac{-1}{3} \text{!!!}$$

No se cumple la igualdad, el punto A no está contenido en la recta r . Las rectas r y s son paralelas.

- b) Las rectas r y s son paralelas y el área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r tendrá un valor independiente del punto de r elegido.
 Consideramos el punto $P_r(3, -2, 0)$ de la recta r .



Utilizamos la fórmula del área del triángulo ABP_r : $\text{Área } ABP_r = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r}|}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 6, -9) \\ \overrightarrow{AP_r} = P_r(3, -2, 0) - (0, 5, -1) = (3, -7, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 6 & -9 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6i - 27j + 21k - 18k + 3j - 63i = -57i - 24j + 3k = (-57, -24, 3)$$

$$\text{Área } ABP_r = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP_r}|}{2} = \frac{\sqrt{(-57)^2 + (-24)^2 + 3^2}}{2} = \frac{3\sqrt{426}}{2} \approx 30.96 \text{ u}^2$$

El área del triángulo formado por los vértices A , B y un punto genérico de r vale $\frac{3\sqrt{426}}{2} = 30.96$ unidades cuadradas.

- c) El plano π que contiene a la recta r y el punto A tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, -2, 3)$ y el vector que une los puntos $A(0, 5, -1)$ y $P_r(3, -2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 5, -1) \in \pi \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, 3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AP_r} = (3, -7, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-5 & z+1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 9y - 45 - 7z - 7 + 6z + 6 - y + 5 + 21x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 19x + 8y - z - 41 = 0}$$

El plano π que contiene a r y A tiene ecuación general $\pi: 19x + 8y - z - 41 = 0$.

Problema 4A:**APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):**

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

- [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.
- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.
- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

Solución:

- a) Llamamos A, B y C a “elegir la urna A, B o C. Llamamos D a “sacar bola blanca”. Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360} \approx 0.3139$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca es de $\frac{113}{360} \approx 0.3139$.

- b) Debemos calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{113}{360}} = \frac{20}{113} \approx 0.177$$

La probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B tiene un valor de $\frac{20}{113} \approx 0.177$.

- c) Consideramos que el experimento planteado es “elegir una de las dos urnas A o B, extraer una primera bola de la urna elegida y después volver a elegir de nuevo una urna y sacar una segunda bola de la caja elegida”. Se pueden obtener dos bolas blancas extrayendo las dos bolas blancas de A (tiene 4 blancas) o bien una de A y otra de B. En la caja B solo hay una bola blanca y no podemos extraer las dos bolas blancas de esta caja.

$$P(\text{Dos bolas blancas de A o B}) =$$

$$= P(\text{Dos bolas blancas de A}) + P(\text{Una bola blanca de A y otra bola blanca de B}) +$$

$$+ P(\text{Una bola blanca de B y otra bola blanca de A}) =$$

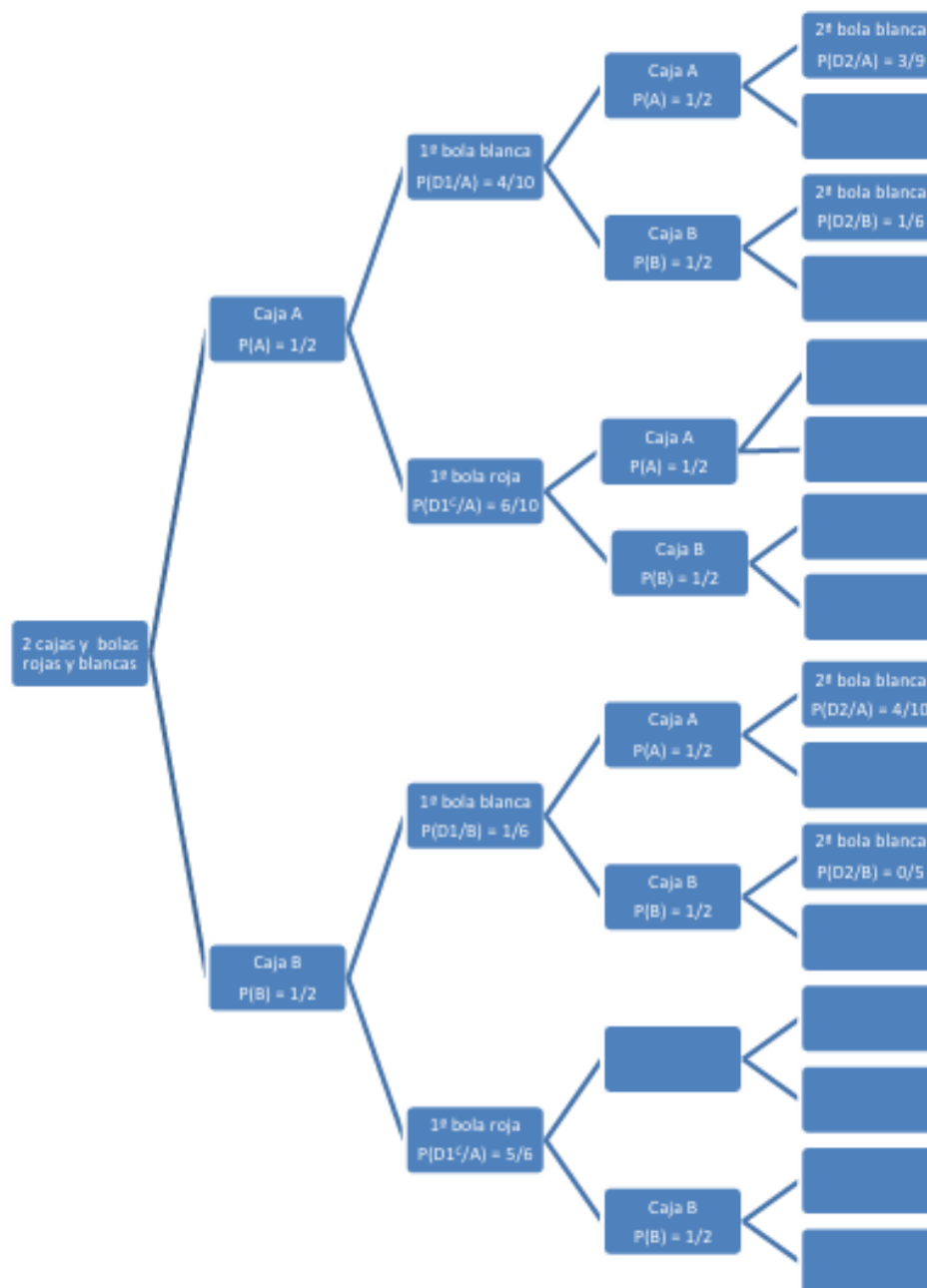
$$= P(A \cap D_1)P((A \cap D_2)/(A \cap D_1)) + P(A \cap D_1)P(B \cap D_2) + P(B \cap D_1)P(A \cap D_2) =$$

