

MATEMÁTICAS II

PAU 2026

Comunidad autónoma de
CASTILLA LA MANCHA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.		
PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte		
Pregunta 1.		
Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas. Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.		
a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica. b) [1 punto] Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.		
Pregunta 2.		
Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:		
$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$		
Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña		
a) [1,25 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo b) [0,75 puntos] A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.		
Pregunta 3.		
a) [1 punto] Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que $A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.		
$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		

b) [1 punto] Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4.

Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a)$, $\vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) [0,75 puntos] Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea $10 u^3$.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas $P(1,2,6)$ y se desea instalar un segundo sensor en el punto P' , simétrico del anterior respecto del plano π .

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P' .

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre los dos sensores.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

a) [1 punto] Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x$$

b) [1 punto] Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$

5.2. [2 puntos] Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1, \\ ax + b & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=1$

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas. Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.

b) [1 punto] Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Respuesta:

Sean los sucesos:

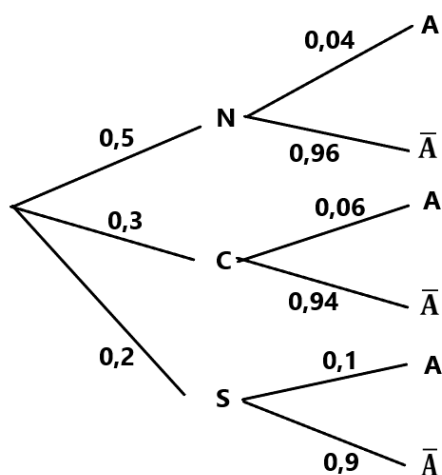
N..... alerta generada por el sistema de Navegación.

C..... alerta generada por el sistema de Comunicaciones.

S..... alerta generada por el sistema de Soporte Vital.

A..... la alerta es crítica y $\bar{A}$ la alerta no es crítica.

Escribimos el árbol de probabilidades:



a) Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$P(A) = P(N) \cdot P(A/N) + P(C) \cdot P(A/C) + P(S) \cdot P(A/S) = 0,5 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,058$$

La probabilidad de que la alerta sea crítica es de 0,058.

b) Por el Teorema de Bayes

$$P(\bar{A}/S) = \frac{P(S \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{A}/S)}{1 - P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{1 - 0,058} = \frac{0,18}{0,942} = 0,1911$$

La probabilidad de que proceda del soporte vital sabiendo que la alerta no es crítica es 0,1911

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) [1,25 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo

b) [0,75 puntos] A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprétalo en el contexto del problema.

Respuesta:

$$\text{a)} \quad B'(x) = 80 \cdot e^{-0,5x} - 0,5 \cdot 80x \cdot e^{-0,5x} = 80e^{-0,5x} - 40xe^{-0,5x} = e^{-0,5x}(80 - 40x)$$

$$e^{-0,5x}(80 - 40x) = 0 \rightarrow 80 - 40x = 0 \rightarrow x = 2.$$

Como x es el número de días, tenemos los intervalos:

$$(0, 2) \rightarrow B'(1) = e^{-0,5 \cdot 1}(80 - 40 \cdot 1) > 0 \quad B(x) \text{ es creciente}$$

$$(2, \infty) \rightarrow B'(10) = e^{-0,5 \cdot 10}(80 - 40 \cdot 10) < 0 \quad B(x) \text{ es decreciente}$$

Por tanto en $x = 2$ hay un máximo, (a los 2 días el beneficio diario es máximo)

$B(x)$ es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$.

El beneficio diario es máximo a los 2 días.

$$\text{b)} \quad \text{Calculamos } \lim_{x \rightarrow \infty} 80x \cdot e^{-0,5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{80x}{e^{0,5x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminación}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital y calculamos el límite de las derivadas de numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{80}{0,5 \cdot e^{0,5x}} = \frac{80}{\infty} = 0$$

A largo plazo el beneficio tiende a estabilizarse en el valor 0, lo cual quiere decir que a largo plazo no va a haber beneficios diarios.

