Matemáticas II

Selectividad 2026

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

Coordinador: Álvaro Garmendia Antolín

www.apuntesmareaverde.org.es



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-055911

Fecha y hora de registro: 2014-10-30 16:19:59.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

Textos Marea Verde

Antes **Selectividad**, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

 **Reconeixement – NoComercial – CompartirIgual (by-nc-sa).**
No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

 **Reconocimiento** (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

 **No Comercial (Non commercial)**: La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

 **Compartir Igual (Share alike):** La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9





MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Fernando Merchán Murillo y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS CURSO 2024–2025 MATEMÁTICAS II CURSO: **2026**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
g) Se proporciona la tabla de la normal. Se permite el uso de regla

PARTE OBLIGATORIA

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y esta coronada por un semicírculo.



Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $\boldsymbol{A(1,2,0)}, \boldsymbol{B(2,m,1)}, \boldsymbol{C(3,4,2)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{D(1,-1,m)}$.

a) Halla los valores de $\boldsymbol{m}$ para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.

b) Para $\boldsymbol{m=1}$, calcula el área del triángulo de vértices $\boldsymbol{A,B,C}$ y el volumen del tetraedro de vértices $\boldsymbol{A,B,C,D}$.

PARTE OPTATIVA

EJERCICIO 3.1:

Considera el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a - 5 \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores de $\boldsymbol{a}$.

b) Para $\boldsymbol{a = 0}$ resuelve el sistema, si es posible

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

EJERCICIO 3.2:

Considera la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$ que cumple $|\boldsymbol{A}|=-\mathbf{2}$.

a) Calcula $\begin{vmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{4} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2} & \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{8} & \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{4}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}$

b) Calcula $\left|\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}})^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}\right|$

Ejercicio 4.1:

Dada la función $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\mathbf{8}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}-\mathbf{4}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}}$, halla la primitiva de $\boldsymbol{f}$ cuya gráfica tiene por tangente a la recta $\boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{12}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2})$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. (Sugerencia: puedes hacer el cambio $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{t}$).

Ejercicio 4.2:

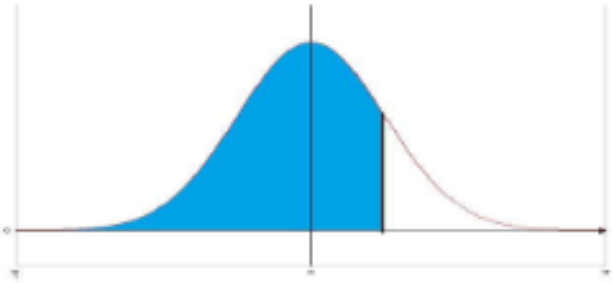
Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.

Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0,1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.



Solución:

Antes de empezar definamos las variables que vamos a utilizar:

- x: La base del rectángulo.
- y: Altura del rectángulo.
- r: Radio del semicírculo superior, teniendo en cuenta que como x es base del rectángulo, también es diámetro del semicírculo superior, por lo tanto $r = \frac{x}{2}$

El perímetro queda:

$$x + 2y + \frac{2\pi r}{2} = 8 \rightarrow x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 8 \rightarrow 2y = 8 - x - \frac{\pi}{2}x \rightarrow 2y = 8 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$$

$$\rightarrow 2y = 8 - \left(\frac{2+\pi}{2}\right)x \rightarrow y = 4 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x$$

La función a optimizar es la función Área: $A(x,y) = xy + \frac{\pi r^2}{2}$, sustituyendo la igualdad anterior y el valor der radio, la función queda:

$$A(x) = x \cdot \left[4 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x\right] + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = 4x - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 \rightarrow 4x + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2$$

$$A'(x) = 4 + 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x = 4 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2+\pi}{2}\right)x = 0 \rightarrow 4 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2+\pi}{2}\right)x \rightarrow$$

$$4 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4+2\pi}{4}\right)x \rightarrow 4 = -\left(\frac{\pi - 4 - 2\pi}{4}\right)x \rightarrow 4 = -\left(\frac{-4-\pi}{4}\right)x \rightarrow 4 = \frac{4+\pi}{4}x \rightarrow$$

$$x = \frac{16}{4+\pi}\ metros$$

Comprobamos que es máximo con:

$$A''(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2+\pi}{2} = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{4} = \frac{-4-\pi}{4} \rightarrow A''\left(\frac{16}{4+\pi}\right) < 0$$

$$y = 4 - \left(\frac{2+\pi}{4}\right) \cdot \frac{16}{4+\pi} = 4 - \frac{4(2+\pi)}{4+\pi} = \frac{16 + 4\pi - 8 - 4\pi}{4+\pi} = \frac{8}{4+\pi}\ metros$$

Por lo tanto, las dimensiones que hacen máxima la entrada de luz son

$$x = \frac{16}{4+\pi}\ m.\ e\ y = \frac{8}{4+\pi} m.$$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $\boldsymbol{A(1,2,0)}, \boldsymbol{B(2,m,1)}, \boldsymbol{C(3,4,2)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{D(1,-1,m)}$.

a) Halla los valores de $\boldsymbol{m}$ para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.

b) Para $\boldsymbol{m=1}$, calcula el área del triángulo de vértices $\boldsymbol{A,B,C}$ y el volumen del tetraedro de vértices $\boldsymbol{A,B,C,D}$.

Solución:

a) Calculamos 3 vectores $\overrightarrow{AB} = (1, m-2, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (2,2,2)$ y $\overrightarrow{AD} = (0,-3,m)$

Si A, B, C y D son coplanarios $\rightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0 \rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2m - 6 + 6 - 2m(m-2) = 0 \rightarrow 2m - 2m^2 + 4m = 0 \rightarrow -2m^2 + 6m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, para $\boldsymbol{m=0}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{m=3}$, los puntos $\boldsymbol{A,B,C}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{D}$ son coplanarios

b) Para $m = 1$ los vectores quedan de la siguiente forma: $\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)$; $\overrightarrow{AC} = (2,2,2)$ y $\overrightarrow{AD} = (0,-3,1)$

- El área del triángulo:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 2k + 2k - 2i - 2j = (-4,0,4) \rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto el área es:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}ud^2$$

- El volumen del tetraedro:

$$V = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}(-2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}ud^3$$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

EJERCICIO 3.1:

Considera el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a - 5 \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores de a.

b) Para $a = 0$ resuelve el sistema, si es posible

Solución:

a) Escribimos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{pmatrix}$ y la ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3-a & a-5 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$|A| = 3(1-a)(3-a) - 24 = 3(3 - a - 3a + a^2) - 24 = a^2 - 4a + 3 - 8 =$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -1 \end{cases}$$

- Para $a \neq 5$ y $a \neq -1$, $|A| = 0 \rightarrow rango\,(A) = 3 = rango\,(A^*) = n.incóg.$

Sistema Compatible Determinado (tiene una única solución)

- Para $a = 5$:

Estudiamos el rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |3| \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \rightarrow rango\,(A) = 2$$

Estudiamos el rango de A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 25 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\ (Filas\ 2\ y\ 3\ linealmente\ dependientes)$$

$$rango\,(A) = 2 = rango\,(A^*) < n.incógnitas$$

Sistema Compatible Indeterminado (tiene infinitas soluciones)

- Para $a = -1$:

Estudiamos el rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |3| \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \rightarrow rango\,(A) = 2$$

BY NC SA

Estudiamos el rango de A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

$$rango\,(A) = 2 \neq rango\,(A^*) = 3$$

Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos para $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \rightarrow Ecuación\ 1: y = 3x$$

Resolvemos para la 2ª y 3ª ecuación por reducción:

$$\begin{cases} (y + 2z = 0) \cdot (-4) \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4y - 8z = 0 \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \rightarrow -5z = -5 \rightarrow z = 1$$

Del a 2ª ecuación tenemos:

$$y + 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow y = -2$$

Y finalmente de la 1ª ecuación:

$$-2 = 3x \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto la solución del Sistema Compatible Determinado es:

$$(x, y, z) = (-\frac{2}{3}, -2, 1)$$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

EJERCICIO 3.2:

Considera la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$ que cumple $|\boldsymbol{A}|=-\mathbf{2}$.

a) Calcula $\begin{vmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{4} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2} & \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{8} & \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{4}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}$

b) Calcula $\left|\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}})^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}\right|$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{4} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2} & \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{8} & \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{4}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{4} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{8} & \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{4}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{4} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{8} & \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{4}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}=(-\mathbf{1})\cdot\mathbf{4}\begin{vmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{4} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}-\mathbf{0}=$$

$$=-\mathbf{4}\cdot(-\mathbf{1})\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}=\mathbf{4}\cdot(-\mathbf{1})\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}=-\mathbf{4}\cdot(-\mathbf{2})=\mathbf{8}$$

b) $$\left|\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}})^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\right|\cdot\left|(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}})^{\mathbf{2}}\right|\cdot|\boldsymbol{A}|=\frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}|^{\mathbf{2}}\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{\mathbf{2}}=(-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}$$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 4.1:

Dada la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}}$, halla la primitiva de $\boldsymbol{f}$ cuya gráfica tiene por tangente a la recta $\boldsymbol{y = 2x + 12ln(2)}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = 0}$. (Sugerencia: puedes hacer el cambio $\boldsymbol{e^x = t}$).

Solución:

$$\boldsymbol{F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{(8-4e^x)e^x}{1+e^x}dx = \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases} = \int \frac{8-4t}{1+t}dt =}$$

$$\boldsymbol{= -4\int \frac{t-2}{1+t}dt = -4\int \frac{t+1-3}{t+1}dt = -4\int \left(1 - \frac{3}{t+1}\right)dt = -4(t - 3ln|t+1|) =}$$

$$\boldsymbol{= -4(e^x - 3\,ln(e^x+1)) + C = F(x)}$$

Como el punto de tangencia cumple que: $\boldsymbol{F(0) = y(0)}$

$$\boldsymbol{y(0) = 2 \cdot 0 + 12\,ln(2) = 12\,ln(2)}$$

$$F(0) = -4(e^0 - 3\ln(e^0+1)) + C = -4(1 - 3\ln(2)) = -4 + 12\ln(2)) +$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{-4 + 12\,ln(2) + C = 12\,ln(2) \to C = 4}$$

Finalmente, la primitiva que buscamos será:

$$\boldsymbol{F(x) = -4(e^x - 3\,ln(e^x+1)) + 4}$$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

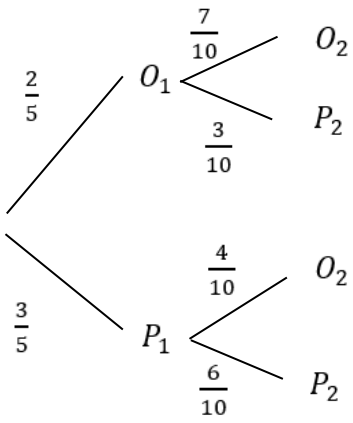
Problema 4.2:

Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.

Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

Solución: Planteamos el diagrama de árbol:



a) $\boldsymbol{P(A_2/P_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}}$

b) $\boldsymbol{P(P_1A_2) = \frac{P(P_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}} = \frac{6}{13}}$

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS CURSO 2024–2025 MATEMÁTICAS II CURSO: **2026**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

Problema 1:

Parte obligatoria

Ejercicio 1. 2,5 puntos

La velocidad de crecimiento de la población de peces en un lago al cabo del tiempo, t en años, viene dada por:

```
P'(t) = 20 t e^(-t/10)
```

siendo P(t) la población de peces. Sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, calcula cuántos tendrá el lago transcurridos 10 años.

Problema 2:

Ejercicio 2. 2,5 puntos

Se sabe que la función f: R -> R definida por:

```
f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c
```

verifica que f(1)=0, x=0 es un punto crítico de la función y la recta tangente a su gráfica en x=-1 es paralela a la recta de ecuación y+3x=0. Determina a, b y c.

Problema 3.1:

Ejercicio 3.1. 2,5 puntos

Una familia va al mercado semanalmente y compra tres tipos de alimentos: verdura, carne y pescado. El año pasado, en el que gastó 115 € semanales, observó que pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura. En 2026 se ha notado un incremento de precios pues ahora gasta 19 € más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12 %, la carne un 15 % y el pescado un 20 %. Calcula el precio que la familia paga semanalmente en 2026, por cada tipo de alimento.

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3.2:

Ejercicio 3.2. 2,5 puntos

Considera las matrices:

```
A = [[2, 2], [3, 4]]      B = [[3, 1], [2, 2]]
```

a) Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica:

```
A^3 X B^t = 5 B^2 A^(-1)
```

b) Determina, si existe, una matriz Y que verifica:

```
A^3 Y B^(-1) = A^2
```

Problema 4:

Parte optativa. Bloque con optatividad 2

Ejercicio 4.1. 2,5 puntos

Considera la recta r y el plano π:

```
r: x = -2λ,  y = -1 + 2λ,  z = 3 + 2λ
π: x - 2y + z - 3 = 0
```

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π.

b) Halla el punto simétrico de P(1,1,1) respecto de π.

Ejercicio 4.2. 2,5 puntos

Tres máquinas A, B y C producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de los coches que se producen en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %, respectivamente.

a) Seleccionamos un coche al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Tomamos, al azar, un coche y resulta ser defectuoso. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido dicho coche?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Parte obligatoria

Ejercicio 1. 2,5 puntos

La velocidad de crecimiento de la población de peces en un lago al cabo del tiempo, t en años, viene dada por:

```
P'(t) = 20 t e^(-t/10)
```

siendo P(t) la población de peces. Sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, calcula cuántos tendrá el lago transcurridos 10 años.

Solución:

La función $P(t)$ es la integral de la función $P'(t)=20te^{\frac{-t}{10}}$.

$$P(t)=\int P'(t)\,dt=\int 20te^{\frac{-t}{10}}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=20t\rightarrow du=20dt\\ dv=e^{\frac{-t}{10}}dt\rightarrow v=\int e^{\frac{-t}{10}}dt=-10e^{\frac{-t}{10}}\end{array}\right\}=$$

$$=20t\left(-10e^{\frac{-t}{10}}\right)-\int 20\left(-10e^{\frac{-t}{10}}\right)dt=-200te^{\frac{-t}{10}}+200\int e^{\frac{-t}{10}}dt=$$

$$=-200te^{\frac{-t}{10}}+200\left(-10e^{\frac{-t}{10}}\right)=-200te^{\frac{-t}{10}}-2000e^{\frac{-t}{10}}=\boxed{-200(t+10)e^{\frac{-t}{10}}+K}$$

La población de peces en el lago viene dada por la expresión $P(t)=-200(t+10)e^{\frac{-t}{10}}+K$. Hallamos el valor de K sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, es decir, $P(0)=1000$.

$$\left.\begin{array}{l}P(t)=-200(t+10)e^{\frac{-t}{10}}+K\\ P(0)=1000\end{array}\right\}\Rightarrow 1000=-200\cdot 10\cdot e^{\frac{-0}{10}}+K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000=-2000+K\Rightarrow \boxed{K=3000}$$

La población de peces en el lago tiene la expresión $P(t)=-200(t+10)e^{\frac{-t}{10}}+3000$.

¿Cuántos peces tendrá el lago transcurridos 10 años?

$$P(10)=-200(10+10)e^{\frac{-10}{10}}+3000=-200\cdot 20\cdot e^{-1}+3000\simeq 1528.48$$

Transcurridos 10 años el lago tendrá, aproximadamente, 1528 peces.

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 2:

Ejercicio 2. 2,5 puntos

Se sabe que la función f: R -> R definida por:

```
f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c
```

verifica que f(1)=0, x=0 es un punto crítico de la función y la recta tangente a su gráfica en x=-1 es paralela a la recta de ecuación y+3x=0. Determina a, b y c.

Solución:

Aplicamos que $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(x)=x^3+ax^2+bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow 0=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \Rightarrow \boxed{a+b+c=-1}$$

Si $x=0$ es un punto crítico de la función entonces la derivada de la función se anula para este valor, es decir, $f'(0)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

Si la recta tangente a su gráfica en $x=-1$, es paralela a la recta de ecuación $y=-3x$ entonces deben tener la misma pendiente. La pendiente de la recta $y=-3x$ es -3 y la de la recta tangente es $f'(-1)$. Se debe cumplir que $f'(-1)=-3$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax \\ f'(-1)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3=3\cdot(-1)^2+2a(-1) \Rightarrow -3=3-2a \Rightarrow -2a=-6 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

Sustituimos los valores obtenidos en la primera ecuación y determinamos el valor de c.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=-1 \\ b=0 \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+0+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-4}$$

Los valores buscados son $a=3$, $b=0$ y $c=-4$

BY NC SA

Problema 3.1:

Ejercicio 3.1. 2,5 puntos

Una familia va al mercado semanalmente y compra tres tipos de alimentos: verdura, carne y pescado. El año pasado, en el que gastó 115 € semanales, observó que pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura. En 2026 se ha notado un incremento de precios pues ahora gasta 19 € más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12 %, la carne un 15 % y el pescado un 20 %. Calcula el precio que la familia paga semanalmente en 2026, por cada tipo de alimento.

Solución:

Llamamos "x", "y", "z" a lo que gasta la familia semanalmente en 2025 en verdura, carne y pescado.

Gastó 115 € semanales → $x+y+z=115$.
Pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura → $z=2x$.
Ahora gasta 19 € más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12%, la carne un 15% y el pescado un 20% → $0.12x+0.15y+0.20z=19$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=115 \\ z=2x \\ 0.12x+0.15y+0.20z=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2x=115 \\ 0.12x+0.15y+0.20\cdot 2x=19 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=115 \\ 0.52x+0.15y=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=115-3x \\ 0.52x+0.15y=19 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.52x+0.15\cdot(115-3x)=19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.52x+17.25-0.45x=19 \Rightarrow 0.07x=1.75 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1.75}{0.07}=25} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=115-3\cdot 25=40} \\ \boxed{z=2\cdot 25=50} \end{cases}$$

La familia gastaba semanalmente 25 €, 40 € y 50 € en verdura, carne y pescado.
En el año 2026 han subido los precios y la familia gasta $1.12 \cdot 25 = 28$ €, $1.15 \cdot 40 = 46$ € y $1.2 \cdot 50 = 60$ € en verdura, carne y pescado.
En el año 2026 la familia gasta semanalmente 28 €, 46 € y 60 € en verdura, carne y pescado, respectivamente.

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 3.2:

Ejercicio 3.2. 2,5 puntos

Considera las matrices:

```
A = [[2, 2], [3, 4]]      B = [[3, 1], [2, 2]]
```

a) Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica:

```
A^3 X B^t = 5 B^2 A^(-1)
```

b) Determina, si existe, una matriz Y que verifica:

```
A^3 Y B^(-1) = A^2
```

Solución:

a) Hallamos el valor de los determinantes de las matrices A y B.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8-6=2 \qquad |B|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6-2=4$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|A^3XB^t|=|5B^2A^{-1}|\Rightarrow |A|^3|X||B^t|=|5B^2||A^{-1}|\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B \text{ es una matriz de orden 2}\\ B^2 \text{ es una matriz de orden 2}\\ |5B^2|=5^2|B|^2\\ |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}\\ |B^t|=|B|\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A|^3|X||B|=25|B|^2\frac{1}{|A|}\Rightarrow |X|=\frac{25|B|^2}{|A||A|^3|B|}=\frac{25|B|}{|A|^4}=\frac{25\cdot 4}{2^4}=\boxed{\frac{25}{4}}$$

b) Despejamos Y en la igualdad.

$$A^3YB^{-1}=A^2\Rightarrow A^3YB^{-1}B=A^2B\Rightarrow A^3Y\cdot I=A^2B\Rightarrow A^3Y=A^2B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AA^2Y=A^{-1}AAB\Rightarrow IA^2Y=AB\Rightarrow A^{-1}AAY=A^{-1}AB\Rightarrow AY=B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AY=A^{-1}B\Rightarrow \boxed{Y=A^{-1}B}$$

La matriz Y existe y será el resultado de la operación $Y=A^{-1}B$. Determinamos la inversa de la matriz A y hallamos la expresión de la matriz Y.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8-6=2\neq 0 \qquad A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$Y=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12-4 & 4-4\\ -9+4 & -3+4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -5/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

La matriz Y que cumple la ecuación $A^3YB^{-1}=A^2$ tiene la expresión $Y=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -5/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 4.1:

Parte optativa. Bloque con optatividad 2

Ejercicio 4.1. 2,5 puntos

Considera la recta r y el plano π:

```
r: x = -2λ,  y = -1 + 2λ,  z = 3 + 2λ
π: x - 2y + z - 3 = 0
```

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π.

b) Halla el punto simétrico de P(1,1,1) respecto de π.

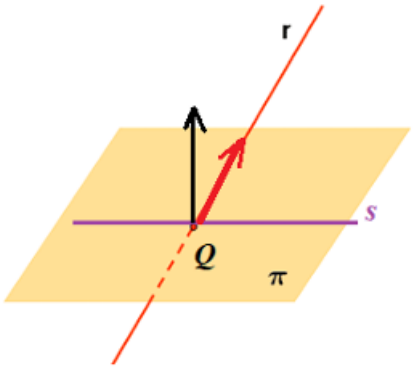
Solución:

a) Determinamos primero la posición relativa de la recta r y el plano π. Comprobamos si el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta.

$$r\equiv\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=3+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(0,-1,3)\\ \vec{v}_r=(-2,2,2)\end{cases}$$

$$\pi\equiv x-2y+z-3=0\Rightarrow\vec{n}=(1,-2,1)$$

$$\vec{v}_r\cdot\vec{n}=(-2,2,2)(1,-2,1)=-2-4+2=-4\neq 0$$



Como el producto escalar es distinto de cero la recta ni está contenida en el plano ni es paralela al plano. La recta corta al plano en un punto. Hallamos el punto Q de corte de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=3+2\lambda\end{cases}\\ \pi\equiv x-2y+z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2\lambda-2(-1+2\lambda)+3+2\lambda-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-2\lambda}+2-4\lambda+\cancel{3}+\cancel{2\lambda}-\cancel{3}=0\Rightarrow -4\lambda=-2\Rightarrow\lambda=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\dfrac{1}{2}=-1\\ y=-1+2\dfrac{1}{2}=0\Rightarrow\boxed{Q(-1,0,4)}\\ z=3+2\dfrac{1}{2}=4\end{cases}$$

La recta s que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π contiene el punto $Q(-1,0,4)$ y tiene como vector director el producto vectorial del vector normal del plano (la recta s está contenida en el plano) y el vector director de la recta r (perpendicular a la recta r).

BY NC SA
Autores: Fernando Merchán y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(-2,2,2)\to \vec{u_r}=\dfrac{1}{2}\vec{v_r}=(-1,1,1)\\ \vec{n}=(1,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u_r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=$$

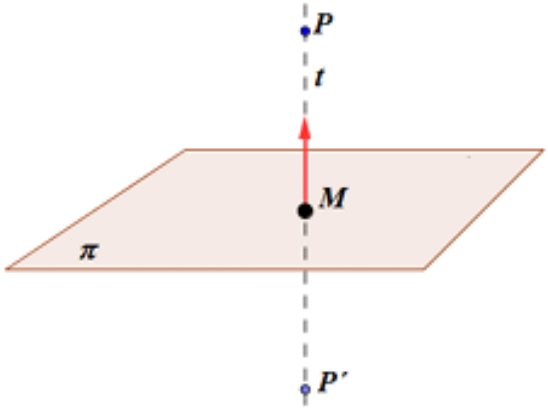
$$=i+j+2k-k+j+2i=3i+2j+k=(3,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}Q(-1,0,4)\in s\\ \vec{w_s}=\vec{u_r}\times\vec{n}=(3,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=-1+3\lambda\\ y=2\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R}\\ z=4+\lambda\end{cases}}$$

La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π es

$$s:\begin{cases}x=-1+3\lambda\\ y=2\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R}.\\ z=4+\lambda\end{cases}$$

b) Hallamos el punto P´ simétrico del punto P respecto del plano π obteniendo la recta t perpendicular al plano que pasa por P, luego el punto M de corte de recta y plano. Y por último hallamos el punto P´.



Hallamos la recta t. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{w_t}=\vec{n}=(1,-2,1)\\ P(1,1,1)\in t\end{array}\right\}\Rightarrow t:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta t y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}t:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}\\ \pi\equiv x-2y+z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\alpha-2(1-2\alpha)+1+\alpha-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\alpha-2+4\alpha+1+\alpha-3=0\Rightarrow 6\alpha-3=0\Rightarrow 6\alpha=3\Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = 1 - 2\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)} \\ z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

El punto P´ se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = (2, -1.2)$$

El punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de π tiene coordenadas $(2, -1.2)$.

BY NC SA

Problema 4.2:

Ejercicio 4.2. 2,5 puntos

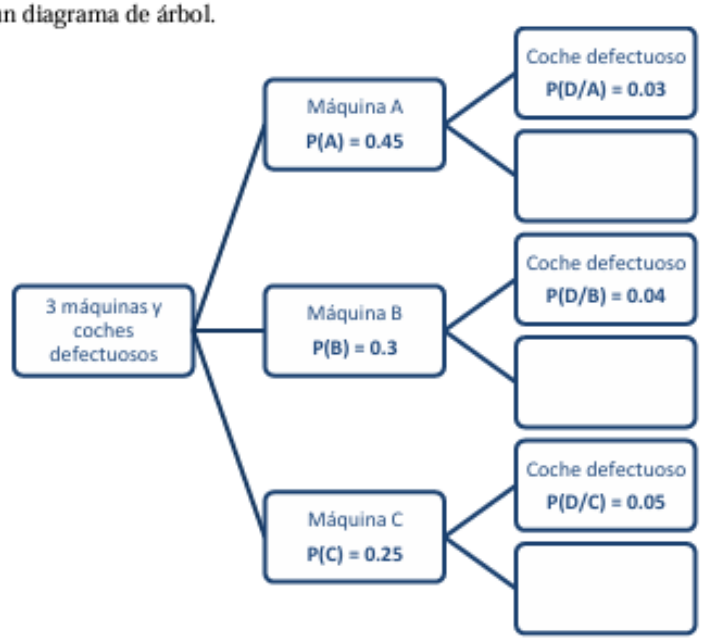
Tres máquinas A, B y C producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de los coches que se producen en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %, respectivamente.

a) Seleccionamos un coche al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Tomamos, al azar, un coche y resulta ser defectuoso. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido dicho coche?

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos elegir un coche fabricado por la máquina A, B o C, respectivamente. Y llamamos D a "el coche elegido es defectuoso".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)\,P(D/A) + P(B)\,P(D/B) + P(C)\,P(D/C) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = \boxed{0.038}$$

La probabilidad de que al elegir un coche al azar este sea defectuoso tiene un valor de 0.038.

b) Debemos calcular $P(A/D)$, $P(b/D)$ y $P(C/D)$ para averiguar que es más probable.
Son probabilidades a posteriori. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\,P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.038} = \frac{27}{76}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)\,P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.04}{0.038} = \frac{24}{76}$$

BY NC SA

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D/C)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.038}=\frac{25}{76}$$

Es más probable que el coche defectuoso haya sido fabricado por la máquina A.

$$\frac{27}{76}>\frac{25}{76}>\frac{24}{76}\Rightarrow P(A/D)>P(C/D)>P(B/D)$$

BY NC SA

Matemáticas II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Universidad Zaragoza 1542	**PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)** CURSO: **2026** EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS II** TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO (véanse las distintas partes del examen)

Problema 1:

En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k, b_k y c_k, respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k+1$ y en el mes anterior, k:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial (k = 0) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donde r a_0, b_0 y c_0, son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in N$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

Problema 2:

Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0, \infty)$ tal que

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 2e - 2$$

a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

b) (1 punto) halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Justifica que

$$f(x) \geq 0 \, , \forall x \geq 0$$

Problema 3:

Sean $\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?

b) (1 punto) Calcula para $d = -2$, los puntos de corte de π y π_d

Problema 4:

Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 4.1

Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

Problema 4.2

En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?

b) *(1 punto)* Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?

c) *(0,5 puntos)* El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

Problema 5:

Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 5.1

(2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. la universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes.

Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

Problema 5.2

(2 puntos) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}-e^{x}}{1-cosx}$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área con la expresión $\acute{A}rea = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$.
- Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $\acute{A}rea = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $Volumen = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D puede ser obtenido por la expresión

$$Volumen = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}.$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por $a_k, b_k \; y \; c_k$, respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k \; + \; 1$ y en el mes anterior, k:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* Si en el instante inicial (k = 0) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) *(0,5 puntos)* Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \; M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donde $a_0, b_0 \; y \; c_0$, son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) *(1 punto)* Calcula M^k con $k \; \in \; N$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

Solución:

a) Para $k + 1 = 2 : \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \; M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

$$M^2 = M \, . M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 434 \end{pmatrix}$$

Dos meses después habrá 100 ejemplares de la especie A, 324 de la especie B y 434 de la especie C

b) Razonamos por inducción sobre k

Para $k = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \; M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ Para $k \; = 1 \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \; M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

Suponemos el resultado cierto para $k = n - 1 \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \; M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

veamos que también lo es para $k = n$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN www.apuntesmareaverde.org.es Textos Marea Verde

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M\, M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente también lo es . Luego

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{k+1}} \\ \boldsymbol{b_{k+1}} \\ \boldsymbol{c_{k+1}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M^k} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \\ \boldsymbol{c_0} \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

c) Razonamos igualmente por inducción

Para $k = 1$ $\quad M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para $k = 2$ $\quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ como hemos visto en el apartado anterior

Suponemos que se cumple para $k = n$ $\quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

veamos que también lo es para $n + 1$

$$M^{n+1} = M^n . M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Luego } \boldsymbol{M^k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

Por todo lo que hemos visto

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ ka_0 + b_0 \\ ka_0 + c_0 \end{pmatrix}$$

El número de ejemplares de las especies A, B y C después de k meses es

$a_0 \quad ka_0 + b_0 \quad y \quad ka_0 + c_0$ respectivamente.

Calculamos el límite cuando k tiende a infinito de estos valores para deducir lo que ocurre con el paso del tiempo

$$\lim_{k\to\infty} a_0 = a_0 \qquad \lim_{k\to\infty} (ka_0 + b_0) = \infty\, . a_0 + b_0 = \infty \qquad \lim_{k\to\infty} (ka_0 + c_0) = \infty\, . a_0 + b_0 = \infty$$

Ya que a_0, b_0, c_0 son constantes positivas . podríamos utilizar por ejemplo las que aparecen en el apartado a), pero no necesitamos su valor.

Con el paso del tiempo, la especie A mantiene un número fijo de ejemplares que coincide con el nº de ejemplares que hay en el estado inicial . Las especies B y C crecen indefinidamente, podríamos decir que tienden a ser plaga

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 2:

Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0,\infty)$ tal que

$$f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \forall x>0 \quad \text{y} \quad f(1)=2e-2$$

a) *(1 punto)* Calcula $f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

b) *(1 punto)* halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Justifica que

$$f(x)\geq 0\,,\forall x\geq 0$$

Solución:

a) $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$.

Calculamos el conjunto de todas las primitivas de $f'(x)$ que es la integral indefinida

$$\int f'(x)dx=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\underbrace{=}_{*}2\int e^t\,dt=2e^t+C\underbrace{=}_{*}2e^{\sqrt{x}}+C$$

$*$ Haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ con el que $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dt$

$$\left.\begin{matrix} f(1)=2e-2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(1)=2e-2=2e^{\sqrt{1}}+C \Rightarrow 2e-2=2e+C\Rightarrow C=-2$$

Luego $f(x)=2e^{\sqrt{x}}-2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2e^{\sqrt{x}}-2\right)=2e^0-2=0=f(0)$$

$$\boldsymbol{f(x)=2e^{\sqrt{x}}-2} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0}$$

b) f es derivable en $(0,\infty)$ y $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ en este intervalo

- $g(x)=e^x>0\ \ \forall x\in\mathbb{R} \ \Rightarrow\ e^{\sqrt{x}}>0\ \ \forall x\in(0,\infty)$
- $\sqrt{x}>0\ \ \forall x\in(0,\infty)$

$\Big\}\ \Rightarrow f'(x)>0\ \ \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es creciente en $(0,\infty)$

- f es creciente en $(0,\infty)\Rightarrow f(0)=0<f(x)$ si $0<x$
- $f(0)=0$

Luego $f(x)\geq 0\,,\forall x\geq 0$

Hay un único intervalo de monotonía de f. Es $(0,\infty)$ en el que f es creciente.

$$\boldsymbol{f(x)\geq 0\,,\forall x\geq 0}$$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN



www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 3:

Sean $\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$

c) *(1 punto)* ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?

d) *(1 punto)* Calcula para $d = -2$, los puntos de corte de π y π_d

Solución:

a) No hay ningún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el que los planos π y π_d no se corten porque sus vectores asociados $\vec{n}\ (1, -2, 4)$ y $\overrightarrow{n_p}\ (2, -3, 6)$ **no** son paralelos :

$\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6}$ sus componentes **no** son proporcionales

π y π_d son secantes $\forall d \in \mathbb{R}$

b) Para $d = -2$: $\pi_{-2} \equiv 2x - 3y + 6z = -2$

Los puntos de corte de ambos son los infinitos puntos de la recta de ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ya sirve como solución, dado que no piden una forma determinada pero daremos también su forma paramétrica que nos ofrece de modo explícito las coordenadas de los puntos pedidos

Un vector director es $\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (0,\ 2,\ 1)$

Y un punto lo obtenemos por ejemplo para $y = 0$:

$$\begin{cases} x + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 6z + 2 = 0 \end{cases} \underset{E2' = E2 - 2E1}{\sim} \begin{cases} x + 4z + 1 = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

El punto $A(-1,0,0) \in r$

Las ecuaciones paramétricas : $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Existen infinitos puntos de corte entre π y π_{-2} . Son todos los de la recta r

Ecuaciones implícitas $\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 6z + 2 = 0 \end{cases}}$

Ecuaciones paramétricas $\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}}$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

Textos Marea Verde www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 4.1

Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

b) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

Solución:

El experimento aleatorio *"elegir al azar una respuesta de una pregunta del cuestionario"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con "*éxito*"y "*fracaso*.

Sea "*éxito*" = "*la respuesta es acertada*"

$$P(\acute{e}xito) = p = \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad P(fracaso) = q = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Contestar a todas las preguntas al azar, supone repetir 4 veces este experimento. Lasa) pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos"* = *"número de respuestas acertadas"*, es una variable binomial b(

$X = B(4,\ 0{,}2)$ con función de probabilidad $P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot (0{,}2)^k \cdot (0{,}8)^{4-k}$

La nota, si k es el nº de respuestas acertadas viene dada por

$$N = 2{,}5\ k - 0{,}625\ (4 - k) = 3{,}125\ k - 2{,}5$$

a) Para sacar sobresaliente $N \geq 9 \Rightarrow 3{,}125\ k - 2{,}5 \geq 9 \Rightarrow 3{,}125\ k \geq 11{,}5 \Rightarrow k \geq \frac{11{,}5}{3{,}125} = 3{,}68$

Luego la única posibilidad para obtener sobresaliente es contestar acertadamente a las cuatro preguntas, es decir

$$P(obtener\ sobresaliente) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^0 = 0{,}0016$$

La probabilidad de obtener sobresaliente contestando aleatoriamente a las cuatro preguntas es de 0,0016

b) $N < 5 \Rightarrow 3{,}125\ k - 2{,}5 < 5 \Rightarrow 3{,}125\ k < 7{,}5 \Rightarrow k < \frac{7{,}5}{3{,}125} = 2{,}4$

$$P(suspender) = P(X < 2{,}4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 3) - P(X = 4) =$$

$$= 1 - \binom{4}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^0 - \binom{4}{3} \cdot (0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^1 = 1 - 0{,}0016 - 4.0{,}008.\ 0{,}8 = 0{,}9728$$

Textos Marea Verde

Problema 4.2

En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?

b) *(1 punto)* Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?

c) *(0,5 puntos)* El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

Solución:

Nombramos en primer lugar los sucesos:

E= "la intervención ha sido efectiva" *T_1="la intervención se ha realizado con la técnica 1"*

T_2="la intervención se ha realizado con la técnica 2" *G=" la intervención ha sido grave"*

L=" la intervención ha sido leve"

A partir de los datos aportados por las tablas, calculamos los totales

	Nº intervenciones		
	Técnica 1	Técnica 2	TOTAL
Graves	**44**	**140**	184
Leves	**136**	**40**	176
TOTAL	180	180	360

	Nº intervenciones efectivas		
	Técnica 1	Técnica 2	TOTAL EFECT.
Graves	**30**	**102**	132
Leves	**120**	**36**	156
TOTAL	150	138	288

Textos Marea Verde

a) Calculamos $P(T_1/E)$ y $P(T_2/E)$ para ver cual de las dos es mayor. Tenemos todos los datos necesarios en las tablas:

$$P(T_1/E) = \frac{P(T_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{150}{360}}{\frac{288}{360}} = \frac{150}{288} \approx 0{,}5203$$

$$P(T_2/E) = \frac{P(T_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{138}{360}}{\frac{288}{360}} = \frac{138}{288} \approx 0{,}4792$$

$P(T_1/E) > P(T_2/E) \Rightarrow$ es más probable que se haya utilizado la técnica 1

La técnica utilizada con mayor probabilidad es la técnica 1

b) Calculemos la probabilidad de que una intervención sea efectiva, si se ha utilizado una técnica concreta y es leve .

Para la técnica 1: $P(E/(T_1 \cap L)) = \frac{P(E \cap T_1 \cap L)}{P(T_1 \cap L)} = \frac{\frac{120}{360}}{\frac{136}{360}} = \frac{120}{136} \approx 0{,}8824$

Para la técnica 2: $P(E/(T_2 \cap L)) = \frac{P(E \cap T_2 \cap L)}{P(T_2 \cap L)} = \frac{\frac{36}{360}}{\frac{40}{360}} = \frac{36}{40} = 0{,}9$

Por tanto, para una intervención leve es mejor la técnica 2

Repetimos un proceso análogo caso de intervención grave

Para la técnica 1: $P(E/(T_1 \cap G)) = \frac{P(E \cap T_1 \cap G)}{P(T_1 \cap G)} = \frac{\frac{30}{360}}{\frac{44}{360}} = \frac{30}{44} \approx 0{,}6818$

Para la técnica 2: $P(E/(T_2 \cap G)) = \frac{P(E \cap T_2 \cap G)}{P(T_2 \cap G)} = \frac{\frac{102}{360}}{\frac{140}{360}} = \frac{102}{140} \approx 0{,}7286$

También en este caso, es mejor la técnica 2.

La técnica que proporciona la mayor probabilidad de éxito, tanto en intervenciones leves como graves, es la técnica 2

c) Aunque en términos absolutos hay más intervenciones efectivas realizadas con la técnica 1 , concretamente 150 frente a 138, el estudio de las probabilidades del apartado anterior nos lleva a concluir que es más efectiva la técnica 2 tanto en intervenciones graves como leves. Entonces el protocolo seguido por el hospital no es adecuado.

Comunidad Autónoma de ARAGÓN www.apuntesmareaverde.org.es Textos Marea Verde

Problema 5:

Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 5.1

(2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. la universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes.

Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

Solución:

Sea x el nº de archiveros que se añaden al equipo y f la función que indica el número de expedientes que digitaliza el equipo formado:

$$f(x) = (50 + x)(80 - x) = -x^2 + 30x + 400$$

f solo toma los valores enteros positivos comprendidos entre 0 y 20 pero podemos estudiar su crecimiento si la vemos como restricción de la función polinómica g con la misma expresión y dominio $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -2x + 30 \qquad g''(x) = -2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = -2x + 30 = 0 \Rightarrow x = 15 \;\; y\; g''(2) = -2 < 0 \;\; \Rightarrow x = 15 \text{ máximo}$$

$$x = 15 \;\in [0,20] \cap \mathbb{N} \Rightarrow x = 15 \text{ también es máximo de } f$$

Se deben añadir entonces 15 personas al equipo para que el nº de digitalizaciones sea máximo.

El equipo debe estar formado por $50 + 15 = 65$ archiveros.

El número de archiveros necesario para que el nº de expedientes digitalizados sea máximo, es 65

Textos Marea Verde

Problema 5.2

(2 puntos) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}-e^x}{1-cosx}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}-e^x}{1-cosx} = \frac{e^{sen0}-e^0}{1-cos0} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{L'Höpital} \lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}cosx-e^x}{-(-sen\,x)} = \frac{e^{sen0}cos0-e^0}{-sen\,0} = \frac{0}{0} =$$

$$\underbrace{=}_{L'Höpital} \lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}cosx\,cosx+e^{senx}(-senx)-e^x}{cosx} = \frac{e^{sen0}cos^2 0\ +e^{sen0}(-sen0)-e^0}{cos0} =$$

$$= \frac{e^0.1+e^0.0-e^0}{cos0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx}-e^x}{1-cosx} = 0}$$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

Textos Marea Verde www.apuntesmareaverde.org.es

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Universidad Zaragoza 1542	**PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)** CURSO: **2026.** EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS II** TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

Problema 1:

1. (2 puntos) Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos A(−2, 3, 120), B(20, 42, 120), C(−1, 4, 165) y D(20, 43, 165). Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

Problema 2:

2. Existen funciones que aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = \text{sen}(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) *(0,8 puntos)* ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) *(1,2 puntos)* Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}.$$

Problema 3:

3. Sean A, M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) *(1 punto)* Justifica que A es regular.

b) *(1 punto)* Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1}.

Comunidad Autónoma de ARAGÓN
CC BY NC SA
Textos Marea Verde
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$:

a) *(0,8 puntos)* Calcula sus asíntotas.

b) *(1,2 puntos)* Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3, 5]$.

4.2 *(2 puntos)* Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Problema 5:

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 Tenemos dos urnas, A y B, con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) *(1 punto)* Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) *(1 punto)* Las bolas extraídas en **a)** las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

5.2 *(2 puntos)* El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área con la expresión $\acute{A}rea = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$.
- Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $\acute{A}rea = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $Volumen = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D puede ser obtenido por la expresión

$$Volumen = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}.$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

(2 puntos) Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2,3,120), B(20,42,120), C(-1,4,165)$ y $D(20,43,165)$.

Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?.

Solución:

Hay varias formas de abordar este problema. Optaremos por utilizar una de las ayudas que nos ofrecen con los enunciados y calcularemos el volumen del paralelepípedo determinan los cuatro puntos, es decir, el determinado por los tres vectores con origen, por ejemplo A y extremos los otros tres$B, C\ D$ si elegimos A como origen

La única posibilidad para que la silla no cojee es que los cuatro puntos estén en un mismo plano, en cuyo caso, el volumen que determinan los cuatro puntos sería 0.

Vamos a calcularlo

$$\overrightarrow{AB} = (\,22, 39, 0\,) \qquad \overrightarrow{AC} = (\,1, 1, 45\,) \qquad \overrightarrow{AD} = (\,22, 40, 45\,)$$

Volumen paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD} = V$

$V =$ Valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD} \Rightarrow$

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = Valor\ absoluto \begin{vmatrix} 22 & 39 & 0 \\ 1 & 1 & 45 \\ 22 & 40 & 45 \end{vmatrix} = 1755 \neq 0$$

Por lo tanto los cuatro puntos no son coplanarios

La silla cojea porque los cuatro puntos en los que apoyan sus patas no están en el mismo plano

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 2:

Existen funciones que. aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es

$$f(x) = sen(x^2).$$

Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) *(0,8 puntos)* ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) *(1,2 puntos)* Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}$

Solución:

a) La derivada de $F(x)$ es $f(x) = sen(x^2)$ por definición de primitiva.

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x) = sen(x^2)}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{F(0)}{0^3} = \frac{0}{0} = indet \underbrace{=}_{L'\,Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2).}{3x^2} = \frac{0}{0} = indet \underbrace{=}_{L'\,Hopital}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\, cos(x^2).}{6x} = \frac{0}{0} = indet = \lim_{x\to 0} \frac{2\, cos(x^2).}{6} = \frac{2 .\cos 0}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{3}}$$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 3:

Sean A, M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A,$$

donde *I* es la matriz identidad de orden 4.

a) *(1 punto)* Justifica que A es regular.

b) *(1punto)* Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1}

Solución:

a) De la igualdad $M \cdot A = I + N \cdot A$, deducimos:

$M \cdot A - N \cdot A = I \underset{(*)}{=} (M-N).A = I \Rightarrow \exists\,(M-N)$, matriz cuadrada de orden 4 que multiplicada por A es igual a la matriz unidad$\Rightarrow$ $M-N$ y A son inversas $\Rightarrow A$ es regular y $A^{-1} = M - N$

$(*)$ Por propiedad distributiva del producto de matrices respecto de la suma

b) Por lo visto en el apartado anterior $A^{-1} = M - N$

$$A^{-1} = M - N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \sqrt{3}-\sqrt{3} & -1 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema 4:

Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 4.1

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

a) *(0,8 puntos)* Calcula sus asíntotas.

b) *(1,2 puntos)* Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3,5]$.

Solución:

a) $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$

- La recta $x = 2$ es asíntota vertical ya que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

- No hay asíntotas horizontales porque

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$$

- Analizamos si existen asíntotas oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} : x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = 1 = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x-2} = 2 = \lim_{x\to \infty} (f(x) - mx)$$

Luego

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua si $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$:

Existen dos asíntotas, una vertical de ecuación $x = 2$ y una oblicua de ecuación $y = x + 2$

Comunidad Autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

b) Estudiamos la monotonía de la función a partir del signo de su derivada:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\,(x-2)-x^2.1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

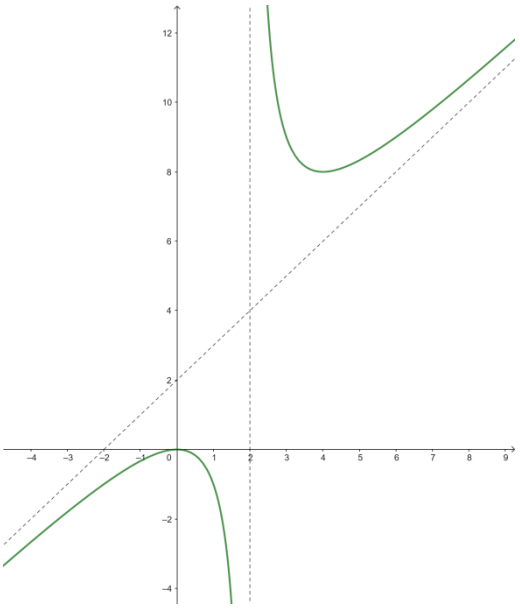
$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x\,(x-4)=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=4$$

	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0,2)$	$x=2$	$(2,4)$	$x=4$	$(4,\infty)$
Signo f'	Positivo $f'(-1)=\frac{5}{9}$	0	Negativo $f'(1)=-3$	$\nexists$	Negativo $f'(3)=-3$	0	Positivo $f'(5)=\frac{5}{9}$
Monotonía de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$\nexists$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

El intervalo $[3,5]\subset(2,\infty)$ y en $x=4\in[3,5]$ la función tiene un mínimo relativo

$x=4$ mínimo relativo en $(2,\infty) \Rightarrow f(x)\geq f(4)=8 \quad \forall\, x\in(2,\infty)$

En particular $\quad f(x)\geq f(4)=8 \quad \forall\, x\in[3,5]$



La función f crece en $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$, decrece en $(0,2)\cup(2,4)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(0,0)$ y un mínimo relativo en el punto $(4,8)$.

$$f(x)\geq f(4)=8 \quad \forall\, x\in[3,5]$$

Problema 4.2

(2 puntos) Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$

Solución

Calculemos en primer lugar la ecuación de la recta tangente r en el punto $(2.f(2)) = (2,6)$

$$r \equiv y - 2 = f'(2)(x-2)$$

$$f'(x) = -3x^2 + 8x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = -3\,.\,2^2 + 8\,.\,2 + 1 = 5$$

$r \equiv y - 6 = 5(x-2) \Rightarrow r \equiv y = 5x - 4$ es la recta tangente buscada

Calculamos ahora las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de $f \;\; y \;\; r$

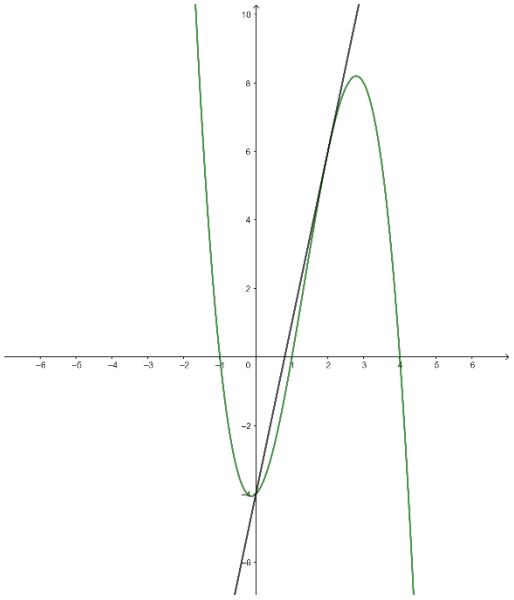
$$\begin{cases} y = -x^3 + 4x^2 + x - 4. \\ y = 5x - 4 \end{cases} \Rightarrow -x^3 + 4x^2 + x - 4 = 5x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 + 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 4x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = 2$$

Llamemos A al área pedida

$$A \underset{*}{=} \left| \int_0^2 [(-x^3 + 4x^2 + x - 4) - (5x-4)]\,dx \right| = \left| \int_0^2 (-x^3 + 4x^2 - 4x)\,dx \right| \underset{**}{=}$$

$$= \left| \underbrace{\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right]}_{F(x)}_0^2 \right| = \left| \underbrace{\left(-\frac{2^4}{4} + \frac{4\,.2^3}{3} - \frac{4\,.2^2}{2} \right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(-\frac{0^4}{4} + \frac{4\,.0^3}{3} - \frac{4\,.0^2}{2} \right)}_{F(0)} \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$



* Tomamos valor absoluto y así no necesitamos analizar qué grafica queda encima. No obstante, sería tan sencillo como evaluar $f(1) = 0$ y la recta tangente en 1: $y(1) = 1$. La recta va por encima de la gráfica de f

** Aplicamos la regla de Barrow. . F es una primitiva de f.

El área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

Textos Marea Verde

Problema 5:

. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Problema 5.1

Tenemos dos urnas, *A* y *B*, con bolas rojas y azules. En la urna *A* hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna *B* hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

a) *(1 punto)* Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?

b) *(1 punto)* Las bolas extraídas en **a)** las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna *A* la metemos en la urna *B* y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna *B*, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Solución:

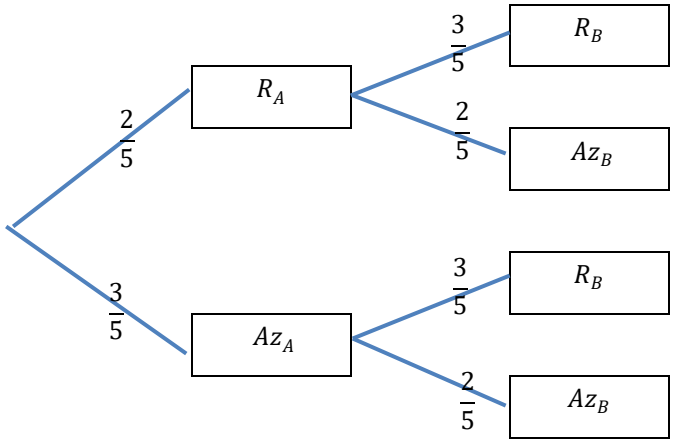
a) Nombramos los sucesos:

$$R_A = \text{“ elegir bola roja de } A\text{”} \qquad Az_A = \text{“ elegir bola azul de } A\text{”}$$

$$R_B = \text{“ elegir bola roja de } B\text{”} \qquad Az_B = \text{“ elegir bola azul de } B\text{”}$$

$$P(R_A) = \frac{2}{5} \qquad P(R_B) = \frac{3}{5} \qquad P(Az_A) = \frac{3}{5} \qquad P(Az_B) = \frac{2}{5}$$

Describimos todas las combinaciones posibles de los colores de las dos bolas extraídas



$$P(\text{"las dos bolas sean del mismo color"}) = P(R_A R_B \cup Az_A Az_B) = P(R_A R_B) + P(Az_A Az_B) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$$P(\text{"las dos bolas sean de distinto color"}) = P(\text{"las dos bolas sean del mismo color"})^C =$$

$$= 1 - P(\text{"las dos bolas sean del mismo color"}) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

Es más probable que las dos bolas sean de distinto color

Comunidad Autónoma de ARAGÓN www.apuntesmareaverde.org.es Textos Marea Verde

b) Vamos a fijarnos en cómo varía la composición de la urna B en las distintas fases del experimento

En el último paso, la urna B puede encontrarse con tres composiciones diferentes que definen los sucesos siguientes:

$A_1 =$ " $la\ urna\ B\ contiene\ 2\ bolas\ azules\ y\ 3\ rojas$"

$$P(A_1) = P(R_A R_B) + P(Az_A Az_B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$A_2 =$ " $la\ urna\ B\ contiene\ 3\ bolas\ azules\ y\ 2\ rojas$"

$$P(A_2) = P(Az_A R_B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$A_3 =$ " $la\ urna\ B\ contiene\ 1\ bola\ azul\ y\ 4\ rojas$"

$$P(A_3) = P(R_A Az_B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Llamemos $C =$ "*la bola extraída de B en el último paso es azul*"

$$P(C) = P(C/A_1)\,.P(A_1) + P(C/A_2)\,.P(A_2) + P(C/A_3)\,.P(A_3) =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{12}{25} + \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{25} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{25} = \frac{55}{125} = \frac{11}{25}$$

La probabilidad de que sea azul la bola que se extrae de B, si previamente cada una de las dos bolas extraídas en el apartado a) se introducen en la urna contraria, es $\frac{11}{25}$

Problema 5.2:

(2 puntos) El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Solución:

Sea X la variable aleatoria *"consumo diario de agua por persona"* $X = N(135, \sigma)$

El 20 % de los hogares de mayor consumo lo tienen superior a los 148,44 litros por persona y día. Entonces:

$$P(X > 148{,}44) = \frac{20}{100} = 0{,}2 \Rightarrow P(X \leq 148{,}44) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = P(Z \leq k)$$

Buscamos k en la tabla de $Z = N(0,1)$

El valor más aproximado que encontramos es 0,7995 que corresponde a $k = 0{,}84$

Por tanto $P(Z \leq 0{,}84) \approx 0{,}8 = P(X \leq 148{,}44) = P\left(\frac{X-135}{\sigma} \leq \frac{148{,}44-135}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{148{,}44-135}{\sigma}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0{,}84 = \frac{148{,}44 - 135}{\sigma} = \frac{13{,}44}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{13{,}44}{0{,}84} = 16 \Rightarrow X = N(135{,}16)$$

Sea k el tope por debajo del que las tasas bajan

$$P(X \leq k) = 0{,}2 = P\left(\frac{X-135}{16} \leq \frac{k-135}{16}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-135}{16}\right) = P\left(Z > -\frac{k-135}{16}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{135-k}{16}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{135-k}{16}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{135-k}{16} \approx 0{,}84 \Rightarrow 135 - k \approx 13{,}44 \Rightarrow k \approx 121{,}56$$

Se bajarán las tasas a los hogares que tengan un consumo medio por persona y día inferior a $121,56$ litros

Comunidad Autónoma de ARAGÓN www.apuntesmareaverde.org.es Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Sergio Manso Bravo y Universidad de Oviedo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A

Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 tés y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 tés y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 tés y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

(a) **(1.5 puntos**) Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.