$$= P(A)P(D_1/A) \cdot P(A_2)P(D_2/(D_1 \cap A \cap A_2)) + P(A)P(D_1/A) \cdot P(B_2)P(D_2/B_2) +$$

$$+P(B_1)P(D_1/B_1) \cdot P(A_2)P(D_1/A_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15} = 0.0667$$

Otra forma de razonarlo. Como comprobación de lo calculado.



La probabilidad de sacar dos bolas blancas de las cajas A o B vale:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{360} + \frac{4}{240} + \frac{4}{240} = \frac{1}{15}$$

Problema 4B:

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.
- [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.
- [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

Solución:

Sea X la variable aleatoria que obtiene la venta de pizzas a la semana de un establecimiento.
 $X = N(300, 62)$.

- Nos piden calcular $P(X > 370)$. Como 370 es mayor que $300 + 62$ la probabilidad del suceso debe ser pequeña.

$$P(X > 370) = 1 - P(X \leq 370) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{370 - 300}{62}\right) = 1 - P(Z \leq 1.13) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8708 = \boxed{0.1292}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8599	0,8623	0,8646	0,8670

La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas es de 0.1292.

- Nos piden calcular $P(200 \leq X \leq 350)$.

$$P(200 \leq X \leq 350) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} = P\left(\frac{200 - 300}{62} \leq Z \leq \frac{350 - 300}{62}\right) =$$

$$= P(-1.61 \leq Z \leq 0.81) = P(Z \leq 0.81) - P(Z \leq -1.61) = P(Z \leq 0.81) - P(Z \geq 1.61) =$$

$$P(Z \leq 0.81) - [1 - P(Z \leq 1.61)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.791 - [1 - 0.9463] = \boxed{0.7373}$$

z_0	0,00	0,01	
0,0	0,5000	0,5040	0
0,1	0,5398	0,5438	0
0,2	0,5793	0,5832	0
0,3	0,6179	0,6217	0
0,4	0,6554	0,6591	0
0,5	0,6915	0,6950	0
0,6	0,7257	0,7291	0
0,7	0,7580	0,7611	0
0,8	0,7881	0,7910	0
0,9	0,8159	0,8186	0
1,0	0,8413	0,8438	0
1,1	0,8643	0,8665	0
1,2	0,8849	0,8869	0
1,3	0,9032	0,9049	0
1,4	0,9192	0,9207	0
1,5	0,9332	0,9345	0
1,6	0,9452	0,9463	0
1,7	0,9554	0,9564	0

La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas vale 0.7373.

c) Calculamos $P(X \geq 150)$.

$$P(X \geq 150) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{62} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{150 - 300}{62}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2.42) = P(Z \leq 2.42) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9922$$

Como la elección de las semanas es independiente entre sí la probabilidad de que escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas se puede obtener como el producto de las probabilidades de que ocurra en cada una de ellas: $0.9922 \cdot 0.9922 = 0.9845$.

z_0	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9861	0,9864	0,9868
2,3	0,9893	0,9896	0,9898
2,4	0,9919	0,9922	0,9922