Pregunta 3.

a) [1 punto] Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que $A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) [1 punto] Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones {

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Respuesta:

$$\text{a) } A \cdot B = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2-a=1 \rightarrow a=1 \\ a-1=0 \rightarrow a=1 \\ 2-b=0 \rightarrow b=2 \\ b-1=1 \rightarrow b=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{para}} \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix} \text{ y } \rightarrow A \cdot B = I$$

Para $a = 1$ y $b = 2$ se cumple $A \cdot B = I$.

b) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ tenemos el sistema $\begin{cases} X + Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$ multiplicamos por

(-2) la primera ecuación y las sumamos $\begin{cases} -2X - 2Y = -2A \\ 2X + 3Y = B \end{cases} \rightarrow Y = B - 2A$ podemos calcular

$$Y = B - 2A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } X + Y = A \rightarrow X = A - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

PARTE B (preguntas 4 y 5)**Pregunta 4.**

4.1. [2 puntos] Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a)$, $\vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) [0,75 puntos] Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3 .

Respuesta:

- a)** Si el producto mixto fuera distinto de 0, los tres vectores determinarían un paralelepípedo y si es 0 serían coplanarios, por lo que lo calculamos e igualamos a 0 y calculamos que valor de a lo

$$\text{hace } 0 \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 2a + 1 + a^2 - 1 - 2 = a^2 + a - 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = 1 \text{ y } a = -2$$

Para $a = 1$ y $a = -2$ los vectores son coplanarios.

- b)** Como el volumen viene dado por el producto mixto, si queremos que valga 10, igualamos el resultado a 10 y calculamos a

$$|a^2 + a - 2| = 10 \rightarrow a^2 + a - 2 = 10 \text{ o bien } a^2 + a - 2 = -10 \text{ nos quedan las ecuaciones}$$

$$a^2 + a - 12 = 0 \rightarrow a = 3 \text{ y } a = -4$$

$$a^2 + a + 8 = 0 \text{ no tiene solución real.}$$

Por tanto

Para $a = 3$ y $a = -4$ el volumen del paralelepípedo es de 10 u^3 .

Pregunta 4. 2.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas $P(1,2,6)$ y se desea instalar un segundo sensor en el punto P' , simétrico del anterior respecto del plano π .

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P' .

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre los dos sensores.

Respuesta:

a) Nos piden calcular el punto simétrico de P respecto del plano π

Calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular a π , tomamos el vector perpendicular a π

$\vec{u} = (1, 1, 1)$, $P(1,2,6)$ de donde $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ Obtenemos las ecuaciones implícitas y

resolvemos el sistema formado por éstas y la ecuación del plano $\begin{cases} x-1 = y-2 \\ x-1 = z-6 \\ x+y+z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y = -1 \\ x-z = -5 \\ x+y+z = 6 \end{cases}$

Calculamos $-E1 + E2$ y $-E1 + E3 \begin{cases} x-y = -1 \\ y-z = -4 \\ 2y+z = 7 \end{cases} -2E2 + E3 \begin{cases} x-y = -1 \\ y-z = -4 \\ 3z = 15 \end{cases} \quad \mathbf{z = 5, y = 1, x = 0}$

El punto $A(0, 1, 5)$ es la intersección de la recta y el plano, y es el punto medio del punto p y el P' luego $P'(x, y, z)$ será $\frac{x+1}{2} = 0$, $\frac{y+2}{2} = 1$, $\frac{z+6}{2} = 5$ de donde, $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$.

$P'(-1, 0, 4)$.

b) $d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

La distancia entre los sensores es de $2\sqrt{3}$ u.

Pregunta 5.**5.1. [2 puntos]****a) [1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x$$

b) [1 punto] Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$ **Respuesta:**

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x = 1^\infty$ indeterminación calculamos $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right)}$ calculamos el exponente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{2x+1-2x+3}{2x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{4}{2x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x-3} = 2, \text{ por tanto}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x = e^2$$

b) Se trata de una integral con una función exponencial y otra trigonométrica, la resolvemos por

partes $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$, llamamos $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \cos x \, dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \cos x \, dx \text{ repetimos}$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \text{ de donde}$$

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - (e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx)$$

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - (e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx)$$

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{es decir}$$

$$I = e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx - e^x \cdot \cos x - I, \quad 2I = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x \quad \text{por tanto}$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + k.$$

Pregunta 5.**Pregunta 5. 2.****5.2. [2 puntos]** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1, \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$

Respuesta:

La función está definida y existe en todo $\mathcal{R}$, pues el denominador, $x - 1$ se hace 0 para $x = 1$ y aquí la función está definida para $x < 1$.