(b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice "Por ese dinero te daré dos zumos", el cliente dice "Eso es imposible, el precio está mal calculado" ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.

(c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

Pregunta 1. Opción B

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(b) **(0.5 puntos**) Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $det(B)$?

(c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Pregunta 2. Opción A

Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función: $f(t) = \frac{5t^2+2t+5}{t^2+1}$, $t \in [0,30]$.

(a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?

(b) **(0.75 puntos)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.

(c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

Pregunta 2. Opción B

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & si\ x < 2 \\ \sqrt{(5x - 1)} & si\ x \geq 2 \end{cases}$ Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
(b) (1.25 puntos) Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
(c) (0.5 puntos) Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?

Pregunta 3. Opción A

Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) es$ una primitiva de f. Se pide:

(a) (1 punto) Calcular la función f.
(b) (0.75 puntos) Calcula una función que sea una primitiva de f y tal que en $x = 0$ tome el valor 6.
(c) (0.75 puntos) Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B

Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcular una primitiva de la función f.
(b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = 0\ y\ x = 1$.

Pregunta 4. Opción A

Se considera el plano $\pi = x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

(a) (1.25 puntos) Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?
(b) (1.25 puntos) Calcular el punto Q ∈ π que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

Pregunta 4. Opción B

Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2,1,3)$ hacia el punto $Q(0, -1,1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1,1,1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
(b) (0.75 puntos) Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro
(c) (0.75 puntos) Calcula el ángulo de giro del móvil.

Pregunta 5. Opción A

En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5%. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.

(b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Pregunta 5. Opción B

Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de $40\ kgs$ el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38,1.2)$.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

*Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z < x), F(0) = 0.5, F(1.6667) = 0.9520,$ $F(0.9520) = 0.83, F(0.83) = 0.7975, F(0.79) = 0.7852.$

Si los valores obtenidos no están entre los expuestos debe tomarse el más cercano.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1. Opción A

Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 tés y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 tés y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 tés y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

(a) **(1.5 puntos**) Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.

(b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice "Por ese dinero te daré dos zumos", el cliente dice "Eso es imposible, el precio está mal calculado" ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.

(c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

Solución:

Llamaremos x al precio de cada café, y al de cada té y z al de cada zumo.

(a) Cada ecuación relaciona lo que se ha pagado en total con lo que se ha pagado por cada producto.

El primer día:

$$x + 2y + 2z = 11$$

El segundo día:

$$x + 3y + 3z = 16$$

y el tercer día debemos poner el número de zumos como un parámetro, desconocido pero fijo, al que llamaremos p.

$$3x + 3y + pz = 21$$

Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales que modeliza el problema es:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +2y & +2z & =11 \\ x & +3y & +3z & =16 \\ 3x & +3y & +pz & =21 \end{array}\right\}$$

Para discutir el sistema, vamos a aplicar Gauss a la matriz ampliada del sistema:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & p-3 & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única si $p \neq 3$ y para $p = 3$ el sistema no tiene solución.

(b) Si p = 2, con la matriz escalonada calculada en el apartado anterior se ve que z = −3 < 0 y esto no es posible dado que los precios no pueden ser negativos.

(c) En efecto, para p = 4 el sistema tendría solución única, y esta sería:

x = 1, y = 2, z = 3.

Pregunta 1. Opción B

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (1 punto) Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(b) (0.5 puntos) Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $det(B)$?

(c) (1 punto) Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a & 1-2a \end{pmatrix}$$

la única solución es a = 0

(b) Como det(I) = 1 entonces $\det(B^2) = \det 2I = 8$ y $\det(B) = \pm 2\sqrt{2}$.

(c) $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 - 2a$. Si $a \neq \frac{1}{2}$ el rango es 3, en caso contrario el rango es menor que 3.

Como tiene un menor de orden 2 distinto de cero, $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -1$ entonces el rango es 2.

Pregunta 2. Opción A:

Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función: $f(t) = \frac{5t^2+2t+5}{t^2+1}$, $t \in [0,30]$.

(a) (1 punto) Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?

(b) (0.75 puntos) Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.

(c) (0.75 puntos) ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

Solución:

(a) **(1 punto)** Calculemos el máximo de la función.

$$f'(t) = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

Calculemos los puntos críticos:

$$f'(t) = 0 \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t = \pm 1$$

Como $t = -1$ no pertenece en el dominio estudiado, se tendrá en cuenta sólo el valor de $t = 1$.

$$f''(t) = \frac{4t\,(t^2-3)}{(t^2+1)^3} \rightarrow f''(1) = -1 < 0$$

por lo tanto se trata de un máximo. $f(1) = 6 < 6.5$ por lo que el máximo no alcanza dicho valor.

En los extremos del intervalo $f(0) = 5 < 6.5$ y $f(30) = 5.0666 < 6.5$ por lo tanto nunca se alcanzan los objetivos previstos.

(b) La derivada de f es positiva en el intervalo $[0, 1)$ y negativa en el resto, por lo tanto la cotización aumentará el primer día y decrecerá los días restantes, alcanzando el máximo valor en $t = 1$.

(c) Se debería calcular el límite cuando t tiende a ∞ de la función:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5t^2+2t+5}{t^2+1} = 5$$

5 sería el valor a lo que se acerca la cotización a largo plazo.

Pregunta 2. Opción B:

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & si\ x < 2 \\ \sqrt{(5x - 1)} & si\ x \geq 2 \end{cases}$ Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
(b) (1.25 puntos) Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
(c) (0.5 puntos) Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?

Solución:

(a) La función es continua en $(-\infty, 2)$ por ser una función polinómica. También lo es en el intervalo $(2, +\infty)$ por ser raíz de un polinomio, que no toma valores negativos en dicho intervalo. Sólo resta ver qué ocurre en el punto x = 2. Para ello calcularemos los límites laterales y los compararemos con f(2):

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - Ax + 11 = 15 - 2A$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{5x - 1} = 3$$
$$f(2) = \sqrt{5 * 2 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

Por lo tanto, para que f sea continua debe Verificarse que $15 - 2A = 3$ es decir, $A = 6$.

(b) Si $x < 2$, $f'(x) = 2x - 6$ sólo se anula en $x = 3$ que no está en el intervalo estudiado. Como $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 2)$ la función es decreciente en este intervalo.

Si $x > 2$ entonces $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}$ que es mayor que 0 para todo x por lo que la función es creciente en todo el intervalo.

(c) Dado que la función decrece hasta el punto x = 2 y luego crece, el punto x = 2 es un extremo relativo, en concreto, se trata de un mínimo.

Pregunta 3. Opción A:

Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcular una primitiva de la función f.

(b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

(a) Si F es un primitiva de f, entonces $f(x) = F'(x) = \frac{\pi}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$

(b) Cualquier otra primitiva de f se puede escribir como $G(x) = F(x) + k = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + k$. Como en 0 debe valer 6, entonces $\frac{1}{2}\text{sen}(0) + k = 6$ y $k = 6$. Por lo tanto la primitiva pedida es

$$G(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + 6$$

(c) Si $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $0 \leq \frac{\pi}{2}x^2 \leq \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $\frac{\pi}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \geq 0$. El área pedida sería:

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$$

Pregunta 3. Opción B:

Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcular una primitiva de la función f.

(b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

(a) **(1.25 puntos)**

$$\int \frac{x-2}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{-2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan(x)$$

(b) **(1.25 puntos)** La función f es negativa en $x \in [0, 1]$. El área pedida sería

$$-\left(\frac{1}{2}\ln(2) - 2\arctan(1) - (\frac{1}{2}\ln(1) - 2\arctan(0))\right) \approx 1.2242$$

Pregunta 4. Opción A:

Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

(a) (1.25 puntos) Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?

(b) (1.25 puntos) Calcular el punto Q ∈ π que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

Solución:

(a) Tomamos dos puntos del plano y construimos el vector que los une, dicho vector es director de una recta paralela a π: A = (1, 1, 1) $\in \pi$ y B = (−1, −1, 3) $\in \pi$. El vector que une B y A es $\vec{v}$ = (2, 2, −2).

Una recta como la pedida puede ser: $r \equiv (0, -1, -2) + \lambda(2, 2, -2)$.

(b) Calculamos la recta que pasa por P y perpendicular a π. El punto que interseca esta recta con el plano π es el buscado.

El vector normal a π es $\vec{u}$ = (1, 2, 3) luego la recta buscada es

$$s \equiv (0, -1, -2) + \lambda(1, 2, 3)$$

El punto intersección con π debe pertenecer a ambos, luego debe ser de la forma $(\lambda, -1 + 2\lambda, -2 + 3\lambda)$ y además, debe cumplir la ecuación del plano:

$$\lambda + 2(-1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda)) = 6 \rightarrow \lambda = 1$$

Por lo tanto el punto buscado es Q = (1, 1, 1)

Además $d(P, Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (1+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{14} \approx 3.7417$

Pregunta 4. Opción B:

Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2,1,3)$ hacia el punto $Q(0,-1,1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1,1,1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
(b) (0.75 puntos) Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro

(0.75 puntos) Calcula el ángulo de giro del móvil.

Solución:

(a) El giro se realiza en el punto medio es decir en el punto

$$\frac{1}{2}((2,1,3)+(0,-1,1))=(1,0,2)$$

(b) Tras realizar el giro se desplaza por la recta que pasa por $(1,0,2)$ y por $(1,1,1)$ es decir, por la recta que pasa por $(1,1,1)$ y su vector director es $\bar{w}=(0,1,-1)$. La recta, por lo tanto, es

$$r\equiv(1,1,1)+\lambda(0,1,-1)$$

(c) El ángulo es el mismo que forman los vectores directores de ambas, es decir, el vector $\bar{w}$ y el vector que une P con Q, que es $\bar{u}=(2,2,2)$. Para calcularlo, recordemos que

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=\|\vec{u}\|\ \|\vec{w}\|\cos(\alpha)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0\rightarrow\cos(\alpha)=0\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$

Pregunta 5. Opción A:

En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5%. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.

(b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Solución:

Llamaremos L al suceso 'la prenda tiene un defecto en la longitud' y C al suceso 'la prenda tiene un defecto en las costuras'. Los datos del enunciado se traducen en:

$$P(L) = 0.1,\ P(C) = 0.05,\ P(L \cap C) = 0.008$$

(a) Se pide $P(L \cup C) = P(L) + P(C) - P(L \cap C) = 0.1 + 0.05 - 0.008 = 0.142$

(b) Se pide $P(C/L) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(L)} = \dfrac{0.008}{0.1} = 0.08$

Pregunta 5. Opción B:

Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de $40\ kgs$ el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38,1.2)$.

(a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?

(b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

*Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z < x), F(0) = 0.5, F(1.6667) = 0.9520,$ $F(0.9520) = 0.83, F(0.83) = 0.7975, F(0.79) = 0.7852.$

Si los valores obtenidos no están entre los expuestos debe tomarse el más cercano.

Solución:

(a) Si la variable aleatoria es X= número de kilos de la caja, para que el sistema de seguridad se active se debería cumplir que $X \geq 40$.

$$P(X \geq 40) = P\left(\frac{X-38}{1.2} \geq \frac{40-38}{1.2}\right) = P(Z \geq 1.6667) = 1 - P(Z \leq 1.6667) = 1 - 0.952 = 0.048$$

(b) La probabilidad de que salte es 0.048 y la de que no salte sería $1-0.048 = 0.952$. Se trata de un problema de éxito-fracaso, por lo que lo podemos modelizar como una distribución binomial $B(10, 0.048)$. Para calcular lo pedido obtendremos la probabilidad de que no salte en ninguna ocasión, que es el suceso complementario del pedido.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.048^0 0.952^{10} = 0.6115$$

Por lo que la probabilidad pedida es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.6115 = 0.3885$$

---

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.6667) = 0.9520$, $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1:

Pregunta 1. Opción A Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas. La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.

(b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.

(c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

Pregunta 1. Opción B Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1}.

(b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

Problema 2:

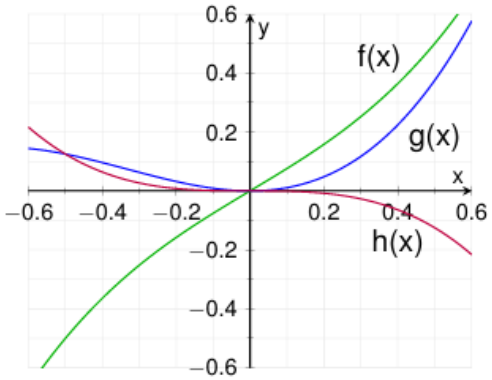
Pregunta 2. Opción A Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.

(b) **(0.75 puntos)** Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.

(c) **(1 punto)** Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

Pregunta 2. Opción B Dadas las siguientes funciones:



(a) **(1 punto)** Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.

(b) **(1.5 punto)** Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

Problema 3:

Pregunta 3. Opción A Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v0 = 54 m/s$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22 m/s^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20, 06m.

(a) **(1.25 puntos)** Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.

(b) **(1.25 puntos)** Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20, 06m.

Pregunta 3. Opción B Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$.

(a) **(1.5 puntos)** Calcula todas las primitivas de la función f(x). ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada entre las gráficas de g(x) y h(x) entre sus puntos de corte.

Problema 4:

Pregunta 4. Opción A Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

(a) **(0.75 puntos)** Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2. ¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde Q(3, 3, 3).

Pregunta 4. Opción B Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

Problema 5:

Pregunta 5. Opción A Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75 % de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80 % de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65 % de victorias.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Pregunta 5. Opción B Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5 % de los hombres adultos de la población.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1. Opción A:

Pregunta 1. Opción A Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas. La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.

(b) **(1 punto)** Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.

(c) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

Solución:

Solución: Sean x = número de camiones pequeños, y = número de camiones medianos, z = número de camiones grandes..

(a) El problema quedaría modelado como:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = m + 9 \\ 2x + 3y + (7 - m)z = 22 \end{cases}$$

(b) Escribimos la matriz ampliada y realizamos operaciones elementales para escalonarla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & m+9 \\ 2 & 3 & 7-m & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 1 & 5-m & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 0 & 3-m & 3-m \end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones debe aparecer una fila nula, es decir:

$$3 - m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 3$$

Sustituyendo m = 3 en la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema reducido es:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y=2-2t, \\ x=10-(2-2t)-t=8+t. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=8+t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Partiendo de la matriz escalonada del apartado anterior, se tiene como sistema equivalente al original,

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y+2z=0 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(11,-2,1).$$

Claramente no tiene sentido para nuestro problema porque no podemos utilizar un número negativo de camiones.

Problema 1. Opción B:

Pregunta 1. Opción B Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0.75 puntos)** Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1}.

(b) **(1.75 puntos)** Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 2(-1) = -3 + 2 = -1$$

Como $|A| \neq 0$, la matriz es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$AX + B - C = 0 \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando la matriz inversa calculada en el apartado anterior tenemos:

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Opción A:

Pregunta 2. Opción A Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y h(x) es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la derivada $h'(x)$ e interpretar el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.

(b) **(0.75 puntos)** Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.

(c) **(1 punto)** Determina los valores de x en los que la función h(x) alcanza un mínimo local.

Solución:

(a) La derivada de h(x) con respecto a x es:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(12 - 0.4x^2 + 0.03x^3\right) = -0.8x + 0.09x^2.$$

La derivada $h'(x)$ representa la pendiente de la curva del tobogán en un punto dado. Esta pendiente indica la inclinación del tobogán con respecto al suelo. Un valor positivo de $h'(x)$ indica una inclinación ascendente, mientras que un valor negativo de $h'(x)$ indica una inclinación descendente. Si $h'(x) = 0$, significa que el tobogán tiene una pendiente horizontal en ese punto, es decir, es plano.

(b) Planteamos la siguiente ecuación:

$$h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 = -2 \Rightarrow 0.09x^2 - 0.8x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-0.8) \pm \sqrt{(-0.8)^2 - 4(0.09)(2)}}{2(0.09)} = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.64 - 0.72}}{0.18} = \frac{0.8 \pm \sqrt{-0.08}}{0.18}.$$

El discriminante es negativo, lo que significa que no hay soluciones reales. Por lo tanto, **no existen puntos** donde la pendiente sea exactamente igual a -2.

(c) Para encontrar los puntos donde la función alcanza un mínimo local, debemos encontrar los puntos críticos, que ocurren cuando la derivada se iguala a cero:

$$h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 = 0 \Rightarrow x(0.09x - 0.8) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{0.8}{0.09} = 8.89.$$

Por lo tanto, los puntos críticos son x = 0 y x = 8.89.

Ahora, para determinar si estos puntos corresponden a un mínimo o un máximo, debemos examinar la segunda derivada de h(x):

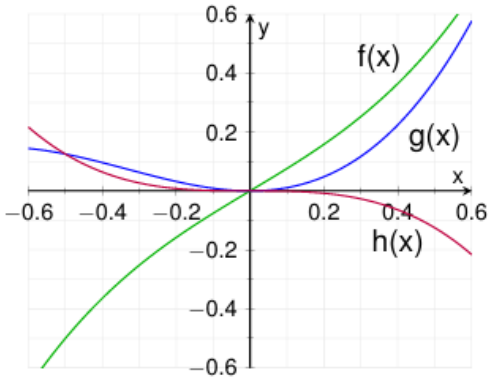
$$h''(x) = \frac{d}{dx}(-0.8x + 0.09x^2) = -0.8 + 0.18x.$$

Evaluamos h''(x) en los puntos críticos:

- Para x = 0, $h''(0) = -0.8 + 0.18(0) = -0.8$. Como $h''(0) < 0$, en x = 0 hay un **máximo local**.
- Para x = 8.89, $h''(8.89) = -0.8 + 0.18(8.89) = -0.8 + 1.60 = 0.8$. Como $h''(8.89) > 0$, en x = 8.89 hay un **mínimo local**.

Problema 2. Opción B:

Pregunta 2. Opción B Dadas las siguientes funciones:



(a) **(1 punto)** Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.

(b) **(1.5 punto)** Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.

Solución:

(a) El polinomio p(x) indicado en el enunciado tiene unas características especiales en su paso por el origen, ya que:

$$p(0) = 0 + 0 = 0$$

$$p'(x) = 2x + 3x^2 \to p'(0) = 0$$

$$p''(x) = 2 + 6x \to p''(0) = 2 > 0$$

Con esto concluimos que p(x) ha de tener un mínimo local en x = 0. La única gráfica de las mostradas que tiene un mínimo en ese punto es g(x), por tanto esa ha de ser la gráfica del polinomio y g(x) = p(x).

(b) En el cálculo del límite dado observamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{h(0)}{f(0)} = \frac{0}{0}$$

que es una indeterminación. Para ello nos gustaría aplicar L'Hopital, así

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} \frac{h'(x)}{f'(x)}.$$

Como no tenemos la expresión de esas funciones no podemos calcularlas, pero si nos fijamos en las gráficas, por la forma en que ambas pasan por el origen $h'(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. Eso es suficiente para poder decir que de hecho

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Problema 3. Opción A:

Pregunta 3. Opción A Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v0 = 54 m/s$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22 m/s^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de $20,06 m$.

(a) **(1.25 puntos)** Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.

(b) **(1.25 puntos)** Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer $20,06 m$.

Solución:

(a) La distancia recorrida d(t) se obtiene integrando la función de velocidad v(t):

$$d(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (v_0 + at)\,dt.$$

Resolviendo la integral:

$$d(t) = \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t at\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Sustituyendo los valores de $v_0 = 54\,m/s$, $a = -22\,m/s^2$ y $t = 1\,s$:

$$d(1) = 54 \cdot 1 + \frac{1}{2}(-22) \cdot (1)^2 = 54 - 11 = 43\,m.$$

Por lo tanto, la distancia recorrida durante el primer segundo es: $43\,m$.

(b) Para determinar el tiempo necesario para que la pelota recorra 23,77 metros, planteamos la ecuación de distancia:

$$d(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación cuadrática $11t^2 - 54t + 20.06 = 0$.

Esta ecuación tiene por soluciones $t_1 = 0.405s$ y $t_2 = 4.5s$. La solución válida es $t_1 = 0,405$ segundos, ya que el tiempo debe ser positivo pero no mayor que el del apartado anterior.

Problema 3. Opción B:

Pregunta 3. Opción B Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$.

(a) **(1.5 puntos)** Calcula todas las primitivas de la función f(x). ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada entre las gráficas de g(x) y h(x) entre sus puntos de corte.

Solución:

(a) En primer lugar simplificamos la expresión de la función f(x) desarrollando la división de polinomios,

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4x+2}.$$

Para el cálculo de las primitivas necesitamos desarrollar la integral indefinida

$$\int f(x)dx = \int \frac{x-1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{3}{4x+2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\ln(2x+1) + C.$$

La primitiva que pasa por el origen de coordenadas debe de cumplir que F(0) = 0, es decir

$$F(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln(2\times 0+1) + C = 0 \Rightarrow 0 - \frac{3}{4}\ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\ln(2x+1)$.

(b) Para calcular el área encerrada entre ambas curvas lo primero será encontrar los puntos de corte entre ambas curvas, o lo que es lo mismo resolver la ecuación

$$x^2 = x^3 \quad \text{equivalentemente} \quad x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0.$$

Dado que la ecuación está igualada a 0, podemos ver que las soluciones serán x = 0 y x = 1.

Ahora ya podemos obtener el área pedida como una integral definida con esos extremos de integración. Sólo falta comprobar la posición relativa de ambas curvas en ese intervalo, pero como son potencias x^2 y x^3 de valores entre 0 y 1, claramente $x^3 \leq x^2$.

Así pues el área pedida será

$$A = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

Problema 4. Opción A:

Pregunta 4. Opción A Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

(a) **(0.75 puntos)** Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2. ¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde Q(3, 3, 3).

Solución:

(a) Al ser un plano paralelo a π tiene el mismo vector normal $\tilde{n}_\pi = (2, 2, 1)$ por lo que el plano buscado es de la forma $\pi \equiv 2x + 2y + z + D = 0$. Como la distancia al origen es 2 tenemos:

$$d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow |D| = 1$$

Por tanto, tendríamos como posibles soluciones $\pi' \equiv 2x + 2y + z = 1$ y $\pi' \equiv 2x + 2y + z = -1$.

(b) El punto del plano más cercano al origen es la proyección de este sobre el plano π. Esta proyección estará sobre la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen. Esta recta tiene como vector director el vector normal al plano $\tilde{n}_\pi = (2, 2, 1)$, así que la recta será $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano obtendremos la intersección de ambos que será la proyección buscada.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 5 \\ x - y = 0 \\ x - 2z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right) \text{ es la proyección buscada.}$$

(c) Tenemos que $\tilde{OP} = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$ y $\tilde{OQ} = (3, 3, 3)$. Por tanto, para calcular el área buscada utilizaremos el producto vectorial.

$$Area = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{9} & \frac{5}{9} \\ 3 & 3 & 3 \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{5}{3}\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j} \right\| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3} = 2.357$$

Problema 4. Opción B:

Pregunta 4. Opción B Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos A(1, 2, 1), B(3, 0, 2), C(2, 3, 3) que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r:\ (x,y,z) = (0,1,4) + t(1,1,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A.

Solución:

(a) Calculamos dos vectores del plano:

$$\vec{AB} = B - A = (3-1,\ 0-2,\ 2-1) = (2,-2,1),\ \vec{AC} = C - A = (2-1,\ 3-2,\ 3-1) = (1,1,2)$$

Por tanto, un vector normal al plano es el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,-3,4)$$

Así, la ecuación del plano que pasa por A(1, 2, 1) es

$$-5(x-1) - 3(y-2) + 4(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -5x - 3y + 4z + 7 = 0.$$

(b) Tenemos que estudiar la posición relativa entre la recta y el plano. La recta es r : (x, y, z) = (0, 1, 4) + t(1, 1, −1) y su vector director es $\vec{v} = (1,1,-1)$. El vector normal del plano es $\vec{n}_\pi = (-5,-3,4)$. Calculamos el producto escalar y tenemos que

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = -5(1) - 3(1) + 4(-1) = -12 \neq 0$$

Por tanto, la recta **corta al plano en un punto**. Para calcular el punto de corte podemos por ejemplo sustituir la recta en la ecuación del plano:

$$x = t,\ y = 1+t,\ z = 4-t \Rightarrow -5t-3(1+t)+4(4-t)+7 = 0 \Rightarrow -5t-3-3t+16-4t+7 = 0 \Rightarrow 20-12t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

Por tanto, el punto de intersección es

$$P\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

(c) Se trata de calcular la distancia de un punto a una recta. Tomamos un punto de la recta $P_0(0,1,4)$. El vector director de la recta es $\vec{v}_r = (1,1,-1)$. Calculamos el vector $\vec{AP}_0$

$$\vec{AP_0} = P_0 - A = (0-1,\ 1-2,\ 4-1) = (-1,-1,3)$$

La distancia entre un punto y una recta en el espacio viene dada por

$$d(A,r) = \frac{|\vec{AP_0} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 1.633$$

Problema 5. Opción A:

Pregunta 5. Opción A Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75 % de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80 % de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65 % de victorias.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

Solución:

Solución: Llamemos R al suceso "el jugador comienza el partido restando" y V al suceso "el jugador gana el partido". Entonces, tenemos como datos del problema:

$$P(R) = 0.75, \quad P(V/R) = 0.8, \quad P(V/\overline{R}) = 0.65$$

(a) $P(V) = P(V/R)P(R) + P(V/\overline{R})P(\overline{R}) = 0.8 \cdot 0.75 + 0.65 \cdot 0.25 = 0.7625.$

(b) $$P(R/V) = \frac{P(V/R)P(R)}{P(V)} = \frac{0.8 \cdot 0.75}{0.7625} = 0.7869.$$

Problema 5. Opción B:

Pregunta 5. Opción B Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos siguen una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5 % de los hombres adultos de la población.

Solución:

Solución: Llamamos X ≡"nivel de ácido úrico en sangre de un hombre adulto en mg/dl". La variable X sigue una distibución N(5.2, 0.9).

$$\text{(a) } P(4.3 \leq X \leq 6.1) = P\left(\frac{4.3-5.2}{0.9} \leq \frac{X-5.2}{0.9} \leq \frac{6.1-5.2}{0.9}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6828.$$

$$\text{(b) } P(X \geq a) = 0.015 \Rightarrow P\left(\frac{X-5.2}{0.9} \geq \frac{a-5.2}{0.9}\right) = 0.015 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-5.2}{0.9}\right) = 0.015 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-5.2}{0.9}\right) = 0.985 \Rightarrow \frac{a-5.2}{0.9} = 2.17 \Rightarrow a = 0.9 \cdot 2.17 + 5.2 = 7.153.$$

Matemáticas II

PAU 2026

Comunidad autónoma de

ISLAS BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Guillermo Cotrina y Universidad de las Islas Baleares

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

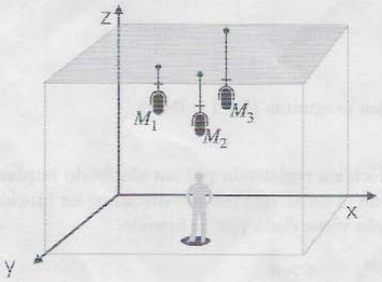
RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

La prueba consta de cinco preguntas: las tres primeras obligatorias, y en la cuarta y quinta se puede elegir entre dos opciones. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Véase la puntuación en cada ejercicio.
Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Problema 1:

Problema 1. — En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.



Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7 m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

- Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1 m.
- Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2 m.
- Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3 m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4, 3, 0)$, que representa su posición sobre el escenario.

(a) **[1 punto]** Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.