Continuidad: $f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}, \text{ ind, } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{cases} \quad \text{para que } f \text{ sea continua los límites}$$

laterales han de ser iguales $a + b = 2$.

Derivabilidad: Derivamos las dos partes de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'_-(1) = 1 \quad \text{y} \quad f'_+(1) = a \quad \text{las derivadas laterales han de ser iguales, } a = 1$$

Y de $a + b = 2$ tenemos $1 + b = 2$, $b = 1$, por tanto,

f es continua y derivable si $a = 1$ y $b = 1$.

$$\text{También podemos hacer: } f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1) - (x^2-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

 CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.		
<u>PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte</u>		
Pregunta 1. En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años. Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula: a) [1 punto] La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años. b) [1 punto] La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.		
Pregunta 2. En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma. a) [1 punto] Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima. b) [1 punto] La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t) dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.		
Pregunta 3. a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a. $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$ b) [0,5 puntos] ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.		

PARTE B (preguntas 4 y 5)**Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**

4.1. Se consideran los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(a, 1, 2)$, con a un número real.

a) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C .

b) [1,25 puntos] Determina los valores reales del parámetro a , para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

4.2. Sean los puntos del espacio $A(1, 2, -1)$, $B(3, 6, 1)$ y $C(m, m, m-2)$, donde m es un número real.

a) [0,75 puntos] Determina el valor de m para que los puntos A , B y C estén alineados.

b) [1,25 punto] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ a la recta que forman A , B y C .

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) [1 punto] Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, 4)$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y=2x-1$

b) [1 punto] Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

5.2. Resuelve los siguientes apartados:

a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ y } g(x) = -x + 4$$

b) [0,75 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

a) [1 punto] La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.

b) [1 punto] La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Respuesta:

a.1) X sigue una distribución $N(34, 6)$

$$\begin{aligned} \text{Nos piden calcular } P(28 < X < 46) &= (\text{tipificando}) = P\left(\frac{28-34}{6} < \frac{X-34}{6} < \frac{46-34}{6}\right) = P(-1 < Z < 2) = \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z > 1) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1)] = 0,9772 - [1 - 0,8413] = 0,8185 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona cogida al azar tenga entre 28 y 46 años, es de 0,8185.

a.2) Buscamos $K \in \mathbb{R}$, de manera que $P(X > K) = 0,1587$.

$$P(X > K) = (\text{tipificando}) = P\left(\frac{X-34}{6} > \frac{K-34}{6}\right) = P\left(Z > \frac{K-34}{6}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right)$$

$$0,1587 = 1 - P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right) ; P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413$$

Buscamos en el interior de la tabla

	0	0,1
0	0,5000	0,5040
0,1	0,5098	0,5146
0,2	0,5193	0,5239
0,3	0,5279	0,5324
0,4	0,5359	0,5404
0,5	0,5438	0,5482
0,6	0,5517	0,5561
0,7	0,5596	0,5639
0,8	0,5675	0,5717
0,9	0,5755	0,5796
1	0,5832	0,5873
1,1	0,5908	0,5948
1,2	0,5985	0,6024
1,3	0,6061	0,6100

De donde $\frac{K-34}{6} = 1,0 \rightarrow k = 40$

El 15,87 % de las personas tiene una edad superior a 40 años.



Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

a) [1 punto] Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.

b) [1 punto] La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t)dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

Respuesta:

a) Calculamos la derivada, igualamos a 0 y resolvemos

$$C'(t) = \frac{12 \cdot (t^2+4) - 12t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{-12t^2+48}{(t^2+4)^2} = 0 \rightarrow -12t^2 + 48 = 0 \rightarrow t = -2 \text{ y } t = 2$$

Como t es tiempo, $t = -2$ no es válido.

$$\begin{aligned} \text{Calculamos la segunda derivada } C''(t) &= \frac{-24t \cdot (t^2+4)^2 - (-12t^2+48) \cdot 2 \cdot 2t \cdot (t^2+4)}{(t^2+4)^4} = \\ &= \frac{-24t \cdot (t^2+4) - (-12t^2+48) \cdot 2 \cdot 2t}{(t^2+4)^3} = \frac{(24t^3-288t)}{(t^2+4)^3}; \quad C''(2) = \frac{(24 \cdot 2^3 - 288 \cdot 2)}{(2^2+4)^3} < 0, \text{ máximo.} \end{aligned}$$

En $t = 2$, a las 2 horas, la concentración en sangre es máxima.

b) Debemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{1}{6-0} \cdot \int_0^6 \frac{12t}{t^2+4} dt &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 \frac{6 \cdot 2t}{t^2+4} dt = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot [\ln(t^2+4)]_0^6 = \ln(6^2+4) - \ln(0^2+4) = \\ &= \ln 40 - \ln 4 = \ln \frac{40}{4} = \ln 10 = 2,3 \end{aligned}$$

La concentración media entre las 0 y las 6 horas es de 2,3 mg/l.

Pregunta 3.

a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) [0,5 puntos] ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

Respuesta:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F1' = F1 \\ F2' = -F1 + F2 \\ F3' = -F1 + F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 2-a & 2a-a^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F1'' = F1' \\ F2'' = F2' \\ F3' = -F2' + F3' \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ el determinante de esta matriz es } = a \cdot (a-2), \quad a \cdot (a-2) = 0, \quad a = 0 \text{ o } a = 2.$$

1. Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, $r(A) = 3$

$$2. \text{ Si } a = 0, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$3. \text{ Si } a = 2, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, $r(A) = 3$. Si $a = 0$ o $a = 2$, $r(A) = 2$.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot (a-2) \neq 0 \text{ cuando } a \neq 0 \text{ y } a \neq 2$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, la matriz A tiene inversa.

Pregunta 4.

4.1. Se consideran los puntos A(1, 1, 0), B(2, 0, 1), C(0, 2, 1) y D(a, 1, 2), con a un número real.

a) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) [1,25 puntos] Determina los valores reales del parámetro a, para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

Respuesta:

a) Consideramos el punto A(1, 1, 0) y los vectores $\overrightarrow{AB}(1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 1)$

La ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(x-1) - (y-1) + z - z - (x-1) - (y-1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x - 2y + 4 = 0 \rightarrow x + y - 2 = 0$$

La ecuación del plano que pasa por A, B y C es $x + y - 2 = 0$.

b) Consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}(1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(a-1, 0, 2)$

El volumen del tetraedro viene dado por la expresión $V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |(2 - a + 1 - a + 1 - 2)| = \frac{1}{6} |2 - 2a|$$

Queremos que el volumen sea 3, luego $\frac{1}{6}(2 - 2a) = 3 \rightarrow 2 - 2a = 18 \rightarrow 2a = -16 \rightarrow a = -8$
 $\frac{1}{6}(2 - 2a) = -3 \rightarrow 2 - 2a = -18 \rightarrow 2a = 20 \rightarrow a = 10$

El volumen del tetraedro determinado por los 4 puntos es de 3 unidades cúbicas cuando $a = -8$ o $a = 10$.

Pregunta 4.

4.2. Sean los puntos del espacio $A(1, 2, -1)$, $B(3, 6, 1)$ y $C(m, m, m-2)$, donde m es un número real.

a) [0,75 puntos] Determina el valor de m para que los puntos A , B y C estén alineados.

b) [1,25 punto] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ a la recta que forman A , B y C .

Respuesta:

- a)** Consideramos los vectores $\overline{AB}(2, 4, 2)$, $\overline{AC}(m-1, m-2, m-1)$, para que los puntos estén alineados los vectores han de ser dependientes, es decir, sus componentes han de ser proporcionales $\frac{m-1}{2} = \frac{m-2}{4} = \frac{m-1}{2} \rightarrow 4(m-1) = 2(m-2)$ y $2(m-2) = 4(m-1) \rightarrow$
 $\rightarrow 4m - 2m = -4 + 4 \rightarrow m = 0$, $2m - 4m = -4 + 4 \rightarrow m = 0$

Para $m = 0$ los tres puntos están alineados.

- b)** Como para $m = 0$ los 3 puntos están alineados, podemos coger 2 cualesquiera para determinar la recta, consideramos el vector $\overline{AB}(2, 4, 2) \equiv \vec{V}$, vector director de la recta, y el punto $A(1, 2, -1)$.