(b) **[1 punto]** Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1, M_2 y M_3. Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π. Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

Problema 2:

Problema 2. — **[2 puntos]** Sea $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2+1}\ln(x)$. Calcula $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Problema 3:

BY NC SA

Problema 3. — Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40 % de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30 % participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, de entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20 % también participa en torneos oficiales.

(a) **[0.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?

(c) **[1.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no?

Problema 4:

Parte B. preguntas 4 y 5

Problema 4. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal $I(t)$ (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \qquad t \geq 0.$$

(a) **[1 punto]** Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.

(b) **[1 punto]** Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t)\,dt$.

P4.2 **[2 puntos]** La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \qquad t \geq 0,$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta.

Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Problema 5:

BY NC SA

Problema 5. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1 Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible y

$$AB + A + I = 2A,$$

con I la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[1 punto]** Calcula la inversa de A en función de I y B.

(b) **[1 punto]** Sean

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcula $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

P5.2 **[2 puntos]** En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x, y y z.

Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

donde $m \geq 0$ es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro m, si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Parte A (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte.

Problema 1:

En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.
Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7 m, tal como se muestra en la figura.
Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:
* Micrófono 1 (M_1): coordenadas x = 2, y = 3, colgado del techo con un cable de longitud 1 m.
* Micrófono 2 (M_2): coordenadas x = 4, y = 4, colgado del techo con un cable de longitud 2 m.
* Micrófono 3 (M_3): coordenadas x = 5, y = 1, colgado del techo con un cable de longitud 3 m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto P(4,3,0), que representa su posición sobre el escenario.
(a) [1 punto] Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.
(b) [1 punto] Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1, M_2 y M_3. Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π. Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

Solución:

(a) Para determinar la altura de cada micrófono, coordenada z, deberemos restar la longitud del cable a la altura del techo. Así M1(2,3,6), M2(4,4,5), M3(5,1,4) .

Para hallar la ecuación del plano hallamos primero dos vectores contenidos en el plano, por ejemplo

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (4,4,5) - (2,3,6) = (2,1,-1)$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = (5,1,4) - (2,3,6) = (3,-2,-2)$$

Cualquier vector

siendo X un punto del plano debe ser combinación lineal de . Por tanto el determinante formado por los tres vectores debe ser cero

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-2) + y - 3 - 7(z-6) = 0\,, \Rightarrow -4x + 8 + y - 3 - 7z + 42 = 0 \Rightarrow$$

$-4x+y-7z+47=0$

(b)

BY NC SA

Primero hallaremos la recta r perpendicular al plano π que pasa por P. La intersección de la recta r con el plano π nos proporcionará la proyección de P perpendicular al plano π. La recta r pasa por P y tiene por vector director el normal del plano π $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (-4,1,-7)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -7\lambda \end{cases}$$

Para hallar la intersección de la recta con el plano, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano. Al resolver la ecuación obtendremos el parámetro, que al sustituirlo en la recta nos dará la proyección de P sobre π.

$$-4(4-4\lambda) + 3 + \lambda - 7(-7\lambda) + 47 = 0 \Rightarrow -16 + 16\lambda + 3 + \lambda + 49\lambda + 47 = 0 \Rightarrow 66\lambda + 34 = 0 \Rightarrow \lambda$$

$$\begin{cases} x = 4 + \frac{68}{33} = \frac{200}{33} \\ y = 3 - \frac{17}{33} = \frac{82}{33} \\ z = -7\left(-\frac{17}{33}\right) = \frac{119}{33} \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33}\right)$

BY NC SA

Problema 2:

Problema 2 [2 puntos] Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}\ln(x)$. Calcula $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4x^3}{x^2+1}\ln(x) = 0 \cdot \ln 0^+ = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{4x^3}{x^2+1}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{T.L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x \cdot 4x^3 - (x^2+1) \cdot 12x^2}{(4x^3)^2}} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4x^4 - 12x^2}{16x^6}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{16x^5}{-4x^4 - 12x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x^3}{-x^2 - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

Solución: 0

BY NC SA

Problema 3:

Problema 3. Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40% de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30% participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20% también participa en torneos oficiales.

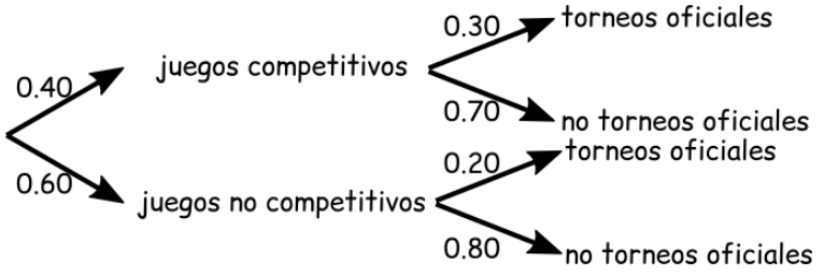
(a) [0.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?

(c) [1.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no? (Nota:No aparece apartado b en la hoja original)

Solución:

(a)

Hacemos el diagrama de árbol



Designamos por JC los que hacen juegos competitivos y TO los que participan en torneos oficiales. La probabilidad de que no participe en torneos oficiales sabiendo que no juega principalmente a juegos competitivos es

$$P(\overline{TO}\,/\,\overline{JC}) = 0.8$$

Solución: 0.8

(c)

$$P(JC/TO) = \frac{P(JC \cap TO)}{P(TO)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.2} = \frac{0.12}{0.24} = 0.5$$
$$P(\overline{JC}\,/TO) = \frac{P(\overline{JC} \cap TO)}{P(TO)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.2} = \frac{0.12}{0.24} = 0.5$$

Solución: $P(\overline{JC}\,/TO) = P(JC/TO) = 0.5$, igualmente probables

BY NC SA

Problema 4.1:

Parte B. Preguntas 4 y 5

Problema 4. Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal () (en microvoltios) en función del tiempo (t) (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función $I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0$.

(a) [1 punto] Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.

(b) [1 punto] Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t)\,dt$.

$$\int 50t\, e^{-0.2t}\, dt$$

Solución:

(a)

Hallamos la derivada de la función e igualamos a cero para hallar los posibles máximo y mínimos relativos

$$I'(t) = 50\, e^{-0.2t} - 10t\, e^{-0.2t} \Rightarrow 50\, e^{-0.2t} - 10t\, e^{-0.2t} = 0 \Rightarrow e^{-0.2t}(50 - 10t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-0.2t} = 0\ S.S \\ 50 - 10t = 0\ t \end{cases}$$

	0		5	$\to \infty$
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{250}{e}$	$\searrow$

En $t = 5\ ms$ la intensidad alcanza un máximo de $\frac{250}{e}\ \mu V$

Solución: I máxima de $\frac{250}{e}\ \mu V$ en $t = 5\ ms$

(b)

Empleamos el método por partes $\begin{cases} t = u \to dt = du \\ dv = e^{-0.2t}dt \to v = \int e^{-0.2t}dt = -5e^{-0.2t} \end{cases} \to$

$$\int 50t\, e^{-0.2t}\, dt = 50\left(-5t\, e^{-0.2t} + \int 5\, e^{-0.2t}dt\right) = -250t\, e^{-0.2t} - 1250\, e^{-0.2t} + C$$

Solución: $\int 50t\, e^{-0.2t}\, dt = -250t\, e^{-0.2t} - 1250\, e^{-0.2t} + C$

BY NC SA

Problema 4.2:

P4.2. La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \qquad t \geq 0.$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta.

Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Solución:

$y(t)$es una función racional, numerador y denominador son funciones polinómicas continuas, en la que el denominador no se anula para ningún valor de t. Por tanto $y(t)$ es una función continua. Además $y(0) = -\frac{1}{2} < 0$ e $y(1) = 1 > 0$, por tanto según el teorema de Bolzano existe al menos 1 $c \in (0,1)$ tal que $y(c) = 0$ es decir ha alcanzado la altura de referencia.

BY NC SA

Problema 5.1:

Problema 5. Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1. Sean A y B dos matrices 3 x 3 tales que A es invertible y $AB + A + I = 2A$, con I la matriz identidad de dimensión 3 x 3.

(a) [1 punto] Calcula la inversa de A en función de I y B.

$$AB + A + I = 2A \Rightarrow AB + I = A \Rightarrow A^{-1}(AB + I) = A^{-1}A \Rightarrow A^{-1}AB + A^{-1} = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow IB + A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = I - B$$

Solución: $A^{-1} = I - B$

(b) [1 punto] Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcula x tal que $Ax = b$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Solución: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

BY NC SA

Problema 5.2:

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x, y y z. Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x+y+z=4, \\ x+y+mz=3, \end{cases}$

donde ($m \geq 0$) es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro (m), si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

Solución:

Analizamos el rango de la matriz de los coeficiente A y la matriz ampliada A^+. Para ello empezamos calculando el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m+3-2-2m = -m+1 \Rightarrow -m+1=0 \Rightarrow m=1$$

Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = 3 = Rang(A^+)$ por tanto el sistema será compatible determinado y la solución será única.

Si $m=1 \Rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ las filas 1 y 3 son iguales. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = Rang(A^+) = 2$ y el sistema será compatible pero indeterminado y no podremos determinar la cantidad de cada sustancia.

Solución: Sólo pueden determinarse si $m \neq 1$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta **prueba consta** de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre los apartados A) o B). Responda **solo** el apartado que elija. En caso contrario, **solo** se corregirá el que aparezca en primer lugar.
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras no programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10%.

Problema 1:

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) **(0.75 puntos)** Calcule los valores de m para que el rango de la matriz A sea 3.
b) **(1.75 puntos)** Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial $A^t \cdot X - B^2 = 2 \cdot X$.
c) **(0.5 puntos)** ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t \cdot A = B \cdot D$?

Problema 2:

EJERCICIO 2 Elija solo **uno** de los apartados A) o B):

A) Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80, \quad 1 \le t \le 6,$$

siendo t el tiempo medido en años.

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.
b) **(0.75 puntos)** Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.
c) **(1.5 puntos)** Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

B) El coste en euros de producción de x toneladas de un determinado producto en una factoría es $C(x) = 0.2x^2 + 40x + 5000$. El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

a) **(0.25 puntos)** Calcule la función $B(x)$ que expresa el beneficio obtenido al vender x toneladas del producto.
b) **(1 punto)** Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.
c) **(1.25 puntos)** Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?
d) **(0.5 puntos)** Estudie cuándo los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

Problema 3:

Problema 4:

BY NC SA

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solución:

Problema 1. — *Solució.*

(a) Sigui π el pla que conté els satèl·lits A, B i C. Notem que els vectors directors del pla són

$$\vec{AB} = (2,0,-2), \quad \vec{AC} = (4,2,0).$$

Aleshores,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ y = 2 + 2\beta, \\ z = 3 - 2\lambda. \end{cases}$$

Per veure que formen un pla orbital, cal veure que el centre de la Terra (origen) pertany a aquest pla. En efecte,

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta, \\ 0 = 2 + 2\beta, \\ 0 = 3 - 2\lambda. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda + 4\beta \\ \beta = -1, \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\tfrac{3}{2} + 4(-1) = 0 \checkmark$$

Nota: Si es vol donar l'equació explícita del pla, tenim que el vector normal de π és

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4,-8,4) \equiv (1,-2,1),$$

Per tant, l'equació explícita del pla és $x - 2y + z + d = 0$ tal que

$$x - 2y + z + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2 \cdot 2 + 3 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0.$$

És a dir, $\pi_1 : x - 2y + z = 0$ on podem observar que, en efecte, el punt $(0,0,0)$ hi pertany.

(b) Hem de proporcionar un punt F de tal manera que D, E i F formin un pla orbital. Així doncs, F ha de ser un punt del pla DEO (sent O l'origen $(0,0,0)$).

Calculem el pla DEO. Notem que té vectors directors

$$\vec{DE} = (2,2,0) \equiv (1,1,0), \quad \vec{DO} = (2,1,1).$$

Aleshores,

$$\pi_1 : \begin{cases} x = \lambda + 2\beta, \\ y = \lambda + \beta, \\ z = \beta. \end{cases}$$

Per tant, F és qualsevol punt de la forma

$$(\lambda + 2\beta, \lambda + \beta, \beta); \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

BY NC SA

diferents de O, D i E (és a dir, $(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1),(2,1),(0,0)\}$). Un possible punt a donar seria $F(6,4,2)$.

Criteris:

(a) **0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla. 0.5 punts per comprovar que és pla orbital ($(0,0,0) \in \pi$).**

(b) **0.5 punts per calcular correctament l'equació del pla DEO. 0.5 punts per propocionar un F vàlid. Es penalitza amb -0.25 si només proporcionen el cas general i no especifiquen un punt concret.**

Aquest apartat es podria resoldre de manera diferent de la plantejada. En general, valoram amb 0.5 punts per plantejar correctament el problema i 0.5 punts per executar-lo correctament.
Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

BY NC SA

Problema 2:

Solución:

Problema 2. — *Solució.*

(a) Notem que el domini de la funció és $D = (0, +\infty)$. Per tant, hem de calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = 1,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}} + e^x = +\infty,$$

ja que e^x creix més de pressa que $x^{7/2}$.

(b) Notem que $f(2) = -15.2384 < -1$ i $f(4) = -9.4018$. Aleshores, volem calcular

$$\int_2^4 (-1 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(-1 - x^{\frac{7}{2}} + 6x^{\frac{5}{2}} - e^x\right)\,\mathrm{d}x = \left[-x - \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + 6\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - e^x\right]_2^4 \mathrm{d}x$$

$$= 47.0526 - 4.9776 = 42.075\ u^2.$$

Criteris:

(a) **0.25 punts per cada límit ben plantejat i 0.25 per cada límit ben calculat.**

(b) **0.5 punts per plantejar correctament la integral, 0.25 punts per calcular bé la integral, 0.25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow. Es penalitza amb -0.25 punts si no indiquen les unitats.**

Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

BY NC SA

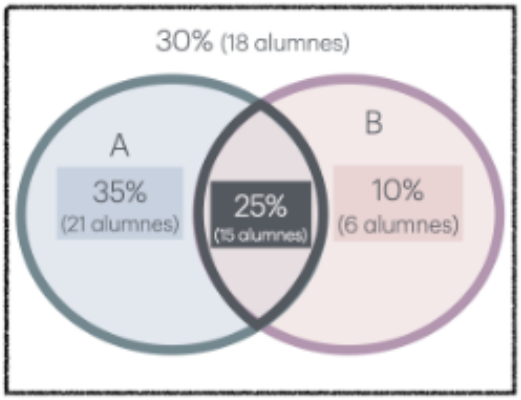
Problema 3:

Solución:

Problema 3. — *Solució.* Sigui A el succés "Jugar a bàsquet" i B el succés "Estar federat". Segons les dades de l'enunciat, tenim que

- $P(A) = \frac{60}{100}$, que ens indica que el 60% de $60 = 36$ alumnes juguen a bàsquet.
- $P(B) = \frac{35}{100}$, que ens indica que el 35% de $60 = 21$ alumnes estan federats.
- $P(A \cap B) = \frac{25}{100}$, que ens indica que el 25% de $60 = 15$ alumnes juguen a bàsquet i estan federats.

Tot seguit es pot observar el diagrama de Venn resultant.



(a) $P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{10}{100} = 0.1$, per tant, el 10% de $60 = 6$ alumnes estan federats, però no juguen.

(b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.25}{0.6} = 0.4167.$

Criteris:

(a) 0.25 punts pel plantejament i notació correctes, 0.25 punts per la resposta correcta de la probabilitat i 0.5 punts per calcular el nombre d'alumnes correctament.

(b) 0.5 punts pel plantejament i notació correctes, 0.5 punts per la resposta correcta.

Es penalitza amb -0.2 punts si no defineixen els successos correctament.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval $[0,1]$).

BY NC SA

Problema 4:

Solución:

Part B.

Problema 4. — **P4.1** *Solució.*

(a) Volem veure que la derivada de la funció s'anul·la en cada un dels intervals proporcionats. Per això, calculem primer la derivada i vegem després l'existència d'aquests punts aplicant el teorema de Bolzano en cada un dels intervals.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - (x^3+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{(x+2)^2},$$

la qual és contínua a $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, ja que el denominador s'anul·la a $x = -2$. Ara bé, en cada un dels intervals proporcionats, la funció és contínua. A més,

$$\begin{array}{lll} f'(-3) = -1 < 0, & f'(-2.5) = 21 > 0 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_1 \in (-3,-2.5);\ f'(c_1) = 0. \\ f'(-1) = 3, & f'(0) = -0.25 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_2 \in (-1,0);\ f'(c_2) = 0. \\ f'(0) = -0.25, & f'(1) = 0.7778 & \Rightarrow_{\text{Bolzano}} \exists c_3 \in (0,1);\ f'(c_3) = 0. \end{array}$$

(b) Pel signe de la derivada en els extrems dels intervals, es conclou que en c_1 hi ha un mínim, en c_2 un màxim i en c_3 un altre mínim.

Criteris:

(a) 0.25 per calcular la derivada de la funció, 0.5 per justificar bé que la funció és contínua, 0.25 per veure que els extrems dels intervals tenen signe oposat, 0.25 punts per indicar que empren el teorema de Bolzano i concloure l'existència dels diferents punts crítics.

(b) 0.25 punts per cada punt crític ben classificat.

Es penalitza amb un màxim de −0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

P4.2 *Solució.*

(a) Volem veure cap a quina distància del punt inicial es dirigeix el dofí a mesura que passa el temps. Per tant,

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = \lim_{t\to\infty} 140\left(1 - e^{-0.05t}\right) = 140m.$$

(b) Volem veure el creixement i decreixement de la funció velocitat, la qual és $v(t) = d'(t) = 140 \cdot 0.05e^{-0.05t} = 7e^{-0.05t}$. Calculant la derivada de $v(t)$ tenim que

$$v'(t) = -0.35e^{-0.05t} < 0,$$

per tant, la velocitat sempre decreix, ja que la seva derivada és sempre negativa. Aleshores, la velocitat màxima s'assoleix a $t = 0$, sent aquesta $v(0) = 7\,\text{m/s}$. La velocitat mínima no s'assoleix en un temps finit però sí que tendeix a $0\,\text{m/s}$, ja que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} 7e^{-0.05t} = 0\,\text{m/s}.$$

Tendeix a aturar-se.

BY NC SA

Problema 5:

Solución:

Problema 5. — **P5.1** *Solució.* Vegem primer de tot AC. Notem que tant A com C són de dimensió 2×3. Per tant, el nombre de columnes de A no coincideix amb el nombre de files de C, per la qual cosa no es poden multiplicar.

Vegem ara $D^{-1}A$. Notem que D no és una matriu quadrada, ja que és 2×3 i, per tant, no és invertible i no es pot realitzar l'operació.

Vegem ara $B(A+C)^\top$. Notem que A i C tenen la mateixa dimensió, per tant, es poden sumar, i donen lloc a una matriu 2×3. En transposar-la obtenim una matriu 3×2. Com que B és una matriu de dimensió 1×3, el nombre de columnes de B coincideix amb el nombre de files de $(A+C)^\top$ i, per tant, es poden multiplicar, i donen lloc a una matriu 1×2.

Criteris:

(i) 0.5 punts per discutir que AC no és calculable;

(ii) 0.5 punts per veure que D no és invertible;

(iii) 0.5 punts per discutir que $B(A+C)^\top$ és calculable i 0.5 punts per dir-ne correctament la dimensió.

Una resposta sense una justificació vàlida no s'avalua.

P5.2 *Solució.* Necessitam discutir si es tracta d'un sistema compatible determinat o no.

El sistema en forma matricial s'escriu com a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6500 \\ 22500 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 8 + 7 - 5 - 28 - 12 = 0; \quad \det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 \neq 0.$$

Per tant, el $\text{Rang}(A) = 2$. Notem que amb això ja basta per dir que el sistema no és compatible determinat, ja que $\text{Rang}(A) \neq$ nombre d'incògnites. Conseqüentment, no es pot donar una única solució del sistema, la qual cosa implica que no es poden determinar de manera única els costos del servei. Notem que pot passar que el sistema no tengui solució o que en tengui infinites. Si es vol assegurar que en té infinites cal veure que $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2$ (no cal).
Una altra manera d'atacar el problema seria resolent directament el sistema, d'on s'obtendria que hi ha infinites solucions o veure directament que

$$(\text{Esdeveniment } 2) = (\text{Esdeveniment } 1) + 2(\text{Esdeveniment } 3).$$

Totes les estratègies són vàlides.

Criteris: 0.5 punts per plantejar correctament el problema, 1 punt per executar-lo correctament, 0.5 punts per concloure el resultat.
Es penalitza amb un màxim de -0.4 punts si la formalització matemàtica no és adequada.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Gómez Pastrana Valdepeñas y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones:
Debe responder un máximo de 5 preguntas: 3 obligatorias y 2 opcionales de bloques diferentes.
- En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque opcional, se considerará sólo la primera pregunta.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

Bloque 1.- Análisis I (La barredora de ceniza volcánica)

1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de 0.5 $km^2/hora$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en $km2$, siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima.

$$f(t) = \frac{10t + 5}{2t^2 + 4} + 5$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto.

¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto?

b) Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta.

c) La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza?

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A. Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A.

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto:

$$\pi: 2x + 3y = 0 \; ; \; P(1, -5, 1)$$

a) Hallar la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

Textos Marea Verde

b) Estudiar la posición relativa de la recta $s: \begin{cases} -x+3y-3z=-3 \\ 4x+9y-2z=-2 \end{cases}$ con el plano π

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral definida:

2

$$\int_1^2 xe^x dx$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\frac{a}{x-2}, & x<1 \\ a+\frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

2 Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dar la expresión de la función resultante.

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

a) Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios.

b) Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares.

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

a) Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año.

b) Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación?

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis I (La barredora de ceniza volcánica)

1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de 0.5 $km^2/hora$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en $km2$, siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima.

$$f(t) = \frac{10t + 5}{2t^2 + 4} + 5$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto.

¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto?

b) Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta.

c) La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza?

Solución:

Apartado a)

Estamos ante una función claramente continua, pues el denominador de la fracción presente en su expresión no se anula en ningún punto, y el denominador es una función lineal. Además definida en el intervalo]0, +∞ [, pues no tiene sentido tomar valores negativos ya que la variable atiende al número de días transcurridos desde la erupción. Además, también es derivable, y la función derivada es la siguiente:

$$\boldsymbol{f'(t) = \frac{-20 \cdot (t^2 + t - 2)}{(2t^2 + 4)^2}}$$

La derivada también es continua, ya que el denominador es positivo en todo el dominio de definición (el cual es el mismo que la función de partida) y la expresión del numerador atiende a una función cuadrática. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de nuestra función inicial, bastará con estudiar el signo de la función derivada en el dominio de definición.

Para ello, veamos en qué valores de $\boldsymbol{t}$ se anula la función derivada y estudiemos qué sucede con su signo para valores muy próximos a estos.

Para ver en qué valores se anula la función derivada, estudiemos la ecuación $\boldsymbol{2t^2 + t - 2 = 0}$:

$$\boldsymbol{t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{4} \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4}},$$

de donde concluimos que la única solución a tener en cuenta por la naturaleza del dominio de definición de la función es $\boldsymbol{t_1 = 1}$

Sean $\boldsymbol{k_0 = 0.5}$ y $\boldsymbol{k_1 = 1.5}$ valores reales positivos cumpliendo $\boldsymbol{k_0 < t_1 < k_1}$. ¿Cuál es el signo de la derivada en $\boldsymbol{k_0}$ y $\boldsymbol{k_1}$? Bastará con estudiar los signos en estos puntos por la continuidad de la función

BY NC SA
Textos Marea Verde

derivada.

Caso $\boldsymbol{k_0}$:

$$\boldsymbol{f'(k_0) = \frac{-20\cdot(0.5^2+0.5-2)}{(2\cdot 0.5^2+4)^2} > 0},$$

lo cual indica que la función $\boldsymbol{f}$ es **creciente** en el intervalo $]0,\boldsymbol{t_1}[$.

Caso $\boldsymbol{k_1}$:

$$\boldsymbol{f'(k_1) = \frac{-20\cdot(1.5^2+1.5-2)}{(2\cdot 1\text{^}2+4)^2} < 0},$$

lo cual indica que la función $\boldsymbol{f}$ es **decreciente** en el intervalo $]\boldsymbol{t_{1,+\infty}}[$. Con esta información, podemos además afirmar que $\boldsymbol{t_1}$ es un **máximo** de la función $\boldsymbol{f}$, y que además es **absoluto**, ya que es el único extremo relativo de la función.

Por último, ante la pregunta *"¿Existe algún valor extremo en el modelo?"*, la respuesta es evidentemente sí, y se trata del valor $\boldsymbol{t_1}$. La extensión de la mancha de ceniza en este punto es la siguiente:

$$\boldsymbol{f(t_1) = \frac{10\cdot 1+5}{2\cdot 1^2+4} + 5 \simeq 7.5\ km^2}$$

Apartado b)

En base a la información del apartado anterior, sabemos que la función decrece una vez alcanzado su máximo valor. Debemos comprobar si, con el transcurso de los días, el decrecimiento se aproxima a 0:

$$\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty} \frac{10t+5}{2t^2+4} + 5 = \frac{\infty}{\infty}},$$

lo que supone una indeterminación. Como el denominador de esta expresión es de mayor grado que la del numerador, podemos asegurar que el límite es 0.

Con esta información, podemos asegurar que la afirmación del técnico del equipo es cierta, ya que la extensión de la mancha de ceniza decrece con el paso de los días y tiene a hacerse 0.

Apartado c)

Veamos primero la extensión de la mancha de ceniza en el cuarto día:

$$\boldsymbol{f(4) = \frac{10\cdot 4+5}{2\cdot 4^2+4} + 5 = 6.25 km^2}$$

Dado que la barredora limpia a razón de $\boldsymbol{0.5 km^2/hora}$, calculemos el número de horas necesarias para barrer los $\boldsymbol{6.25 km^2}$. Para ello, resolvamos la siguiente ecuación. Sea $\boldsymbol{x}$ el número de horas invertidas en barrer:

$$\boldsymbol{0.5x = 6.25 \Rightarrow x = \frac{6.25}{0.5} = 12.5} \text{ horas}$$

La barredora tardará entonces 12.5 horas en realizar el trabajo.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A. Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A.

Solución:

Sean X e Y las matrices pedidas. En base a la información del problema, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + 2Y = A \\ X - 2Y = A^{-1} \end{cases}$$

Antes de proceder, calculemos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (A^*)^t$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esta información, volvamos al sistema. Despejamos de la primera ecuación la matriz X, obteniendo la expresión $X = A - 2Y$. Observemos que el orden el que escribamos las matrices es indiferente, ya que estamos trabajando con matrices cuadradas. Con esta última expresión, sustituimos en la segunda ecuación matricial:

$$X - 2Y = A^{-1} \Rightarrow A - 2Y - 2Y = A^{-1} \Rightarrow A - 4Y = A^{-1} \Rightarrow Y = \frac{1}{4} \cdot (A - A^{-1}),$$

de donde se obtiene que, sustituyendo las matrices A y A^{-1} por sus expresiones correspondientes, la matriz Y resulta ser:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

y volviendo a la expresión $X = A - 2Y$, se obtiene que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto:

$$\pi\colon 2x + 3y = 0;\ P(1, -5, 1)$$

a) Hallar la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Estudiar la posición relativa de la recta s: $\begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π

Solución:

Apartado a)

Para calcular la recta *r*, tendremos que determinar su vector director (que llamaremos $\overrightarrow{v_r}$) y aplicar la condición de que el punto $P(1, -5, 1)$ esté contenido en ella. Para ello, por la naturaleza de la ecuación implícita de un plano, sabemos que el vector normal al plano π es $\overrightarrow{n_\pi} = (2,3,0)$.

Como *r* ha de ser perpendicular a π, el vector director de *r* y el vector normal a π han de ser proporcionales. Tomemos entonces por vector director de la recta el vector normal al plano π:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (2,3,0)$$

Por último, apliquemos la condición de que P pertenezca a *r*. Para ello, usemos por ejemplo la expresión de la **ecuación continua** de una recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{0},$$

donde el 0 del tercer denominador, entiéndase, no es una división por 0, sino la tercera componente del vector director. Demos las ecuaciones implícitas de esta recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ z = 1 \end{cases}$$

Apartado b)

Para estudiar la posición relativa de la recta s dada con respecto al plano π, apliquemos el siguiente razonamiento: si el vector director de s es perpendicular al vector normal de π, estaremos en el caso en el que la recta es paralela al plano (o incluso está contenida en él). Comprobemos primero esto y, en caso contrario, podremos asegurar que la recta corta al plano.

Para ello, calculemos el vector director de s, al cual llamaremos $\overrightarrow{v_s}$. Para ello, observemos que las ecuaciones implícitas dadas nos indican los planos cuya intersección producen la recta s. Por ello, el producto vectorial de los vectores normales a ambos planos nos dará un vector director para la recta s. Llamemos a los planos de intersección π_1 y π_2, y a sus vectores normales $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ y $\overrightarrow{n_{\pi_2}}$ respectivamente.

$$\overrightarrow{n_{\pi_1}} = (-1,3,-3)\ ;\ \overrightarrow{n_{\pi_2}} = (4,9,-2)$$

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 15\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 21\hat{k} = (15, -9, -21)$$

Por simplicidad, tomemos $\overrightarrow{v_s} = (5, -3, -7)$, ya que es proporcional al anterior.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$\overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 7 \cdot 0 = 1 \neq 0,$$

lo cual nos indica que dichos vectores no son perpendiculares, y por tanto, la recta s interseca con el plano π. Calculemos el punto de intersección pues. Para ello, consideremos las **ecuaciones paramétricas** de la recta s. Observemos que el punto $Q(0,0,1)$ pertenece a la recta s, ya que cumple sus ecuaciones implícitas. Con este punto y el vector director previamente calculado, tenemos que las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 1 - 7\lambda \end{cases},$$

donde λ es un parámetro real. Sustituyendo en la ecuación implícita del plano π:

$$2 \cdot (5\lambda) + 3 \cdot (-3\lambda) = 0 \Rightarrow 10\lambda - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

con lo cual, el punto de intersección es el anteriormente considerado $Q(0,0,1)$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral definida:

2 $$\int_1^2 xe^x dx$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

2 Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dar la expresión de la función resultante.

Solución:

4A)

Para resolver esta integral, apliquemos el método de integración por partes:

$$\int_1^2 xe^x\,dx = xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx = xe^x]_1^2 - e^x]_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = x} \\ \boldsymbol{dv = e^x dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{du = dx} \\ \boldsymbol{v = e^x} \end{matrix}$$

4B)

Antes de continuar, observemos que la función dada es continua y derivable en cada uno de los trozos indicados, teniendo el conflicto únicamente en el punto $x = 1$, que es donde se realizará el estudio. Para dar respuesta a lo que se pide, estudiaremos la continuidad y derivabilidad en este punto de conflicto.

Continuidad:

Tendremos que estudiar el límite de la función a izquierda y derecha de $x = 1$, exigiendo que ambos sean iguales:

- Límite a izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 + \frac{a}{x-2} = 1 - a$$

- Límite a derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} a + \frac{b}{\sqrt{x}} = a + b$$

Como se quiere que la función sea continua, debemos igualar ambos límites:

$$1 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 1,$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

lo cual es una ecuación en dos variables. Para resolverla, apliquemos la condición de derivabilidad en $x = 1$.

Derivabilidad:

Primero, hallemos la función derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{(x-2)^2}, si\ x < 1 \\ -\dfrac{b}{\sqrt{x^3}}, si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$, debemos exigir que la función derivada sea continua en dicho punto. Aplicaremos un proceso análogo al caso de la continuidad:

- Límite a izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{a}{(x-2)^2} = -a$$

- Límite a derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{b}{\sqrt{x^3}} = -b$$

Como queremos que la derivada sea continua en $x = 1$, igualamos ambos límites:

$$-a = -b \Rightarrow a = b$$

Ya tenemos pues dos condiciones para los parámetros a y b:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a = b \end{cases},$$

lo que es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Aplicando la condición de la segunda ecuación en la primera, obtenemos lo siguiente:

$$2a + a = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = b = \frac{1}{3}$$

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

a) Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios.

b) Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares.

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

a) Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año.

b) Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación?

Solución:

5A)

a) Para dar respuesta a lo que se pregunta, calculemos la probabilidad de obtener un valor de la variable, a la que llamaremos X, entre 70 y 80 minutos, y apliquemos esta probabilidad sobre el número total de alumnos de la muestra.

Recordemos que la expresión de la función de densidad de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$, donde μ representa la media y σ la desviación típica, es la siguiente:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}dt$$

Para simplificar los cálculos, vamos a tipificar nuestra variable aleatoria haciendo el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$Si\ X\to N(74{,}20)\Rightarrow Z\to N(0{,}1)$$

Calcular la probabilidad $P(70<Z<80)$ es el mismo problema que calcular la probabilidad

$P\left(\frac{70-74}{20}<Z<\frac{80-74}{20}\right)=P(-0.2<Z<0.3)$, por medio del cambio de variable anteriormente dado. Se entiende que al pedir "**entre**" no se consideran los extremos. Calculemos pues $P(-0.2<Z<0.3)$:

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$P(-0.2 < Z < 0.3) = P(Z < 0.3) - [1 - P(Z < 0.2)]$$

Buscando los valores correspondientes de la probabilidad en la tabla de la distribución normal N(0, 1):

- $P(Z < 0.3) = \int_{-\infty}^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz \;=\; 0.6179$
- $P(Z < 0.2) = \int_{-\infty}^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz \;=\; 0.5793$

Entonces, se tiene:

$$P(-0.2 < Z < 0.3) = P(Z < 0.3) - [1 - P(Z < 0.2)] = 0.6179 - (1 - 0.5793) = 0.1972,$$

o lo que es lo mismo, el **19.72%** de los alumnos usan auriculares entre 70 y 80 minutos. Dado que la muestra era de 4000 alumnos, el dato exacto del alumnado que se encuentra en este intervalo es el siguiente:

$$19.72\%\ de\ 4000 \;\approx\; \textbf{789 alumnos}$$

b) Hacer un uso moderado de los auriculares supone usarlos 50 minutos o menos. ¿Cuál será entonces la probabilidad de obtener un valor de la variable por debajo de los 50 minutos? Para hacer este cálculo, mantengamos el cambio de variable del apartado anterior tras la tipificación.

$$P(X \leq 50) = P(Z \leq -1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$$

Buscando la probabilidad correspondiente en la tabla de la distribución normal N(0, 1), sabemos que $P(Z \leq 1.2) = 0.8849$

Entonces, se tiene:

$$P(X \leq 50) = P(Z \leq -1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) \;=\; 1 \;-\; 0.8849 \;=\; 0.1151,$$

o lo que es lo mismo, un **11.51%** de los alumnos hace un uso moderado de los auriculares.

5B)

a) Por la naturaleza del suceso planteado, podemos asegurar que este se modela por una variable aleatoria X que sigue una distribución **binomial** donde se llevan a cabo 150 realizaciones independientes del experimento, con una probabilidad de éxito $p = \frac{3}{5} = 0.6$:

$$X \to B(150, 0.6)$$

Se nos pide calcular la probabilidad de obtener entre 82 y 94 éxitos, es decir: $P(82 < X < 94)$. Una vez más, se entiende que al indicar "**entre**", no consideraremos los extremos.

Observemos que estamos ante un caso de distribución binomial en la que el número de realizaciones del experimento es muy elevado. En estos casos, aproximaremos nuestra distribución a una distribución normal sin más que hacer lo siguiente:

Dada $X \to B(n, p)$, con $n > 10, n \cdot p > 5$, y $n \cdot (1 - p) > 5$, se tiene que $X \to N(\mu, \sigma)$, con $\mu = n \cdot p$, y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$. Tengamos en cuenta además que, al aproximar una distribución discreta (como

es la binomial) a una distribución continua (como es la normal), tendremos que aplicar la **corrección de Yates** al calcular la probabilidad, que consiste en sumar 0.5 a los extremos si se estudia la probabilidad de que el valor de la variable quede por debajo de dicho extremo, y restar 0.5 en caso contrario.

Con esta información, nuestra variable aleatoria sigue entonces una distribución normal de media $\mu = 90$ y desviación típica $\sigma = 6$. Tipificamos nuestra variable aleatoria mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Debemos calcular $P(82 < X < 94)$, aplicamos la corrección de Yates y nos queda

$\mathrm{P}(82.5 < \mathrm{X}' < 93.5)$ luego, por el cambio de variable anteriormente indicado, calcular

$P(82 < X < 94)$ es lo mismo que calcular $P\left(\frac{82.5-90}{6} < Z < \frac{93.5-90}{6}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.58) = P(Z \leq 0.58) - [1 - P(Z \leq 1.25)]$

Consultando los valores de probabilidad correspondientes en la tabla de la distribución normal N(0, 1), sabemos que:

- $P(Z \leq 0.58) \approx 0.7190$
- $P(Z \leq 1.25) \approx 0.8944$

Con esta información, se tiene pues:

$$P(Z \leq 0.58) - [1 - P(Z \leq 1.25)] = 0.7190 - (1 - 0.8944) = \mathbf{0.679}$$

b) Debemos calcular $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 80)$. Aplicando de nuevo la corrección de Yates, calculamos $P(X' \geq 80.5)$. Una vez más, aplicamos el cambio de variable $Z = \frac{X\prime-\mu}{\sigma}$ para tipificar. Así pues, calcular $P(X > 80)$ es análogo a calcular $P\left(Z \geq \frac{80.5-90}{6}\right) = P(Z \geq -1.58) = P(Z \leq 1.58)$

Buscamos el valor correspondiente de la probabilidad en la tabla de la normal N(0, 1) y obtenemos $P(Z \leq 1.58) = 0.9429$.

Luego, $P(X \geq 80) = 0.9429$ es decir, la probabilidad de que germinen y sobrevivan más de 80 semillas es del 94.29 % > 90 %, y en base a los datos, incluirán esta técnica en el plan de reforestación.

Textos Marea Verde

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA**

Instrucciones:
- Debe responder un máximo de 5 preguntas: 3 obligatorias y 2 opcionales de bloques diferentes.
- En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque opcional, se considerará sólo la primera pregunta.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

Problema 1:

Bloque 1.- Análisis I (La ultramaratón)

1. Una ultramaratón internacional realizada en Gran Canaria atraviesa espacios naturales protegidos muy sensibles, como el Parque Natural de Tamadaba o el Parque Rural del Nublo. El Cabildo Insular ha establecido la cantidad máxima de 7500 participantes para poder garantizar la conservación de los parques por los que discurre la prueba.

Siguiendo datos de otros años, se propone un modelo matemático dado por la función $I(t)$, que mide el número total de corredores inscritos (expresados en miles) transcurrido el tiempo t (en meses) desde la apertura de las inscripciones.

$$I(t) = \begin{cases} 5e^{0.8t-4}, 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{14t-65}{2t-9}, t > 5 \end{cases}$$

1.5 a) Indicar si el modelo es continuo y derivable en su dominio de definición.

0.5 b) El modelo propuesto, ¿garantiza que no se superará el número máximo de inscripciones permitidas? Justificar la respuesta.

Problema 2:

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la siguiente matriz $A \in M_{3x3}$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

0.75 a) Averiguar los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.

1.25 b) Calcular la matriz inversa de A, cuando $k = 1$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional, se conoce que el siguiente plano y recta son secantes:

$$\pi: x + 3y + 2z = 10 \quad ; \quad r: \frac{x+21}{11} = 3 - y = \frac{5-z}{2}$$

1 a) Averiguar el punto de corte entre el plano π y la recta r.

1 b) Calcular el ángulo generado por el plano π y la recta r.

Problema 4:

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral indefinida:

2
$$\int \sqrt{7x+5}dx$$

4B. Dada la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$$

1.25 a) Averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

0.75 b) Estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando se aproxima a $\pm\infty$
¿Qué se puede afirmar en relación a la asíntota horizontal de $f(x)$?

Problema 5:

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. La playa de Famara (Lanzarote) es muy famosa por la calidad de sus olas para la realización de Surf. La academia de surf "FaMa-t-Surf" ofrece cursos para quienes quieren iniciarse en este deporte y garantiza que, tras sus sesiones de formación, un surfista principiante surfeará la ola con un 70% de posibilidades.

1.25 a) Se elige al azar un surfista que ha seguido las clases de esta academia. Si intenta surfear 5 olas, ¿cuál es la probabilidad de que logre surfear alguna de ellas?

0.75 b) Para contratar un nuevo monitor se evalúa a un surfista experimentado que tiene un 90% de probabilidad de surfear una ola. Se contrata si logra surfear al menos 14 de 15 olas, ¿cuál es la probabilidad de que consiga el puesto?

5B. El servicio de instrumentación del Roque de los Muchachos (La Palma) recibe un lote de 120 sensores de luz. De estos, 20 sensores de luz son de ultra-alta sensibilidad destinados al telescopio LST-1, y el resto son de sensibilidad estándar y se reparten por igual entre los telescopios MAGIC I y MAGIC II.

Tras el largo transporte por carretera hasta la cumbre, la probabilidad de que un sensor de los MAGIC sufra un micro-desajuste y se deba recalibrar en el laboratorio, es del 1.6%. Mientras que, sensores del LST-1 están en embalajes más reforzados y el micro-desajuste sucede el 0.9% de las veces.

Antes de instalarlos, el jefe de operaciones elige al azar un sensor del lote para comprobar su estado.

1 a) Calcular la probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado.

1 b) Elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, justificar razonadamente si la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1.

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Bloque 1.- Análisis I (La ultramaratón)

1. Una ultramaratón internacional realizada en Gran Canaria atraviesa espacios naturales protegidos muy sensibles, como el Parque Natural de Tamadaba o el Parque Rural del Nublo. El Cabildo Insular ha establecido la cantidad máxima de 7500 participantes para poder garantizar la conservación de los parques por los que discurre la prueba.

Siguiendo datos de otros años, se propone un modelo matemático dado por la función $I(t)$, que mide el número total de corredores inscritos (expresados en miles) transcurrido el tiempo t (en meses) desde la apertura de las inscripciones.

$$I(t)=\begin{cases}5e^{0.8t-4}, 0\le t\le 5\\ \dfrac{14t-65}{2t-9}, t>5\end{cases}$$

1.5 a) Indicar si el modelo es continuo y derivable en su dominio de definición.

0.5 b) El modelo propuesto, ¿garantiza que no se superará el número máximo de inscripciones permitidas? Justificar la respuesta.

Solución:

a) La función en el intervalo $[0,5)$ tiene la expresión $I(t)=5e^{0.8t-4}$ que es una exponencial y por tanto continua.

La función en el intervalo $(5,+\infty)$ tiene la expresión $I(t)=\dfrac{14t-65}{2t-9}$ que es una racional cuyo denominador se anula para $t=4.5$ que no pertenece al intervalo de definición y por tanto es continua.

Estudiamos la continuidad en $t=5$.

$$\left.\begin{array}{l} I(5)=5e^{0.8\cdot 5-4}=5e^{0}=5\\ \lim\limits_{t\to 5^-} I(t)=\lim\limits_{x\to 5^-} 5e^{0.8t-4}=5\\ \lim\limits_{t\to 5^+} I(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}\dfrac{14t-65}{2t-9}=\dfrac{14\cdot 5-65}{2\cdot 5-9}=5\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to 5^+} I(t)=\lim_{t\to 5^-} I(t)=I(5)=5$$

La función es continua en $t=5$. La función es continua en su dominio de definición $[0,+\infty)$.

La función es derivable en $[0,5)\cup(5,+\infty)$. Hallamos su derivada.

$$I'(t)=\begin{cases}5\cdot 0.8\cdot e^{0.8t-4}=4e^{0.8t-4}, 0\le t<5\\ \dfrac{14(2t-9)-2(14t-65)}{(2t-9)^2}=\dfrac{28t-126-28t+130}{(2t-9)^2}=\dfrac{4}{(2t-9)^2}, t>5\end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $t=5$.

$$\left.\begin{array}{l} I'(5^-)=\lim\limits_{t\to 5^-} I'(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} 4e^{0.8t-4}=4e^{0.8\cdot 5-4}=4\\ I'(5^+)=\lim\limits_{t\to 5^+} I'(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}\dfrac{4}{(2t-9)^2}=\dfrac{4}{(2\cdot 5-9)^2}=4\end{array}\right\}\Rightarrow I'(5^-)=I'(5^+)=4$$

Textos Marea Verde

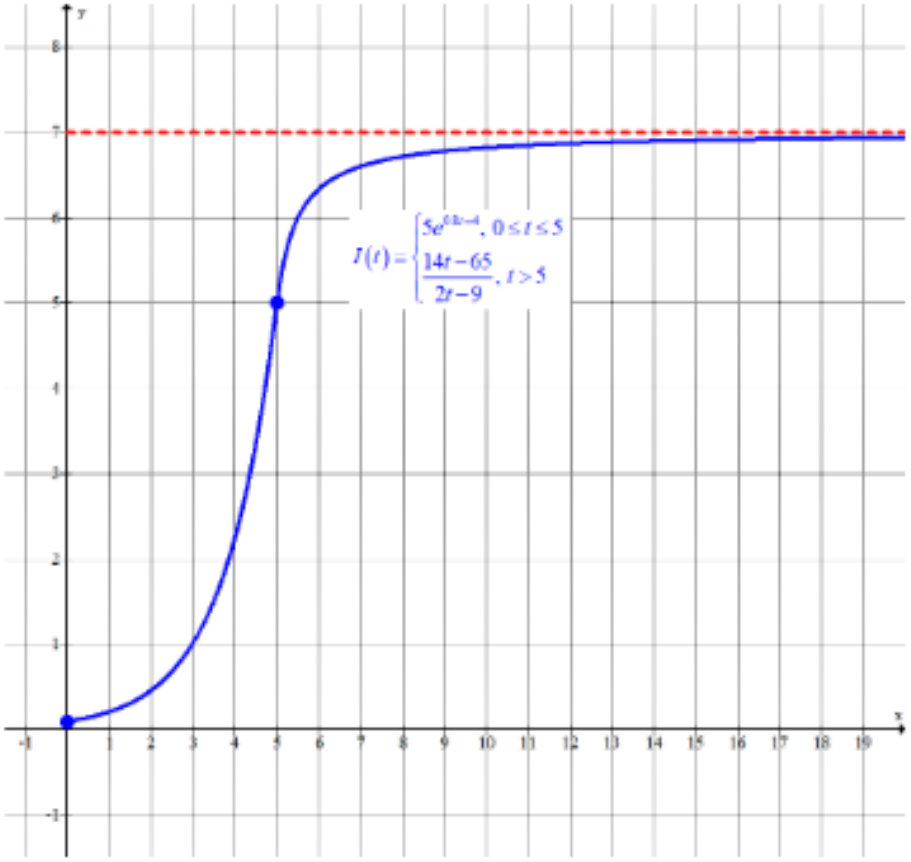
Coinciden las derivadas laterales y la función es derivable en $t=5$. La función es derivable en su dominio de definición $[0,+\infty)$.

b) En el intervalo $[0,5)$ la derivada es $I'(t)=4e^{0.8t-4}$, que siempre es positiva. La función crece en dicho intervalo y su valor más alto se alcanza para $t=5$: $I(5)=5$, es decir, el valor más alto es de 5000 corredores y no se superan los 7500.

En el intervalo $(5,+\infty)$ la derivada es $I'(t)=\dfrac{4}{(2t-9)^2}$, que siempre es positiva. La función crece en dicho intervalo y su valor más alto se alcanza cuando t tiende a $+\infty$. Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{14t-65}{2t-9}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{14t}{t}-\frac{65}{t}}{\frac{2t}{t}-\frac{9}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{14-\frac{65}{t}}{2-\frac{9}{t}}=\frac{14-\frac{14}{\infty}}{2-\frac{9}{\infty}}=\frac{14-0}{2-0}=7$$

En el intervalo $(5,+\infty)$ la función no supera el valor de 7, es decir, no se superan los 7000 corredores y, por tanto, no se superan los 7500.



BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la siguiente matriz $A \in M_{3x3}$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

0.75 a) Averiguar los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.

1.25 b) Calcular la matriz inversa de A, cuando $k = 1$

Solución:

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 0 & k \end{vmatrix} = 6k - k^3 + 0 - 0 + k^2 - 0 = -k^3 + k^2 + 6k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^3 + k^2 + 6k = 0 \Rightarrow -k\left(k^2 - k - 6\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{k = 0} \\ k^2 - k - 6 = 0 \rightarrow k = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = \boxed{3 = k} \\ \dfrac{1-5}{2} = \boxed{-2 = k} \end{cases} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de k distinto de -2, 0 y 3.

b) Para $k = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 1 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & -1/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional, se conoce que el siguiente plano y recta son secantes:

$$\pi: x+3y+2z=10 \quad ; \quad r: \frac{x+21}{11}=3-y=\frac{5-z}{2}$$

1 a) Averiguar el punto de corte entre el plano π y la recta r.

1 b) Calcular el ángulo generado por el plano π y la recta r.

Solución:

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta y resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r: \frac{x+21}{11}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-21,3,5) \\ \vec{v}_r=(11,-1,-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-21+11\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases}$$

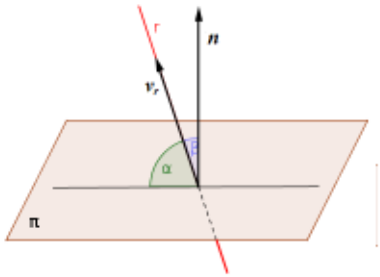
$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+3y+2z=10 \\ r: \begin{cases} x=-21+11\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -21+11\lambda+3(3-\lambda)+2(5-2\lambda)=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -21+11\lambda+9-3\lambda+10-4\lambda=10 \Rightarrow 4\lambda=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow \begin{cases} x=-21+33=12 \\ y=3-3=0 \\ z=5-6=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(12,0,-1)}$$

El punto Q de corte del plano y la recta tiene coordenadas $Q(12,0,-1)$.

b) Obtenemos el ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal del plano.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r=(11,-1,-2) \\ \pi: x+3y+2z=10 \rightarrow \vec{n}=(1,3,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r,\vec{n})=\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|}=$$

$$=\frac{|(11,-1,-2)(1,3,2)|}{\sqrt{11^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{11-3-4}{\sqrt{126}\sqrt{14}}=\frac{2}{21}$$

$$\beta=(\vec{v}_r,\vec{n})=\cos^{-1}\left(\frac{2}{21}\right)=84.5°$$

El ángulo formado entre recta y plano es $\alpha = 90° - 84.5° = 5.5°$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral indefinida:

2 $$\int \sqrt{7x+5}dx$$

4B. Dada la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$$

1.25 a) Averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

0.75 b) Estudiar la tendencia de $f(x)$ cuando se aproxima a $\pm\infty$
¿Qué se puede afirmar en relación a la asíntota horizontal de $f(x)$?

Solución 4A:

Calculamos la integral indefinida usando el método de cambio de variable.

$$\int\sqrt{7x+5}dx=\left\{\sqrt{7x+5}=t\rightarrow 7x+5=t^2\rightarrow 7dx=2tdt\rightarrow dx=\frac{2tdt}{7}\right\}=$$

$$=\int t\frac{2tdt}{7}=\frac{2}{7}\int t^2dt=\frac{2}{7}\cdot\frac{t^3}{3}=\frac{2t^3}{21}=\left\{\sqrt{7x+5}=t\right\}=\boxed{\frac{2\sqrt{(7x+5)^3}}{21}+K}$$

Textos Marea Verde

Solución 4B:

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=x^2\cdot e^{1-x}\Rightarrow f'(x)=2x\cdot e^{1-x}+x^2\cdot(-1)e^{1-x}=\left(2x-x^2\right)e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)e^{1-x}=0\Rightarrow\left\{e^{1-x}\neq 0\right\}\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{x=2}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\left(2(-1)-(-1)^2\right)e^{1-(-1)}=-3e^2<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\left(2-1^2\right)e^{1-1}=1>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\left(2\cdot 3-3^2\right)e^{1-3}=\frac{-3}{e^2}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.

b) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

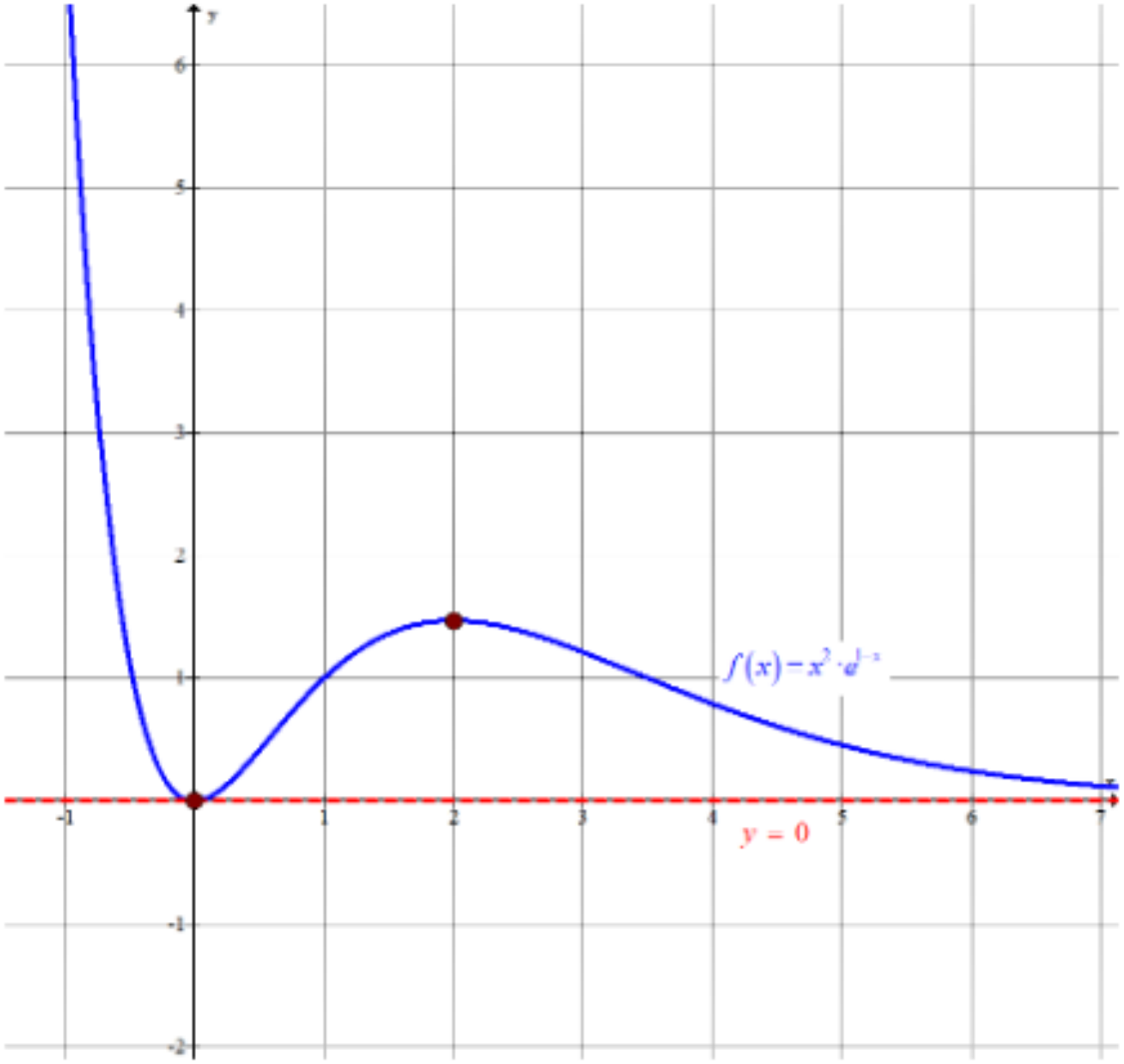
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x-1}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot e^{1-x}=(-\infty)^2\cdot e^{+\infty}=+\infty$$

La función tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$.
La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $-\infty$.
La función tiene a la recta $y=0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

BY NC SA
Textos Marea Verde


y
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
x
$f(x)=x^2\cdot e^{1-x}$
$y=0$

Problema 5:

Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. La playa de Famara (Lanzarote) es muy famosa por la calidad de sus olas para la realización de Surf. La academia de surf "FaMa-t-Surf" ofrece cursos para quienes quieren iniciarse en este deporte y garantiza que, tras sus sesiones de formación, un surfista principiante surfeará la ola con un 70% de posibilidades.