La distancia del punto P a la recta determinada por A y $\vec{V}$ viene dada por la expresión

$$d(P, r) = \frac{|\overline{AP} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|}; \quad \overline{AP} = (1, -2, 2);$$

$$|\overline{AP} \times \vec{V}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-4i + 4k + 4j + 4k - 8i - 2j| = |-12i + 2j + 8k| =$$

$$= \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{212};$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overline{AP} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{212}}{\sqrt{24}} = 2,97$$

La distancia del punto P a la recta determinada por los puntos A , B y C , es de 2,97 u.

Pregunta 5.

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1 punto] Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, 4)$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 1$

b) [1 punto] Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = 0$.

Respuesta:

a) Extremo relativo en $(1, 4)$, luego $f(1) = 4$ y $f'(1) = 0$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Pendiente de $y = 2x - 1$ es $m = 2$, luego, $f'(3) = 2$, escribimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(1) = 4 &\rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \rightarrow a + b + c = 3 & E1' = E1 \\ f'(1) = 0 &\rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \rightarrow 2a + b = -3 & \rightarrow E2' = -2E1 + E2 \rightarrow \\ f'(3) = 2 &\rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 2 \rightarrow 6a + b = -25 & E3' = -6E1 + E3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ -b - 2c = -9 \\ -5b - 6c = -43 \end{array} \right. \begin{array}{l} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = -5E2' + E3' \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ -b - 2c = -9 \\ 4c = 2 \rightarrow c = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$-b - 2c = -9 \rightarrow -b - 2 \cdot \frac{1}{2} = -9 \rightarrow b = 8$$

$$a + b + c = 3 \rightarrow a + 8 + \frac{1}{2} = 3 \rightarrow a = -\frac{11}{2}$$

Los coeficientes valen: $a = -\frac{11}{2}$, $b = 8$ y $c = \frac{1}{2}$.

La función quedaría $f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 8x + \frac{1}{2}$.

b) La ecuación de la recta normal a la función en el punto $x = 0$ es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0); \quad f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 8 = 3x^2 + x + 8;$$

$$f(0) = 0^3 - \frac{11}{2} \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 + 8 = 8;$$

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0) \rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}x \rightarrow 8y - 4 = -x \rightarrow 8y + x - 4 = 0$$

La ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = 0$ es $8y + x - 4 = 0$.

Pregunta 5.**5.2.** Resuelve los siguientes apartados**a) [1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

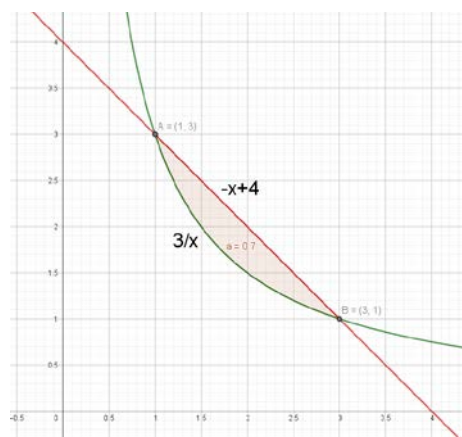
$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ y } g(x) = -x + 4$$

b) [0,75 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$ **Respuesta:****a)** La gráfica de $f(x) = \frac{3}{x}$ es una hipérbola que, en el primer cuadrante pasa por los puntos (1, 3) y (3, 1)Y la de $g(x) = -x + 4$ es una recta que pasa por los puntos (0, 4) y (4, 0).Las gráficas se cortan en $\frac{3}{x} = -x + 4 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$; (1, 3) y (3, 1)

Como la recta está por encima de la hipérbola

El área viene dada por:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(-x + 4 - \frac{3}{x} \right) dx &= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 3\ln x \right]_1^3 = \\ &= \left(-\frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 - 3\ln 3 \right) - \left(-\frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 - 3\ln 1 \right) = \\ &= \frac{15}{2} - 3\ln 3 - \frac{7}{2} = 4 - 3\ln 3 = 0,7 \end{aligned}$$

**El área del recinto limitado por las gráficas es de 0,7 u².****b)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - \operatorname{sen} 0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos L'Hôpital y calculamos: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos L'Hôpital y calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{2} = \frac{e^0 + \operatorname{sen} 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