1.25 a) Se elige al azar un surfista que ha seguido las clases de esta academia. Si intenta surfear 5 olas, ¿cuál es la probabilidad de que logre surfear alguna de ellas?

0.75 b) Para contratar un nuevo monitor se evalúa a un surfista experimentado que tiene un 90% de probabilidad de surfear una ola. Se contrata si logra surfear al menos 14 de 15 olas, ¿cuál es la probabilidad de que consiga el puesto?

5B. El servicio de instrumentación del Roque de los Muchachos (La Palma) recibe un lote de 120 sensores de luz. De estos, 20 sensores de luz son de ultra-alta sensibilidad destinados al telescopio LST-1, y el resto son de sensibilidad estándar y se reparten por igual entre los telescopios MAGIC I y MAGIC II.

Tras el largo transporte por carretera hasta la cumbre, la probabilidad de que un sensor de los MAGIC sufra un micro-desajuste y se deba recalibrar en el laboratorio, es del 1.6%. Mientras que, sensores del LST-1 están en embalajes más reforzados y el micro-desajuste sucede el 0.9% de las veces.

Antes de instalarlos, el jefe de operaciones elige al azar un sensor del lote para comprobar su estado.

1 a) Calcular la probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado.

1 b) Elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, justificar razonadamente si la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1.

Solución 5A:

a) Sea X = el número de olas que surfeará un surfista de un grupo de 5 olas, Es una variable binomial siendo el número de repeticiones n = 5 y p = probabilidad de surfear una ola = 0.70.
$X = B(5, 0.7)$.
Calculamos la probabilidad de que el surfista logre surfear alguna de las 5 olas $P(X \geq 1)$ usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 1 - 0.3^5 = \boxed{0.99757}$$

La probabilidad de que logre surfear alguna de las 5 olas es de 0.99757.

b) Sea X = el número de olas que surfeará un surfista de un grupo de 15, Es una variable binomial siendo el número de repeticiones n = 15 y p = probabilidad de surfear una ola = 0.90.
$X = B(15, 0.9)$.
Para conseguir el puesto de monitor debe surfear al menos 14 de las 15 olas. Calculamos la probabilidad de conseguirlo: $P(X \geq 14)$.

$$P(X \geq 14) = P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{15}{14} 0.9^{14} \cdot 0.1^1 + \binom{15}{15} 0.9^{15} \cdot 0.1^0 =$$

$$= 15 \cdot 0.9^{14} \cdot 0.1 + 0.9^{15} \simeq \boxed{0.549}$$

La probabilidad de que consiga el puesto es de 0.549.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 5A:

Llamamos L al suceso "elegir un sensor de los LST-1", M a "elegir un sensor para los MAGIC" y D a "el sensor ha sufrido un micro-desajuste y debe ser recalibrado".
Tenemos las probabilidades siguientes:

$$P(L)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}=0.1667;\ P(M)=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}=0.8333;P(D/M)=0.016;\ P(D/L)=0.009$$

a) Nos piden calcular $P(D)$, Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(L)P(D/L)+P(M)P(D/M)=\frac{1}{6}\cdot 0.009+\frac{5}{6}\cdot 0.016=\frac{89}{6000}=\boxed{0.0148}$$

La probabilidad de que el sensor de luz elegido deba ser recalibrado tiene un valor de 0.0148.

b) Calculamos $P\left(M/\overline{D}\right)$ y $P\left(L/\overline{D}\right)$.

$$P\left(M/\overline{D}\right)=\frac{P\left(M\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P(M)P\left(\overline{D}/M\right)}{1-P(D)}=\frac{\frac{5}{6}\cdot(1-0.016)}{1-\frac{89}{6000}}=\frac{4920}{5911}$$

$$P\left(L/\overline{D}\right)=\frac{P\left(L\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P(L)P\left(\overline{D}/L\right)}{1-P(D)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot(1-0.009)}{1-\frac{89}{6000}}=\frac{991}{5911}$$

Es cierto que elegido un sensor de luz que no requiere recalibración, la probabilidad de que pertenezca al telescopio MAGIC-II $\left(\frac{4920}{5911}\right)$ es superior al doble de la probabilidad de que proceda del telescopio LST1 $\left(2\cdot\frac{991}{5911}=\frac{1982}{5911}\right)$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Checa y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

UC Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INDICACIONES: – Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
– En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
– Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
– Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
– No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Apartado 1A:

APARTADO 1 [2,5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera la matriz presentada a continuación,

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a.

b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a.

c) [1 punto] Para $a=-1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

Apartado 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}x+y+z &= 0\\ y+az &= 1\\ ay+z &= 2-a\end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a.

b) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Apartado 2A:

APARTADO 2 [2,5 puntos]. Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la función presentada a continuación,

$$f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x+a^2}$$

donde $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y=x-6$.

b) [1 punto] Considera $a=-2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) [0,5 puntos] Considera $a=-2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$.

CC BY NC SA

Apartado 2B:

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.

b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = ln\,4$ tome el valor $ln\,2$.

Apartado 3:

APARTADO 3 [2,5 puntos]. Bloque C. Resuelve esta cuestión.

3) Considera los puntos $A = (0, 0, 4)$, $B = (-3, 0, 0)$ y $C = (0, -2, 0)$.

a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A, B y C.

b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1, 1, 1)$ y la recta que contiene a A y B.

c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A, B, C y $D = (0, 0, 0)$.

Apartado 4A:

APARTADO 4 [2,5 puntos]. Bloque E. Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B).

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al alzar una cobaya blanca es de 0,2:

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.

c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

Apartado 4B:

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.

c) [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Apartado 1A:

APARTADO 1 [2,5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera la matriz presentada a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a.

b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a.

c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

1Aa) Como $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se tiene que $\text{rg}(A) \geq 2$.

Además, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$. Por lo tanto

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 0 \\ 3 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

1Ab) Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

Observamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ y concluimos que $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$.

*Si se quisiera probar por inducción, tenemos que:

- Para $n = 1$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^1 \end{pmatrix}$

BY NC SA

- Si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$, entonces

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

1Ac) Para $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. Por abreviar, llamemos $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha, tenemos

$$A^{-1}AXA^{-1}A = X = A^{-1}BA$$

Calculamos A^{-1} por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -1 \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculamos

$$X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

Apartado 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y+az &= 1 \\ ay+z &= 2-a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a.

b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución:

Apartado 1B.

1Ba)

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2-a \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ son mayores o iguales que 2.

Además $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = -(a+1)(a-1).$

Luego

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in \{-1,1\} \\ 3 & \text{si } a \notin \{-1,1\} \end{cases}$$

Si $\text{rg}(A) = 3$, entonces necesariamente $\text{rg}(A^*) = 3$. Estudiamos el rango de A^* para los valores $a = -1$ y $a = 1$:

- Si $a = -1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

BY NC SA

y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, por lo que $\operatorname{rg}(A^*) = 3$.

- Si $a = 1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Claramente las filas son linealmente dependientes (ya que la segunda y la tercera son iguales), luego $\operatorname{rg}(A^*) = 2$.

En conclusión, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius:

- Si $a = -1$, $\operatorname{rg}(A) = 2 < \operatorname{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 1$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $a \notin \{-1, 1\}$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

1Bb)

Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_2 \to 3F_2 + 2F_1]{F_1 \to 3F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3 \to -F_3/3]{F_1 \to F_1/3 \\ F_2 \to 3F_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x &= -1/3 \\ y &= -1/3 \\ z &= 2/3 \end{cases}$$

BY NC SA

1Bc)

Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La tercera fila es redundante ($F_3 = F_2$), llamamos $\lambda = z$ y obtenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right)$$

De aquí $y = 1 - \lambda$, y $x = -\lambda - y = -\lambda - 1 + \lambda = -1$.

$$\text{Solución: } \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 1-\lambda\,, \\ z &= \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

BY NC SA

Apartado 2A:

APARTADO 2 [2,5 puntos]. Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.

b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

Solución:

Apartado 2A.

2Aa)

Para calcular los valores m, n de la asíntota oblicua $y = mx + n$, tenemos:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2 x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - \frac{x^2 + a^2 x}{x + a^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a - a^2)x + 1}{x + a^2} = a - a^2$$

Buscamos $n = -6$, luego

$$a - a^2 = -6 \to a^2 - a - 6 = 0 \to a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

La función f tiene asíntota oblícua $y = x - 6$ para $a \in \{-2, 3\}$.

2Ab) Para $a = -2$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$$

Primero vemos que $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Derivamos

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 4) - (x^2 - 2x + 1)(1)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2}$$

BY NC SA

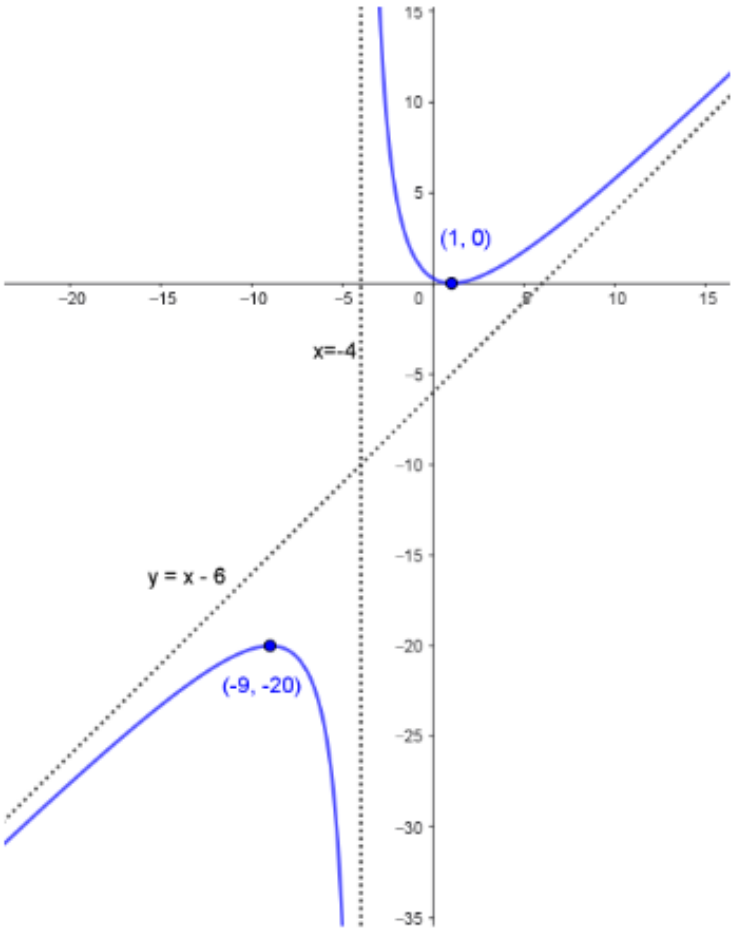
El denominador es un cuadrado, por lo que $(x+4)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Hallamos las raíces del numerador:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} 1 \\ -9 \end{cases}$$

Esto es, $x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9)$. Reunimos toda la información en una tabla

	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+9)$		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$	
$(x+4)^2$		$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

En conclusión, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -9) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-9, -4) \cup (-4, 1)$.



BY NC SA

2Ac)
La recta tangente en $x = -1$ viene dada por la ecuación punto-pendiente por

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

Sustituyendo,

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1}{-1+4} = \frac{4}{3}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 8\cdot(-1) - 9}{(-1+4)^2} = -\frac{16}{9}$$

Por lo que la recta tangente viene dada por

$$y - \frac{4}{3} = -\frac{16}{9}(x+1)$$

BY NC SA

Apartado 2B:

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.

b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = ln\,4$ tome el valor $ln\,2$.

Solución:

Apartado 2B.

2Ba)

Asíntotas verticales.
Calculamos $\text{dom}(f)$.

$$e^{2x} - 4 = 0 \leftrightarrow e^{2x} = 4 \leftrightarrow 2x = \ln 4 \leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln\left(4^{1/2}\right) = \ln 2$$

Por lo que

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

Estudiamos los límites laterales

$$\lim_{x\to \ln 2^-} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{2^- - 1}{\left(e^{\ln 2^-}\right)^2 - 4}\right] = \left[\frac{2^- - 1}{(2^-)^2 - 4}\right] = \left[\frac{2^- - 1}{4^- - 4}\right] = \left[\frac{1^-}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to \ln 2^+} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{2^+ - 1}{\left(e^{\ln 2^+}\right)^2 - 4}\right] = \left[\frac{2^+ - 1}{(2^+)^2 - 4}\right] = \left[\frac{2^+ - 1}{4^+ - 4}\right] = \left[\frac{1^+}{0^+}\right] = +\infty$$

Por lo tanto f presenta una asíntota vertical dada por $x = \ln 2$.

Asíntotas horizontales. Calculamos los límites en infinito:

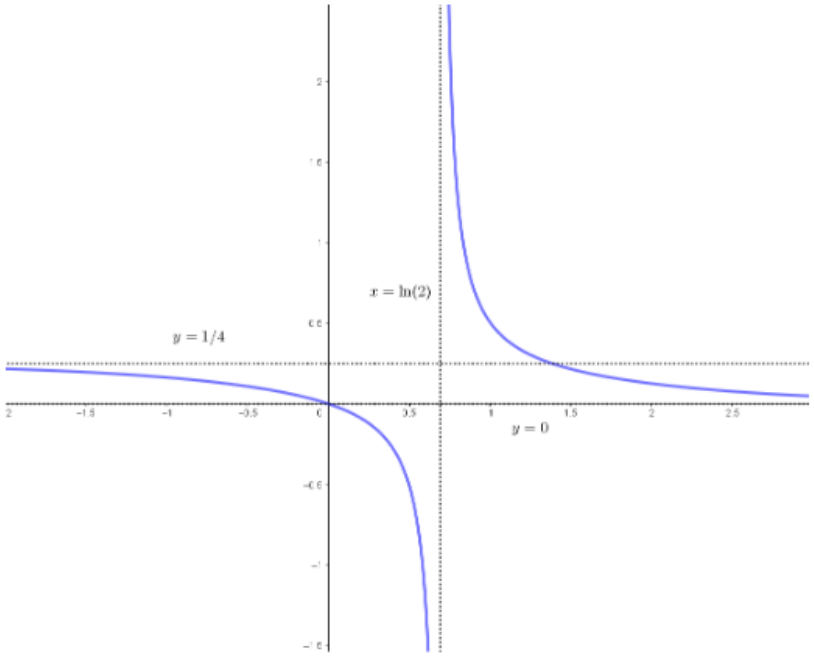
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{1 - 4e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto f presenta una asíntota horizontal en $+\infty$ dada por $x = 0$ y otra en $-\infty$ dada por $x = \frac{1}{4}$

Asíntotas oblícuas.
La función f no presenta asíntotas oblícuas porque presenta asíntotas horizontales.

BY NC SA



2Bb)

Calculamos la primitiva

$$F(x) = \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} \mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio de variable $u = e^x \leftrightarrow x = \ln u$. Derivando, obtenemos $\mathrm{d}\,x = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u$. Sustituyendo, obtenemos

$$\int \frac{u-1}{u(u^2-4)} \mathrm{d}u = \int \frac{u-1}{u(u+2)(u-2)} \mathrm{d}u$$

Para resolver la integral racional, planteamos

$$\frac{u-1}{u(u+2)(u-2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} + \frac{C}{u-2} = \frac{A(u+2)(u-2) + Bu(u-2) + Cu(u+2)}{u(u+2)(u-2)}$$

Tomamos los valores $u \in \{-2, 0, 2\}$ para obtener:

$$-2 - 1 = B \cdot (-2) \cdot (-4) \to B = -\frac{3}{8}$$

$$0 - 1 = A \cdot (2) \cdot (-2) \to A = \frac{1}{4}$$

$$2 - 1 = C \cdot (2) \cdot (4) \to C = \frac{1}{8}$$

Integramos

$$\int \frac{u-1}{u(u+2)(u-2)} \mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{u} + -\frac{3}{8}\frac{1}{u+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{u-2} \right) \mathrm{d}u =$$

BY NC SA

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{3}{8}\int \frac{\mathrm{d}u}{u+2} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{3}{8}\ln|u+2| + \frac{1}{8}\ln|u-2| + C$$

Deshacemos el cambio $u = e^x$

$$F(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\ln\left(e^x+2\right) + \frac{1}{8}\ln|e^x-2| + C$$

Se nos pide que en $x = \ln 4$ (esto es, $e^x = 4$) la primitiva tome el valor $\ln 2$. Sustituimos

$$\frac{1}{4}\ln 4 - \frac{3}{8}\ln(4+2) + \frac{1}{8}\ln|4-2| + C = \ln 2$$

Despejamos

$$C = \ln 2 - \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{3}{8}\ln 6 + \frac{1}{8}\ln 2$$

Por lo tanto la primitiva que se nos pide es

$$F(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\ln\left(e^x+2\right) + \frac{1}{8}\ln|e^x-2| - \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{3}{8}\ln 6 + \frac{9}{8}\ln 2$$

BY NC SA

Apartado 3:

APARTADO 3 [2,5 puntos]. Bloque C. Resuelve esta cuestión.

3) Considera los puntos $A=(0,0,4)$, $B=(-3,0,0)$ y $C=(0,-2,0)$.

a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A, B y C.

b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P=(1,1,1)$ y la recta que contiene a A y B.

c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A, B, C y $D=(0,0,0)$.

Solución:

Apartado 3.

3a)

Calculamos la ecuación implícita del plano que pasa por A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}=(-3,0,-4)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,-2,-4)$. Una forma de calcularlo es mediante el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} (z-4) =$$

$$= 8x - 12y + 6z - 24$$

Luego la ecuación del plano viene dada por $\pi: \{8x-12y+6z-24=0$.

3b)

Podemos calcular esta distancia como

$$\text{dist}(P, \text{Recta}(A,B)) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{|-4\vec{i}-13\vec{j}+3\vec{k}|}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2+13^2+3^2}}{5} = \frac{\sqrt{194}}{5} \approx 2{,}79$$

3c)

Tenemos que $\overrightarrow{DA}=(0,0,4)$, $\overrightarrow{DB}=(-3,0,0)$ y $\overrightarrow{DC}=(0,-2,0)$. Podemos hallar el volumen del tetraedro mediante:

$$V_{\text{Tetra}} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{24}{6} = 4$$

BY NC SA

Apartado 4A:

APARTADO 4 [2,5 puntos]. Bloque E. Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B).

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al alzar una cobaya blanca es de 0,2:

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.

c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

Solución:

1. Apartado 4A.

Llamamos $C \equiv$ Pelo corto, $L \equiv$ Pelo largo, $B \equiv$ Pelo blanco, $M \equiv$ Pelo marrón.
Se nos dice que $\mathrm{P}(C) = 0{,}6 = 60\,\%$ y que $\mathrm{P}(B \cap L) = 0{,}08 = 8\,\%$.
Sabemos que las cobayas tienen únicamente pelo corto o largo, esto es, $\mathrm{P}(L) + \mathrm{P}(C) = 1$ y $\mathrm{P}(L \cap C) = 0$. Del mismo modo, $\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(M) = 1$ y $\mathrm{P}(B \cap M) = 0$.

4Aa)

$\mathrm{P}(M \mid L) = \dfrac{\mathrm{P}(M \cap L)}{\mathrm{P}(L)}$. Sabemos que $\mathrm{P}(M \cap C) + \mathrm{P}(M \cap L) = \mathrm{P}(L)$, es decir,

$$\frac{\mathrm{P}(M \cap L)}{\mathrm{P}(L)} = \frac{\mathrm{P}(L) - \mathrm{P}(B \cap L)}{\mathrm{P}(L)} = \frac{(1 - \mathrm{P}(C)) - \mathrm{P}(B \cap L)}{1 - \mathrm{P}(C)} = \frac{0{,}4 - 0{,}08}{0{,}4} = 0{,}8 = 80\,\%$$

Apuntamos para más adelante que $\mathrm{P}(M \cap L) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32 = 32\,\%$.

4Ab)

Se nos dice que $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$, luego $\mathrm{P}(M) = 0{,}8$.

$$\mathrm{P}(L \mid M) = \frac{\mathrm{P}(M \cap L)}{\mathrm{P}(M)} = \frac{0{,}32}{0{,}8} = 0{,}4 = 40\,\%$$

4Ac)

$$\mathrm{P}(M \mid C) = \frac{\mathrm{P}(M \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(M) - \mathrm{P}(M \cap L)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0{,}8 - 0{,}32}{0{,}6} = 0{,}8 = 80\,\%$$

BY NC SA

Apartado 4B:

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.

c) [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

Solución:

Apartado 4B.

Llamamos

$$X = \text{Diámetro de una mandarina} \sim \mathrm{N}(\mu = 60, \sigma = 16)$$

4Ba)

$$\mathrm{P}(X < 40 \text{ ó } X > 90) = \mathrm{P}(X < 40) + \mathrm{P}(X > 60) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{X - 60}{16} < \frac{40 - 60}{16}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{X - 60}{16} > \frac{90 - 60}{16}\right)$$

Sabemos que $Z = \frac{X - 60}{16} \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Calculamos $(40 - 60)/16 = -1{,}25$ y $(90 - 60)/16 = 1{,}875$.

$$\mathrm{P}\left(Z < -1{,}25\right) + \mathrm{P}\left(Z > 1{,}875\right) = 1 - \mathrm{P}(Z < 1{,}25) + 1 - P(Z < 1{,}875)$$

Consultando estos últimos valores en la tabla de la distribución N(0,1) obtenemos

$$\mathrm{P}(X < 40 \text{ ó } X > 90) = 1 - 0{,}89435 + 1 - \frac{0{,}96926 + 0{,}96995}{2} \approx 0{,}136045$$

(Tomamos la media de los valores para 1,87 y para 1,88; ya que la tabla no tiene tantos decimales de precisión.)

4Bb)

Suponemos que la elección de las mandarinas es independiente. La probabilidad de que una mandarina tenga menos de 50 mm de diámetro es

$$\mathrm{P}(X < 50) = P\left(\frac{X - 60}{16} < \frac{50 - 60}{16}\right) = \mathrm{P}(Z < -0{,}625) = 1 - \mathrm{P}(Z < 0{,}625)$$

Consultando la tabla,

$$\mathrm{P}(X < 50) = 1 - \frac{0{,}73237 + 0{,}73565}{2} \approx 0{,}26599 \approx 26{,}6\,\%$$

La probabilidad de que esto ocurra para dos elecciones independientes es

$$\mathrm{P}(X < 50) \cdot \mathrm{P}(X < 50) = 0{,}26599 \approx 0{,}07075 \approx 7{,}07\,\%$$

BY NC SA

4Bc)

$$\mathrm{P}(40 < X < 50) = P\left(\frac{40-60}{16} < \frac{X-60}{16} < \frac{50-60}{16}\right) =$$

$$\mathrm{P}(-1{,}25 < Z < -0{,}625) = \mathrm{P}(0{,}625 < Z < 1{,}25) = P(Z < 1{,}25) - P(Z < 0{,}625)$$

Consultando la tabla,

$$\mathrm{P}(40 < X < 50) = 0{,}89435 - \frac{0{,}73237 + 0{,}73565}{2} \approx 0{,}16034 \approx 16{,}03\,\%$$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UC Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Problema 1:

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.

b) [1.5 puntos] Considera $a=0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x+y+az=1 \\ ax+a^2y=a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a.

b) [0,5 puntos] Considera $a=0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Problema 2:

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a^2 & si\ \ x<1 \\ \dfrac{\ln x}{x}+4a & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

donde $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.

b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a.

c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

BY NC SA

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.

b) [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x=0$.

c) [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

Problema 3:

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta tarea.

3) Considera los puntos $A = (0{,}5,-1)$ y $B = (-3{,}11,-10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3}$$

a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B.

b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A, B y un punto genérico de r.

c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A.

Problema 4:

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.

c) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.

c) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices presentadas a continuación.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro a para los que A tiene inversa.

b) [1.5 puntos] Considera $a=0$, calcula la matriz X que cumple:

$$AXB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución 1A:

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4a+0+3-0-0+a^2=a^2+4a+3$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2+4a+3=0\Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{-4+2}{2}=\boxed{-1=a}\\ \frac{-4-2}{2}=\boxed{-3=a}\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $a\neq -1$ y $a\neq -3$.

b) Si $a=0$ la matriz A tiene inversa. La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallamos su matriz inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0+0+3-0-0-0=3$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

BY NC SA

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 3 & -12\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hallamos también la inversa de la matriz B.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^{T}\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$AXB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}B^{-1}$$

Terminamos de obtener la matriz X.

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 3 & -12\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}8+3+0 & 0+3+12\\ -2+0+0 & 0+0-3\\ 2+0+0 & 0+0+0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11 & 15\\ -2 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}22+15 & 0+15\\ -4-3 & 0-3\\ 4+0 & 0+0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}37 & 15\\ -7 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37/6 & 5/2\\ -7/6 & -1/2\\ 2/3 & 0\end{pmatrix}$$

Para $a=0$ la matriz X solución de la igualdad $AXB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ es $X=\begin{pmatrix}37/6 & 5/2\\ -7/6 & -1/2\\ 2/3 & 0\end{pmatrix}$.

BY NC SA

Problema 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x+y+az=1 \\ ax+a^2y=a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a.

b) [0,5 puntos] Considera $a=0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución 1A:

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} a^3 & 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 0 & a \end{pmatrix}$.

El rango de A como máximo es 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera columna y averiguamos cuando se anula su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 0 \end{vmatrix}=-a^3$$

El determinante se anula para $a=0$. Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0$

En este caso el determinante es distinto de cero y el rango de A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante es nulo. La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 1 y el rango de A/B también es 1, tienen el mismo rango, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor de a.

b) Si $a=0$ el sistema queda $\begin{cases} y=1 \\ 0=0 \end{cases}$. Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases}; \alpha,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

b) Si $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} 8x+y+2z=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

BY NC SA

Problema 2A:

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a^2 & si\ \ x<1 \\ \dfrac{\ln x}{x}+4a & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

donde $a\in\mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,75 puntos] Calcula los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo su dominio.

b) [0,75 puntos] Calcula las asíntotas de $f(x)$, en función de a.

c) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución 2A:

a) La función debe ser continua en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{\ln 1}{1}+4a=4a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x}+4a=4a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+3x+a^2=1^2+3+a^2=a^2+4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow a^2+4=4a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow \boxed{a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4}}{2}=\frac{4}{2}=2}$$

Para que la función sea continua debe ser $a=2$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical $x=a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+3x+a^2=+\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Veamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+4a=\frac{+\infty}{+\infty}+4a=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}+4a=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+4a=\frac{1}{+\infty}+4a=4a$$

La recta $y=4a$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Veamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

BY NC SA

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+a^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{a^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+3+\frac{a^2}{x}=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.
Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

La única asíntota de la función es la recta $y=4a$ que es una asíntota horizontal.

c) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a^2 & si\ x<1\\ \dfrac{\ln x}{x}+4a & si\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+3 & si\ x<1\\ \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2} & si\ x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2x+3=0\to 2x=-3\to \boxed{x=\dfrac{-3}{2}}\\ \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\to 1-\ln x=0\to \ln x=1\to \boxed{x=e}\end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función antes, entre y después de $x=\frac{-3}{2}$, $x=1$ y $x=e$

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)$ tomamos $x=-10$ y la derivada vale
  $f'(-10)=2(-10)+3=-17<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-3}{2},1\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=2\cdot 0+3=3>0$.
  La función crece en $\left(\frac{-3}{2},1\right)$.
- En el intervalo $(1,e)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-\ln 2}{2^2}=0.08>0$.
  La función crece en $(1,e)$.
- En el intervalo $(e,+\infty)$ tomamos $x=e^2$ y la derivada vale
  $f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{-1}{e^4}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.

La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)\cup(e,+\infty)$ y crece en $\left(\frac{-3}{2},1\right)\cup(1,e)$.

Si $a=2$ la función es continua y podemos afirmar que la función crece en $\left(\frac{-3}{2},e\right)$, pero si $a\neq 2$ la función no es continua y no podemos asegurar si crece o no en $x=1$, depende del valor de a.

BY NC SA

Problema 2B:

2B) Considera la siguiente función real:

$$f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [0,5 puntos] Determina el dominio de definición de $f(x)$.

b) [1,25 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$, que se haga nula en $x=0$.

c) [0,75 puntos] Calcula el valor de x para el cual $f(x)$ alcanza el valor máximo en $(1, \infty)$.

Solución 2B:

a) El dominio de la función son todos los números reales mayores o iguales que 0 (para que exista $\sqrt{x}$) que no anulen el denominador.

$$1-\sqrt{x}=0\Rightarrow\sqrt{x}=1\Rightarrow\boxed{x=1^2=1}$$

El dominio de la función es $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

b) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{1-\sqrt{x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\rightarrow x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int\frac{t^2}{1-t}2tdt=2\int\frac{t^3}{1-t}\,dt=\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 & 1-t \\ \hline -t^3+t^2 & -t^2-t-1 \\ \hline t^2 & \\ -t^2+t & \\ \hline t & \\ -t+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\ldots=2\int-t^2-t-1+\frac{1}{1-t}\,dt=2\left(-\int t^2dt-\int tdt-\int dt-\int\frac{-1}{1-t}\,dt\right)=$$

$$=2\left(\frac{-t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t-\ln|1-t|\right)=\frac{-2\sqrt{x^3}}{3}-\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}-2\ln\left|1-\sqrt{x}\right|=$$

$$=\frac{-2\sqrt{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2+K$$

La primitiva tiene la expresión $F(x)=\dfrac{-2\sqrt{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2+K$.

Hallamos el valor de K para que $F(0)=0$.

BY NC SA

$$F(0)=0\Rightarrow 0=\frac{-2\sqrt{0^3}}{3}-0-2\sqrt{0}-\ln\left(1-\sqrt{0}\right)^2+K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=K\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{-2\sqrt{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\dfrac{-2\sqrt{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}+\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

c) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)-x\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=0\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sqrt{x}=0\Rightarrow 1=\frac{1}{2}\sqrt{x}\Rightarrow 2=\sqrt{x}\Rightarrow \boxed{x=4}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=4$.

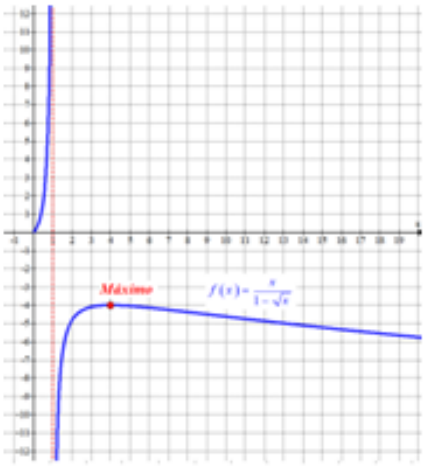
- En el intervalo $(1,4)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$f'(2)=\dfrac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}>0$. La función crece en $(1,4)$.

- En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos $x=16$ y la derivada vale

$f'(16)=\dfrac{1-\frac{1}{2}\sqrt{16}}{\left(1-\sqrt{16}\right)^2}=\dfrac{-1}{9}<0$. La función decrece en $(4,+\infty)$.

La función crece antes y decrece después de $x=4$. Como la función es continua en el intervalo $(1,+\infty)$ este máximo relativo también es absoluto en el intervalo $(1,+\infty)$.



BY NC SA

Problema 3:

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta tarea.

3) Considera los puntos $A = (0,5,–1)$ y $B = (–3,11,–10)$, y la recta

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

a) [0,5 puntos] Estudia la posición relativa de r y la recta que contiene a A y B.

b) [1 punto] Calcula el área del triángulo formado por los vértices A, B y un punto genérico de r.

c) [1 punto] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y A.

Solución:

a) Obtenemos la ecuación de la recta s que contiene los puntos A y B.

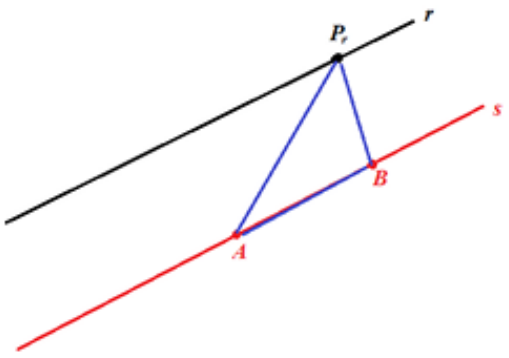
$$\left.\begin{array}{l} A=(0,5,-1)\in s \\ B=(-3,11,-10)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=(0,5,-1)\in s \\ \overrightarrow{AB}=(-3,11,-10)-(0,5,-1)=(-3,6,-9) \\ \overrightarrow{u_s}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}=(1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=5-2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Las rectas r y s tienen el mismo vector director $\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,-2,3)$. Las rectas son paralelas o coincidentes. Comprobamos si la recta r contiene el punto $A(0,5,-1)$ de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} ¿\,A(0,5,-1)\in r? \\ r:\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{0-3}{1}=\frac{5+2}{-2}=\frac{-1}{3}? \Rightarrow !!!\frac{-3}{1}\neq\frac{7}{-2}\neq\frac{-1}{3}!!!$$

No se cumple la igualdad, el punto A no está contenido en la recta r. Las rectas r y s son paralelas.

b) Las rectas r y s son paralelas y el área del triángulo formado por los vértices A, B y un punto genérico de r tendrá un valor independiente del punto de r elegido.
Consideramos el punto $P_r(3,-2,0)$ de la recta r.



Utilizamos la fórmula del área del triángulo ABP_r: $Área\ ABP_r = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP_r}\right|}{2}$.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,6,-9)\\ \overrightarrow{AP_r}=P_r(3,-2,0)-(0,5,-1)=(3,-7,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3 & 6 & -9\\ 3 & -7 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=6i-27j+21k-18k+3j-63i=-57i-24j+3k=(-57,-24,3)$$

$$Área\ ABP_r=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP_r}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-57)^2+(-24)^2+3^2}}{2}=\frac{3\sqrt{426}}{2}\simeq 30.96\ u^2$$

El área del triángulo formado por los vértices A, B y un punto genérico de r vale $\frac{3\sqrt{426}}{2}=30.96$ unidades cuadradas.

c) El plano π que contiene a la recta r y el punto A tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r=(1,-2,3)$ y el vector que une los puntos $A(0,5,-1)$ y $P_r(3,-2,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}A(0,5,-1)\in\pi\\ \vec{v}=\vec{v}_r=(1,-2,3)\\ \vec{u}=\overrightarrow{AP_r}=(3,-7,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix} x & y-5 & z+1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -7 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+9y-45-7z-7+6z+6-y+5+21x=0\Rightarrow\boxed{\pi:19x+8y-z-41=0}$$

El plano π que contiene a r y A tiene ecuación general $\pi:19x+8y-z-41=0$.

BY NC SA

Problema 4A:

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.

c) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

Solución:

a) Llamamos A, B y C a "elegir la urna A, B o C. Llamamos D a "sacar bola blanca".
Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\boxed{\frac{113}{360}\simeq 0.3139}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca es de $\frac{113}{360}\simeq 0.3139$.

b) Debemos calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{113}{360}}=\boxed{\frac{20}{113}\simeq 0.177}$$

La probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B tiene un valor de $\frac{20}{113}\simeq 0.177$.

c) Consideramos que el experimento planteado es "elegir una de las dos urnas A o B, extraer una primera bola de la urna elegida y después volver a elegir de nuevo una urna y sacar una segunda bola de la caja elegida".
Se pueden obtener dos bolas blancas extrayendo las dos bolas blancas de A (tiene 4 blancas) o bien una de A y otra de B. En la caja B solo hay una bola blanca y no podemos extraer las dos bolas blancas de esta caja.

$$P(\text{Dos bolas blancas de A o B})=$$

$$=P(\text{Dos bolas blancas de A})+P(\text{Una bola blanca de A y otra bola blanca de B})+$$

$$+P(\text{Una bola blanca de B y otra bola blanca de A})=$$

$$=P(A_1\cap D_1)P((A_2\cap D_2)/(A_1\cap D_1))+P(A_1\cap D_1)P(B_2\cap D_2)+P(B_1\cap D_1)P(A_2\cap D_2)=$$

$$=P(A_1)P(D_1/A_1)\cdot P(A_2)P(D_2/(D_1\cap A_1\cap A_2))+P(A_1)P(D_1/A_1)\cdot P(B_2)P(D_1/B_2)+$$

BY NC SA

$$+P(B_1)P(D_1/B_1)\cdot P(A_2)P(D_1/A_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}=\boxed{\frac{1}{15}=0.0667}$$

Otra forma de razonarlo. Como comprobación de lo calculado.



La probabilidad de sacar dos bolas blancas de las cajas A o B vale:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{12}{360}+\frac{4}{240}+\frac{4}{240}=\frac{1}{15}$$

BY NC SA

Problema 4B:

4B) La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.

c) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

Solución:

Sea X la variable aleatoria que obtiene la venta de pizzas a la semana de un establecimiento. $X = N(300, 62)$.

a) Nos piden calcular $P(X > 370)$. Como 370 es mayor que 300 + 62 la probabilidad del suceso debe ser pequeña.

$$P(X>370) = 1 - P(X \le 370) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-300}{62} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{370-300}{62} \right) = 1 - P(Z \le 1.13) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.8708 = \boxed{0.1292}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708

La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas es de 0.1292.

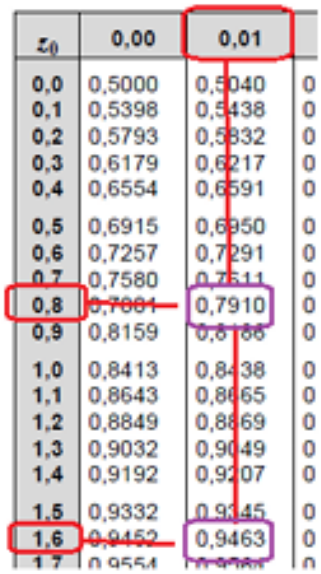
b) Nos piden calcular $P(200 \le X \le 350)$.

$$P(200 \le X \le 350) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-300}{62} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{200-300}{62} \le Z \le \frac{350-300}{62} \right) =$$

$$= P(-1.61 \le Z \le 0.81) = P(Z \le 0.81) - P(Z \le -1.61) = P(Z \le 0.81) - P(Z \ge 1.61) =$$

$$P(Z \le 0.81) - \left[1 - P(Z \le 1.61) \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix} \right\} = 0.791 - \left[1 - 0.9463 \right] = \boxed{0.7373}$$

BY NC SA



z_0	0,00	0,01	
0,0	0,5000	0,5040	0
0,1	0,5398	0,5438	0
0,2	0,5793	0,5832	0
0,3	0,6179	0,6217	0
0,4	0,6554	0,6591	0
0,5	0,6915	0,6950	0
0,6	0,7257	0,7291	0
0,7	0,7580	0,7611	0
0,8	0,7881	0,7910	0
0,9	0,8159	0,8186	0
1,0	0,8413	0,8438	0
1,1	0,8643	0,8665	0
1,2	0,8849	0,8869	0
1,3	0,9032	0,9049	0
1,4	0,9192	0,9207	0
1,5	0,9332	0,9345	0
1,6	0,9452	0,9463	0
1,7	0,9554		

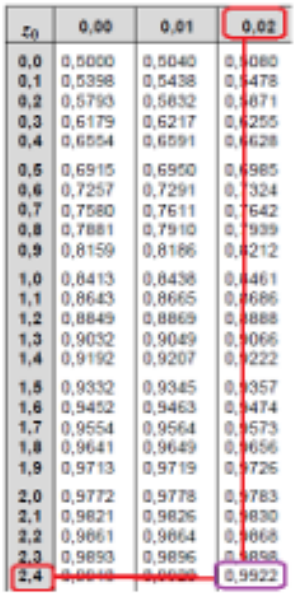
La probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas vale 0.7373.

c) Calculamos $P(X \geq 150)$.

$$P(X \geq 150) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 300}{62} \end{matrix} \right\} = P\left(Z \geq \frac{150 - 300}{62}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2.42) = P(Z \leq 2.42) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix} \right\} = \boxed{0.9922}$$



z_0	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9861	0,9864	0,9868
2,3	0,9893	0,9896	0,9898
2,4	0,9918	0,9920	0,9922

Como la elección de las semanas es independiente entre sí la probabilidad de que escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas se puede obtener como el producto de las probabilidades de que ocurra en cada una de ellas: $0.9922 \cdot 0.9922 = 0.9845$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

PAU 2026

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas. Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.

b) [1 punto] Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) [1,25 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo

b) [0,75 puntos] A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

Pregunta 3.

a) [1 punto] Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que A·B=I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

b) [1 punto] Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 9\end{pmatrix}\end{cases}$$

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4.

Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, −1, a), v = (2, a, 1) y $\vec{w}$ = (−1, 1, −1), se pide:

a) [0,75 puntos] Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas P(1,2,6) y se desea instalar un segundo sensor en el punto P', simétrico del anterior respecto del plano π.

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P'.

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre los dos sensores.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

a) [1 punto] Calcula justificadamente el siguiente límite: lim

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$$

b) [1 punto] Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot senx\, dx$

5.2. [2 puntos] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & si\ x<1\\ ax+b & si\ x\geq 1\end{cases},$$

donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x=1

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas. Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.

b) [1 punto] Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Respuesta:

Sean los sucesos:

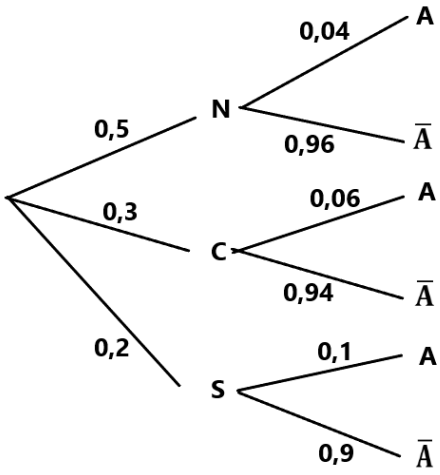
N…… alerta generada por el sistema de Navegación.

C…… alerta generada por el sistema de Comunicaciones.

S…… alerta generada por el sistema de Soporte Vital.

A…… la alerta es crítica y $\bar{A}$ la alerta no es crítica.

Escribimos el árbol de probabilidades:



a) Por el Teorema de la Probabilidad Total

P(A) = P(N)·P(A/N) + P(C)·P(A/C) + P(S)·P(A/S) =

0,5 · 0,04 + 0,3 · 0,06 + 0,2 · 0,1 = 0,058

La probabilidad de que la alerta sea crítica es de 0,058.

b) Por el Teorema de Bayes

$$P(\bar{A}/S) = \frac{P(S\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(S)\cdot P(\bar{A}/S)}{1-P(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{1-0{,}058} = \frac{0{,}18}{0{,}942} = 0{,}1911$$

La probabilidad de que proceda del soporte vital sabiendo que la alerta no es crítica es 0,1911

BY NC SA

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) [1,25 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo

b) [0,75 puntos] A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

Respuesta:

a) $B'(x) = 80 \cdot e^{-0,5x} - 0,5 \cdot 80x \cdot e^{-0,5x} = 80e^{-0,5x} - 40xe^{-0,5x} = e^{-0,5x}(80 - 40x)$

$e^{-0,5x}(80 - 40x) = 0 \rightarrow 80 - 40x = 0 \rightarrow x = 2.$

Como x es el número de días, tenemos los intervalos:

$(0, 2) \rightarrow B'(1) = e^{-0,5\cdot 1}(80 - 40 \cdot 1) > 0$ B(x) es creciente

$(2, \infty) \rightarrow B'(10) = e^{-0,5\cdot 10}(80 - 40 \cdot 10) < 0$ B(x) es decreciente

Por tanto en x = 2 hay un máximo, (a los 2 días el beneficio diario es máximo)

B(x) es creciente en (0, 2) y decreciente en (2, ∞).

El beneficio diario es máximo a los 2 días.

b) Calculamos $\lim_{x\to\infty} 80x \cdot e^{-0,5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{80x}{e^{0,5x}} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital y calculamos el límite de las derivadas de numerador y denominador

$\lim_{x\to\infty} \frac{80}{0,5\cdot e^{0,5x}} = \frac{80}{\infty} = 0$

A largo plazo el beneficio tiende a estabilizarse en el valor 0, lo cual quiere decir que a largo plazo no va a haber beneficios diarios.

BY NC SA

Pregunta 3.

a) [1 punto] Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que A·B=I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & b\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) [1 punto] Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones {

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 9\end{pmatrix}\end{cases}$$

Respuesta:

a) $A\cdot B=I\rightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow$

$$\begin{pmatrix}2-a & a-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2-b & 0 & b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2-a=1\rightarrow a=1\\ a-1=0\rightarrow a=1\\ 2-b=0\rightarrow b=2\\ b-1=1\rightarrow b=2\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}para\\ a=1\\ b=2\end{matrix}\ y\ \rightarrow A\cdot B=I$$

Para a = 1 y b = 2 se cumple A·B = I.

b) Llamamos $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 9\end{pmatrix}$ tenemos el sistema $\begin{cases}X+Y=A\\ 2X+3Y=B\end{cases}$ multiplicamos por (-2) la primera ecuación y las sumamos $\begin{cases}-2X-2Y=-2A\\ 2X+3Y=B\end{cases}\rightarrow Y=B-2A$ podemos calcular

$Y=B-2A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 9\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

Como $X+Y=A\rightarrow X=A-Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

BY NC SA

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4.

4.1. [2 puntos] Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, −1, a), $\vec{v}$ = (2, a, 1) y $\vec{w}$= (−1, 1, −1), se pide:

a) [0,75 puntos] Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3.

Respuesta:

a) Si el producto mixto fuera distinto de 0, los tres vectores determinarían un paralelepípedo y si es 0 serían coplanarios, por lo que lo calculamos e igualamos a 0 y calculamos que valor de a lo hace 0 $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 2a + 1 + a^2 - 1 - 2 = a^2 + a - 2$

$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = 1 \; y \; a = -2$

Para a = 1 y a = -2 los vectores son coplanarios.

b) Como el volumen viene dado por el producto mixto, si queremos que valga 10, igualamos el resultado a 10 y calculamos a

$|a^2 + a - 2| = 10 \rightarrow a^2 + a - 2 = 10 \; o \; bien \quad a^2 + a - 2 = -10$ nos quedan las ecuaciones

$a^2 + a - 12 = 0 \rightarrow a = 3 \; y \; a = -4$

$a^2 + a + 8 = 0$ no tiene solución real.

Por tanto

Para a = 3 y a = -4 el volumen del paralelepípedo es de 10 u^3.

BY NC SA

Pregunta 4. 2.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas P(1,2,6) y se desea instalar un segundo sensor en el punto P', simétrico del anterior respecto del plano π.

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P'.

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre los dos sensores.

Respuesta:

a) Nos piden calcular el punto simétrico de P respecto del plano π

Calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular a π , tomamos el vector perpendicular a π

$\vec{u}$ = (1, 1, 1), P(1,2,6) de donde $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ Obtenemos las ecuaciones implícitas y resolvemos el sistema formado por éstas y la ecuación del plano $\begin{cases} x-1=y-2 \\ x-1=z-6 \\ x+y+z=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-z=-5 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

Calculamos -E1 + E2 y -E1 + E3 $\begin{cases} x-y=-1 \\ y-z=-4 \\ 2y+z=7 \end{cases}$ -2E2 + E3 $\begin{cases} x-y=-1 \\ y-z=-4 \\ 3z=15 \end{cases}$ **z = 5, y = 1, x = 0**

El punto A(0, 1, 5) es la intersección de la recta y el plano, y es el punto medio del punto p y el P' luego P'(x, y, z) será $\frac{x+1}{2} = 0$, $\frac{y+2}{2} = 1$, $\frac{z+6}{2} = 5$ de donde, x = -1, y = 0, z = 4.

P'(-1, 0, 4).

b) d(P,P') = $\left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

La distancia entre los sensores es de $2\sqrt{3}$ u .

BY NC SA

Pregunta 5.

5.1. [2 puntos]

a) [1 punto] Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x}$$

b) [1 punto] Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot senx\, dx$

Respuesta:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x} = 1^{\infty}$ indeterminación calculamos $e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)}$ calculamos el exponente

$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2x+1-2x+3}{2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{4}{2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-3} = 2$, por tanto

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x} = e^2}$$

b) Se trata de una integral con una función exponencial y otra trigonométrica, la resolvemos por partes $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{u\cdot v} - \int \boldsymbol{vdu}$, llamamos $\begin{cases}\boldsymbol{u = senx}\\ \boldsymbol{dv = e^x dx}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{du = cosx\, dx}\\ \boldsymbol{v = \int e^x dx = e^x}\end{cases}$

$\int e^x \cdot senx\, dx =$ $e^x \cdot \text{sen}x\, dx$ - $\int e^x \cdot \text{cos}x\, dx$ repetimos

$\begin{cases}\boldsymbol{u = cosx}\\ \boldsymbol{dv = e^x dx}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{du = -senx\, dx}\\ \boldsymbol{v = \int e^x dx = e^x}\end{cases}$ de donde

$\int e^x \cdot senx\, dx =$ $e^x \cdot \text{sen}x - (e^x \cdot \text{cos}x - \int e^x \cdot(-\text{sen}x)\, dx)$

$\int e^x \cdot senx\, dx =$ $e^x \cdot \text{sen}x - (e^x \cdot \text{cos}x - \int e^x \cdot(-\text{sen}x)\, dx)$

$\int e^x \cdot senx\, dx =$ $e^x \cdot \text{sen}x - e^x \cdot \text{cos}x - \int e^x \cdot \text{sen}x\, dx$ es decir

$I = e^x \cdot \text{sen}x\, dx - e^x \cdot \text{cos}x - I$, $2I = e^x \cdot \text{sen}x - e^x \cdot \text{cos}x$ por tanto

$$\boldsymbol{\int e^x senx dx = \frac{1}{2}(e^x senx - e^x cosx) = \frac{e^x}{2}(senx - cosx) + k\,.}$$

BY NC SA

Pregunta 5.

Pregunta 5. 2.

5.2. [2 puntos] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & si\ \ x<1\\ ax+b & si\ \ x\geq 1\end{cases},$$

donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x = 1

Respuesta:

La función está definida y existe en todo $\mathscr{R}$, pues el denominador, x – 1 se hace 0 para x = 1 y aquí la función está definida para x < 1.

Continuidad: f(1) = a · 1 + b = a + b

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0},ind,\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b\end{cases}$ para que f sea continua los límites laterales han de ser iguales a + b = 2.

Derivabilidad: Derivamos las dos partes de $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=x+1 & si\ x<1\\ ax+b & si\ x\geq 1\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x<1\\ a & si\ x>1\end{cases}$ $f'_{-}(1)=1$ y $f'_{+}(1)=a$ las derivadas laterales han de ser iguales, a = 1

Y de a + b = 2 tenemos 1 + b = 2, b = 1, por tanto,

f es continua y derivable si a = 1 y b = 1.

También podemos hacer: $f'(x)=\begin{cases}\frac{2x(x-1)-(x^2-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=1 & si\ x<1\\ a & si\ x>1\end{cases}$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

IINSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

a) [1 punto] La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.

b) [1 punto] La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

a) [1 punto] Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.

b) [1 punto] La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo [a, b] viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t)dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

Pregunta 3.

a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a.

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) [0,5 puntos]¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

BY NC SA

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Se consideran los puntos A(1, 1, 0), B(2,0, 1), C(0,2,1) y D(a, 1, 2), con a un número real.

a) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) [1,25 puntos] Determina los valores reales del parámetro a, para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

4.2. Sean los puntos del espacio A(1, 2, -1), B(3, 6, 1) y C(m, m, m-2), donde m es un número real.

a) [0,75 puntos] Determina el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados.

b) [1,25 punto] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto P(2, 0, 1) a la recta que forman A, B y C.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) [1 punto] Halla, razonadamente, los coeficientes a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas (1,4) y que la recta tangente en el punto de abscisa x=3 es paralela a la recta de ecuación $y=2x-1$

b) [1 punto] Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a f(x) en x=0.

5.2. Resuelve los siguientes apartados:

a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$f(x)=\frac{3}{x}$ y $g(x)=-x+4$

b) [0,75 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-senx-1}{x^2}$

BY NC SA

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

a) [1 punto] La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.

b) [1 punto] La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Respuesta:

a.1) X sigue una distribución N(34, 6)

Nos piden calcular $P(28 < X < 46)$ =(tipificando)= $P\left(\frac{28-34}{6} < \frac{X-34}{6} < \frac{46-34}{6}\right) = P(-1 < Z < 2) =$

$= P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z > 1) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1)] = 0{,}9772 - [1 - 0{,}8413] = 0{,}8185$

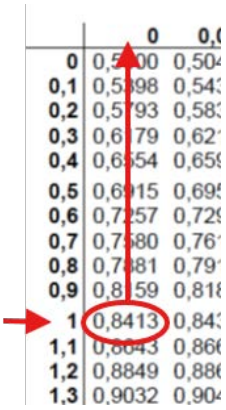
La probabilidad de que una persona cogida al azar tenga entre 28 y 46 años, es de 0,8185.

a.2) Buscamos $K \in \mathbb{R}$, de manera que $P(X > K) = 0{,}1587$.

$P(X > K)$ = (tipificando) = $P\left(\frac{X-34}{6} > \frac{K-34}{6}\right) = P\left(Z > \frac{K-34}{6}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right)$

$0{,}1587 = 1 - P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right)$; $P\left(Z < \frac{K-34}{6}\right) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

Buscamos en el interior de la tabla



	0	0,0
0	0,5000	0,504
0,1	0,5398	0,543
0,2	0,5793	0,583
0,3	0,6179	0,621
0,4	0,6554	0,659
0,5	0,6915	0,695
0,6	0,7257	0,729
0,7	0,7580	0,761
0,8	0,7881	0,791
0,9	0,8159	0,818
1	0,8413	0,843
1,1	0,8643	0,866
1,2	0,8849	0,886
1,3	0,9032	0,904

De donde $\frac{K-34}{6} = 1{,}0 \rightarrow k = 40$

El 15,87 % de las personas tiene una edad superior a 40 años.

BY NC SA

BY NC SA

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

a) [1 punto] Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.

b) [1 punto] La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo [a, b] viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t)dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

Respuesta:

a) Calculamos la derivada, igualamos a 0 y resolvemos

$$C'(t) = \frac{12\cdot(t^2+4)-12t\cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{-12t^2+48}{(t^2+4)^2} = 0 \rightarrow -12t^2 + 48 = 0 \rightarrow t = -2 \;\; y \;\; t = 2$$

Como t es tiempo, t = - 2 no es válido.

Calculamos la segunda derivada $C''(t) = \frac{-24t\cdot(t^2+4)^2-(-12t^2+48)\cdot 2\cdot 2t\cdot(t^2+4)}{(t^2+4)^4} =$

$$= \frac{-24t\cdot(t^2+4)-(-12t^2+48)\cdot 2\cdot 2t}{(t^2+4)^3} = \frac{(24t^3-288t)}{(t^2+4)^3}; \quad C''(2) = \frac{(24\cdot 2^3-288\cdot 2)}{(2^2+4)^3} < 0$$, máximo.

En t = 2, a las 2 horas, la concentración en sangre es máxima.

b) Debemos calcular

$$\frac{1}{6-0} \cdot \int_0^6 \frac{12t}{t^2+4} dt = \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 \frac{6\cdot 2t}{t^2+4} dt = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \ln(t^2+4)]_0^6 = \ln(6^2+4) - \ln(0^2+4) =$$

$$= ln40 - ln4 = ln\frac{40}{4} = ln10 = 2{,}3$$

La concentración media entre las 0 y las 6 horas es de 2,3 mg/l.

BY NC SA

Pregunta 3.

a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a.

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) [0,5 puntos]¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

Respuesta:

a) $\begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F1' = F1 \\ F2' = -F1 + F2 \\ F3' = -F1 + F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 2-a & 2a-a^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F1'' = F1' \\ F2'' = F2' \\ F3' = -F2' + F3' \end{matrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ el determinante de esta matriz es = a·(a-2), a·(a-2) = 0, a = 0 o a = 2.

1. Si a ≠ 0 y a ≠ 2, r(A) = 3
2. Si a = 0, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ r(A) = 2
3. Si a = 2, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ r(A) = 2

Si a ≠ 0 y a ≠ 2, r(A) = 3. Si a = 0 o a = 2, r(A) = 2.

b) $\begin{vmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 2-a & 2a-a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot (a-2) \neq 0$ cuando a ≠ 0 y a ≠ 2

Si a ≠ 0 y a ≠ 2, la matriz A tiene inversa.

BY NC SA

Pregunta 4.

4.1. Se consideran los puntos A(1, 1, 0), B(2,0, 1), C(0,2,1) y D(a, 1, 2), con a un número real.

a) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) [1,25 puntos] Determina los valores reales del parámetro a, para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

Respuesta:

a) Consideramos el punto A(1, 1, 0) y los vectores $\overline{AB}(1,-1,1)\ y\ \overline{AC}(-1,1,1)$

La ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(x-1)-(y-1)+z-z-(x-1)-(y-1)=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x-2y+4=0 \rightarrow x+y-2=0$$

La ecuación del plano que pasa por A, B y C es x + y – 2 = 0.

b) Consideramos los vectores $\overline{AB}(1,-1,1)$, $\overline{AC}(-1,1,1)\ \ y\ \ \overline{AD}(a-1,0,2)$

El volumen del tetraedro viene dado por la expresión $V = \frac{1}{6}\cdot \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{matrix}\right|$

$$\frac{1}{6}\cdot \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot |(2-a+1-a+1-2)| = \frac{1}{6}|2-2a|$$

Queremos que el volumen sea 3, luego $\begin{matrix} \frac{1}{6}(2-2a)=3 \\ \frac{1}{6}(2-2a)=-3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2-2a=18 \rightarrow 2a=-16 \rightarrow a=-8 \\ 2-2a=-18 \rightarrow 2a=20 \rightarrow a=10 \end{matrix}$

El volumen del tetraedro determinado por los 4 puntos es de 3 unidades cúbicas cuando a = - 8 o a = 10.

BY NC SA

Pregunta 4.

4.2. Sean los puntos del espacio A(1, 2, -1), B(3, 6, 1) y C(m, m, m-2), donde m es un número real.

a) [0,75 puntos] Determina el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados.

b) [1,25 punto] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto P(2, 0, 1) a la recta que forman A, B y C.

Respuesta:

a) Consideramos los vectores $\overline{AB}(2,4,2)$, $\overline{AC}(m-1, m-2, m-1)$, para que los puntos estén alineados los vectores han de ser dependientes, es decir, sus componentes han de ser proporcionales $\frac{m-1}{2} = \frac{m-2}{4} = \frac{m-1}{2} \rightarrow 4(m-1) = 2(m-2)\ \ y\ \ 2(m-2) = 4(m-1) \rightarrow$

$\rightarrow 4m - 2m = -4 + 4 \rightarrow m = 0, \quad 2m - 4m = -4 + 4 \rightarrow m = 0$

Para m = 0 los tres puntos están alineados.

b) Como para m = 0 los 3 puntos están alineados, podemos coger 2 cualesquiera para determinar la recta, consideramos el vector $\overline{AB}(2,4,2) \equiv \bar{V}$, vector director de la recta,

y el punto A(1, 2, -1).

La distancia del punto P a la recta determinada por A y $\bar{V}$ viene dada por la expresión

$d(P,r) = \frac{|\overline{AP}x\bar{V}|}{|\bar{V}|}$; $\overline{AP} = (1,-2,2)$;

$$|\overline{AP}x\bar{V}| = \left|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix}\right| = |-4i + 4k + 4j + 4k - 8i - 2j| = |-12i + 2j + 8k| =$$

$= \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{212}$;

$|\bar{V}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$

$d(P,r) = \frac{|\overline{AP}x\bar{V}|}{|\bar{V}|} = \frac{\sqrt{212}}{\sqrt{24}} = 2{,}97$

La distancia del punto P a la recta determinada por los puntos A, B y C, es de 2,97 u.

BY NC SA

Pregunta 5.

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1 punto] Halla, razonadamente, los coeficientes a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas (1, 4) y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 3 es paralela a la recta de ecuación $y = 2x-1$

b) [1 punto] Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a f(x) en x = 0.

Respuesta:

a) Extremo relativo en (1, 4), luego f(1) = 4 y f'(1) = 0; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Pendiente de y = 2x -1 es m = 2, luego, f'(3) = 2, escribimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} f(1) = 4 \to 1^3 + a\,1^2 + b\cdot 1 + c = 4 \to a + b + c = 3 \\ f'(1) = 0 \to 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \to 2a + b = -3 \\ f'(3) = 2 \to 3\cdot 3^2 + 2a\cdot 3 + b = 2 \to 6a + b = -25 \end{matrix} \quad \begin{matrix} E1' = E1 \\ \to E2' = -2E1 + E2 \to \\ E3' = -6E1 + E3 \end{matrix}$$

$$\to \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -b - 2c = -9 \\ -5b - 6c = -43 \end{cases} \quad \begin{matrix} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = -5E2' + E3' \end{matrix} \to \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -b - 2c = -9 \\ 4c = 2 \to c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-b - 2c = -9 \to -b - 2\cdot\frac{1}{2} = -9 \to b = 8$$

$$a + b + c = 3 \to a + 8 + \frac{1}{2} = 3 \to a = -\frac{11}{2}$$

Los coeficientes valen: a = $-\frac{11}{2}$, b = 8 y c = $\frac{1}{2}$.

La función quedaría f(x) = $x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 8x + \frac{1}{2}$.

b) La ecuación de la recta normal a la función en el punto x = 0 es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0) \;; \qquad f'(x) = 3x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + 8 = 3x^2 + x + 8 \;;$$

$$f(0) = 0^3 - \frac{11}{2}\cdot 0^2 + 8\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;;$$

$$f'(0) = 3\cdot 0^2 + 0 + 8 = 8 \;;$$

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0) \to y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}x \to 8y - 4 = -x \to 8y + x - 4 = 0$$

La ecuación de la recta normal a f(x) en x = 0 es 8y + x - 4 = 0.

BY NC SA

Pregunta 5.

5.2. Resuelve los siguientes apartados

a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$

b) [0,75 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - senx - 1}{x^2}$

Respuesta:

a) La gráfica de

$f(x) = \frac{3}{x}$ es una hipérbola que, en el primer cuadrante pasa por los puntos (1, 3) y (3, 1)

Y la de $g(x) = -x + 4$ es una recta que pasa por los puntos (0, 4) y (4, 0).

Las gráficas se cortan en $\frac{3}{x} = -x + 4 \to x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1, x = 3;$ (1, 3) y (3,1)

Como la recta está por encima de la hipérbola

El área viene dada por:



$$\int_1^3 \left(-x + 4 - \frac{3}{x}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + 4x - 3lnx\Big]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 - 3ln3\right) - \left(-\frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 - 3ln1\right) =$$

$$= \frac{15}{2} - 3ln3 - \frac{7}{2} = 4 - 3ln3 = 0{,}7$$

El área del recinto limitado por las gráficas es de 0,7 u².

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - senx - 1}{x^2} = \frac{e^0 - sen0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos L'Hôpital y calculamos:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - cosx}{2x} = \frac{e^0 - cos0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos L'Hôpital y calculamos:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + senx}{2} = \frac{e^0 + sen0}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - senx - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

BY NC SA

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

Castilla y León

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Luis Lorente, Francisco Barrientos y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INDICACIONES

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. **CALCULADORA**: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. **CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos**. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. **DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES**: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1. (elegir UN problema)

Problema 1A:

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}, donde\ m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m. (1.5 puntos)
b) B) Resolver, razonablemente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$ (1 punto)

Problema 1B: (Propuesto en Galicia, Modelo 0 de 2025)

a) Calcular A si $(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1.5 puntos)
b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, calcula x, y, z , sabiendo que $(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. (1 punto)

Entiéndase que I es la matriz identidad

APARTADO 2. (elegir UN problema)

Problema 2A:

a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}dx$. (1.25 puntos)
b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real, encontrando un intervalo que la contenga. (1.25 puntos)

Problema 2B:

a) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas. Justifica la existencia o no de extremos relativos. (1.5 puntos)
b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos(x)dx$. (1 punto)

APARTADO 3. (obligatorio)

Problema 3:

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores directores $\overrightarrow{v_1} = (0,2,6)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,0,b)$, se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. (0.75 puntos)
b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2. (0.75 puntos)
c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2. (1 punto)

APARTADO 4. (elegir UN problema)

Problema 4A:

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20% de los móviles son de la marca A y el 40% de la marca N. Se decide instalar un software ocualto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software se instala en el 15% de los móviles de la marca A, en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M. Se pide:

a) Describir todas las probabilidades, condicionadas y no condicionadas, que se deducen directamente del enunciado. (0.3 puntos)
b) Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado por esta empresa tenga instalado el software espía. (1 punto)
c) Si el móvil fabricado por esta empresa tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A- (1.2 puntos)

Problema 4B:

De una bolsa de 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3. (0.5 puntos)
b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3. (0.75 puntos)
c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sean múltiplos de 2. (0.75 puntos)
d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera lo ha sido (0.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A:

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m-10)x-2y-z=-1 \\ 7x+(m+2)y+2z=m+1 \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro
b) Resolver, razonadamente para m=3

Solución:

$$A=\text{"Matriz de los coeficientes"}=\begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\text{Matriz ampliada}=\begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 & m+1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos los rangos de ambas matrices en función de m:

Rango de A ≤ 3

Calculemos el determinante pro Sarrous

$|A|=(m-10)(m+2)-14-20+5(m+2)-4(m-10)+14=m^2-7m+10$

Si $m^2-7m+10=0$ → m=5 y m=2

Concluimos:

- si $m\in\mathbb{R}-\{2,5\}$ se cumple $|A|\neq 0$ y rango(A)=3
- si m=5 → $A=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=-21\neq 0$ → rango(A)=2
- si m=2 → $A=\begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=-18\neq 0$ → rango(A)=2

Rango de A* ≤ 3 y rang(A*)≥rango(A)

A partir del $|A|$ podemos concluir:

- si $m\in\mathbb{R}-\{2,5\}$ se cumple $|A|\neq 0$ y rango(A*)=3
- Si m=5 →$A^*=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Todos los menores de orden 3 son cero

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-35-14-60+35+60+14=0$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-10-7-30+10+30+7=0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 7 - 12 + 4 + 12 + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$Rango(A^*) = 2$$

- Si m=2 →$A^*=\begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Como el menor

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -32 - 14 - 30 + 20 + 48 + 14 = 6 \neq 0$$

  Rango(A*)=3

Concluimos aplicando el Teorema de Rouchè-Frobenius

En resumen

m	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq \{2, 5\}$	3	3	Compatible determinado
5	2	2	Compatible indeterminado
2	2	3	Incompatible

b) Si m=3 → sistema compatible determinado (Sistema de Cramer). Aplicamos la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

|A|=3^2 -7·3+10=-2

Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5 - 8 - 4 + 5 + 4 + 8}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-28 - 7 - 10 + 20 + 14 + 7}{-2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-35 - 14 - 40 + 25 + 56 + 14}{-2} = -3$$

Solución única (x, y, z) = (0, 2, -3)

Problema 1B.

a) Calcular A si $(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1.5 puntos)

b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, calcula x, y, z , sabiendo que $(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. (1 punto)

Entiéndase que I es la matriz identidad

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$

Calculemos B^{-1}: $|B| = 2 \neq 0$ (invertible) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(B^t)^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos M^{-1}:

$(3z) \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$M = 3z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = 3z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ z & z \end{pmatrix}$

Igualando: $\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ → z=1, x=0 y=z=1

z=1, x=0, y=z=1

Problema 2A:

a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}dx$. (1.25 puntos)

b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real, encontrando un intervalo que la contenga. (1.25 puntos)

Solución:

a)

Calculamos primero la integral indefinida

$$\int \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx - 5\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - 10x^{\frac{1}{2}} + C$$

Calculamos ahora la integral definida

$$\int_0^1 \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}dx = \left[\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - 10x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{7} - 10 = -\frac{68}{7}$$

b)

Vamos a utilizar el teorema de Bolzano que dice:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f(c) = 0$"

En este caso las funciones $g(x) = 2$ y $h(x) = e^x$ son continuas, por tanto, su diferencia también lo es. Además

$$f(0) = 2 - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$$
$$f(1) = 2 - e^1 = -0.71 < 0$$

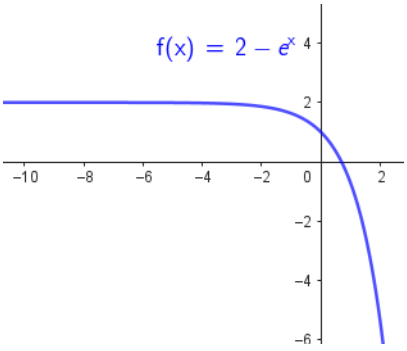
El teorema asegura que existe al menos un punto $c \in (0,1)$ para el que $f(c) = 0$.

Veamos que solo hay un punto donde la función se anula.

$$f'(x) = -e^x$$

Como $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = -e^x < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto la función es siempre decreciente. Por tanto solo puede tener una raíz.

La función tiene una raíz en $x \approx 0.6931$es así:



Problema 2B

a) Dada la función $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$, determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas. Justifica la existencia o no de extremos relativos. (1.5 puntos)

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos(x)dx$. (1 punto)

Solución:

Dominio

a) La función no existe cuando

$$1+e^x=0 \Rightarrow e^x=-1$$

Pero $e^x>0, \forall x \in \mathbb{R}$, por tanto, **el dominio es $\mathbb{R}$**

Monotonía y extremos

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Tanto el numerador como el denominador de la fracción son positivos para todo valor de x, pero como está precedido de un signo menos, la derivada es siempre negativa, por lo que **la función es decreciente para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.**

Esto también justifica que la función no tenga máximos ni mínimos, puesto que solo decrece.

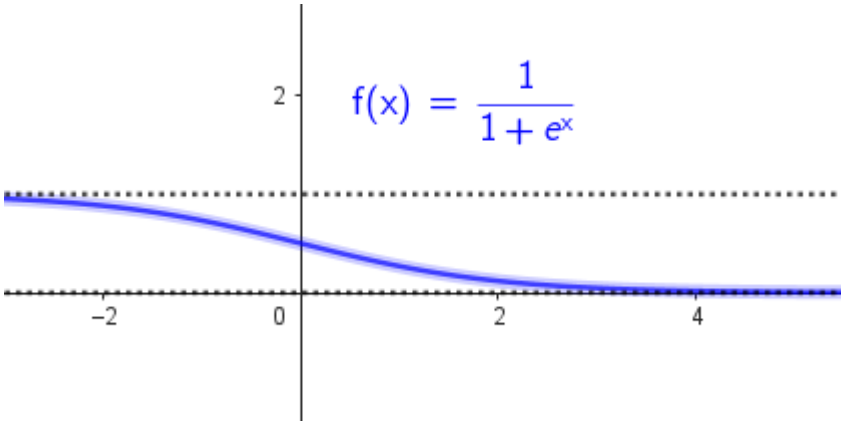
Asíntotas

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y=1$ y otra asíntota horizontal por la derecha de ecuación $y=0$.

La gráfica de la función es así:



b)

$$\int sen(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int 2sen(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}sen^2(x) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos(x)dx = \left[\frac{1}{2}sen^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}sen^2(0) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}}$$

Problema 3:

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores directores $\overrightarrow{v_1} = (0,2,6)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,0,b)$, se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. (0.75 puntos)
b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2. (0.75 puntos)
c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2. (1 punto)

Solución:

a) Vamos a hallar las ecuaciones del plano π_2

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 2bx + 6y - 2z - 4 = 0$$

Para que este plano y π_1 sean paralelos, los coeficientes de las variables deben ser proporcionales pero esta proporción no debe conservarse en los términos independientes

$$\frac{2}{2b} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} \neq \frac{a}{4}$$

Esto ocurre para $b = -2$ y $a \neq -2$

Los valores son $b = -2$ y $a \neq -2$

b) Los planos son $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 1$ y $6y - 2z - 4 = 0$. Obtenemos las relaciones:

$$6y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow 3y - z - 2 = 0 \Rightarrow z = 3y - 2$$

$$2x - 3y + z = 1 \Rightarrow 2x - 3y + 3y - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

La recta puede parametrizarse como

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = t \\ z = 3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c) Los planos son $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 4$ y $\pi_1 \equiv -4x + 6y - 2z = 4$

Los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 están en un plano π cuya distancia a cada uno de los planos dados es la misma. Todos los planos paralelos a π_1 y π_2 son de la forma $2x - 3y + z = k$. Solo queda calcular el valor de k. Bascta con encontrar un punto C que esté a igual distancia de π_1 y π_2. Para hallar este punto, hallaremos un punto cualquiera A de π_1. El punto medio del segmento AP pertenecerá al plano π buscado.

Un punto del plano π_1 es por ejemplo $A(0,0,4)$. El punto medio del segmento AP es

$$C = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (0,1,4)$$

Sustituyendo sus coordenadas en el haz de planos

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 4 = k \Rightarrow k = 1$$

El plano pedido es $2x - 3y + z = 1$

Los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 están en el plano $2x - 3y + z = 1$

Problema 4A.

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20% son de la marca A y el 40% de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita los usuarios de estos móviles. El software se instala en el 15% de los móviles A, en el 10% de los móviles N y en el 12% de los móviles M. Se pide

a) Escribir todas las probabilidades es condicionadas y no condicionadas que se deducen directamente del enunciado
b) Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado en esta empresa tenga instalado el software espía
c) Si un móvil de esta empresa tiene instalado el software espía, calcule la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:

a) A=”móvil marca A”; N=”móvil marca N”, M=”móvil marca M”, S=”tiene instalado el software”

p(A)=0,2 p(N)=0,4 p(M)=0,4 p(S/A)=0,15 p(S/N)=0,1 y p(S/M)=0,12

b) Utilizamos la probabilidad total:

P(S)=p((S∩A)∪(S∩N) ∪(S∩M))=p(A)·p(S/A)+p(N)·p(S/N)+p(M)·p(S/M)=

=0,2·0,15+0,4·0,1+0,4·0,12=0.118

c) Teorema de Bayes

$$p(A/S) = \frac{p(A)\cdot p(S/A)}{p(S)} = \frac{0.2\cdot 0.15}{0.118} = 0.2542$$

$$\boldsymbol{a)\ p(A)=0.2; p(N)=0.4; p(M)=0.4}$$
$$\boldsymbol{p(S/A)=0.15; p(S/N)=0.10; p(S/M)=0.12}$$
$$\boldsymbol{b)\ p(S)=0.118}$$
$$\boldsymbol{c)\ p(A/S)=0.2542}$$

Problema 4B.

De una bolsa de 20 fichas numerada del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide

a) Calcular la probabilidad de que ambos sean múltiplos de 3
b) Calcular la probabilidad de que el primero sea múltiplo de 6 y el segundo múltiplo de 3
c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los ninguno de los números sea múltiplo de 2
d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera lo ha sido

Solución:

a) Del 1 al 20 los múltiplos de 3 son $\{3,6,9,12,15,18\}$, es decir hay 6 fichas. Sea

$$M_1 = \{sacar\ múltiplo\ de\ 3\ en\ la\ primera\ extracción\}$$
$$M_2 = \{sacar\ múltiplo\ de\ 3\ en\ la\ segunda\ extracción\}$$

Como hay 6 casos favorables entre 20 posibles $p(M_1) = \frac{6}{20}$. Después de la primera extracción de una ficha cuyo número es múltiplo de 3 quedan 5 fichas múltiplo de 3 y 19 fichas en total. Por tanto $p(M_2/M_1) = \frac{5}{19}$. Por tanto

$$p(M_1 \cap M_2) = p(M_1) \cdot p\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}$$

b) Sea el suceso $N = \{extraer\ múltiplo\ de\ 6\ en\ la\ primera\ extracción\}$.
Los múltiplos de 6 son $\{6,12,18\}$. Una vez extraído un múltiplo de 6 quedan 5 múltiplos de 3 y 19 fichas por tanto

$$p(N \cap M_2) = p(N)p(M_2/N) = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76}$$

c) Inicialmente hay 10 múltiplos de 2, por lo que la probabilidad de NO sacar par en la primera extracción es $\frac{10}{20}$. Después de extraer una ficha impar, quedan 9 impares y 19 fichas. La probailidad de que ni la primera ni la segunda extracción sean pares es

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$$

d) Si la primera ficha ha sido un número impar quedan 9 fichas impares y un total de 19 fichas. Por tanto

$$p(segunda\ impar/primera\ impar) = \frac{9}{19}$$

$$\boldsymbol{a) p(M_1 \cap M_2) = \frac{3}{38}}$$

$$\boldsymbol{b)\ p(M_2) = \frac{3}{76}}$$

c) La probailidad de que ni la primera ni la segunda extracción sean pares $\boldsymbol{= \frac{9}{38}}$

$$\boldsymbol{d)\ p(segunda\ impar/primera\ impar) = \frac{9}{19}}$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INDICACIONES

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. **CALCULADORA**: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. **CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos**. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. **DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES**: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

Problema 1:

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&4&-6\\-2&1&-2\\-11&3&-8\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2-AX=B$. **(0,5 puntos)**

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A-\alpha I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=-2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix}g-5a&2d&a\\2h-10b&4e&2b\\i-5c&2f&c\end{vmatrix}$. **(0,5 puntos)**

Problema 2:

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x+1)}{\left(4+x^2\right)^2}, & si\ x<0,\\ \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}+\dfrac{x}{4}, & si\ x\geq 0.\end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de *f(x)*. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$. **(1 punto)**

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x)=x\ln(x)$ con $x>0$

a) Calcular la derivada de *f(x)*. **(0,75 puntos)**

b) Calcular una primitiva de *f(x)*. **(0,75 puntos)**

c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. **(1 punto)**

Problema 3:

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Dado el plano $\pi\equiv x+y=0$, el punto $A(1,-1,0)$ y la recta $s\equiv x=y=z$. Hallar la recta *r*, en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π, y corta a la recta *s*. **(2,5 puntos)**

Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ *y* $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**

c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices *ABEO*, siendo O(0,0,0) el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

Problema 4:

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2.025 (365 días), sigue una distribución normal con media 337,2 hm^3 y desviación típica de 40,5 hm^3.

a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a 299,94 hm^3. **(1 punto)**

b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre 299,94 hm^3 y 350,16 hm^3. **(1 punto)**

c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: "el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180". **(0,5 puntos)**

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. **(0,5 puntos)**

Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. **(1 punto)**

c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&4&-6\\-2&1&-2\\-11&3&-8\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2-AX=B$. **(0,5 puntos)**

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A-\alpha I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=-2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix}g-5a&2d&a\\2h-10b&4e&2b\\i-5c&2f&c\end{vmatrix}$. **(0,5 puntos)**

Solución:

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{4}A^2-AX=B\Rightarrow\frac{1}{4}A^2-B=AX\Rightarrow X=A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{4}A^{-1}AA-A^{-1}B\Rightarrow X=\frac{1}{4}A-A^{-1}B$$

Determinamos la inversa de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&0&4\end{vmatrix}=16+0+0-0-0-0=16\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}}{16}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&2\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&2\\0&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8&-8&0\\0&8&0\\-4&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\0&1/2&0\\-1/4&1/4&1/4\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=\frac{1}{4}A-A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\0&1/2&0\\-1/4&1/4&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&-6\\-2&1&-2\\-11&3&-8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\0&1/2&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}+1&2-\frac{1}{2}&-3+1\\-1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{11}{4}&-1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}&\frac{6}{4}-\frac{2}{4}-\frac{8}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\0&1/2&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1/2&3/2&-2\\-1&1/2&-1\\-5/2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\3&0&2\end{pmatrix}$.

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A-\alpha I=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\alpha&2&0\\0&2-\alpha&0\\2&0&4-\alpha\end{pmatrix}$$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix}2-\alpha&2&0&0\\0&2-\alpha&0&0\\2&0&4-\alpha&1\end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\alpha&2&0\\0&2-\alpha&0\\2&0&4-\alpha\end{vmatrix}=(2-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)+0+0-0-0-0=(2-\alpha)^2(4-\alpha)$$

$$|A|=0\Rightarrow(2-\alpha)^2(4-\alpha)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\alpha=2}\\\boxed{\alpha=4}\end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq 2$ y $\alpha\neq 4$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{Fila1^a\leftrightarrow Fila3^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{Fila3^a\leftrightarrow Fila2^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{2 & 0 & 2}^{A} & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\alpha=4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Fila3^a+Fila1^a\\ 2\quad 0\quad 0\quad 1\\ -2\quad 2\quad 0\quad 0\\ \hline 0\quad 2\quad 0\quad 1\rightarrow Nueva\,Fila3^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Fila3^a+Fila2^a\\ 0\quad 2\quad 0\quad 1\\ 0\quad -2\quad 0\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 1\rightarrow Nueva\,Fila3^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{-2 & 2 & 0}^{A} & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 1\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha\neq 2$ y $\alpha\neq 4$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $\alpha=2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $\alpha=4$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

c) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix} = \{Columna\,1^a + 5 \cdot Columna\,3^a\} = \begin{vmatrix} g & 2d & a \\ 2h & 4e & 2b \\ i & 2f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Sacamos factor común 2 en la 2ª columna}\} = 2\begin{vmatrix} g & d & a \\ 2h & 2e & 2b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Sacamos factor común 2 en la 2ª fila}\} = 4\begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Trasponemos la matriz y el} \\ \text{determinante no cambia}\end{matrix}\right\} = 4\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \\ \text{El determinante cambia de signo}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) = \boxed{8}$$

Problema 2:

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x+1)}{\left(4+x^2\right)^2}, & si\ x<0,\\ \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}+\dfrac{x}{4}, & si\ x\geq 0.\end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de *f(x)*. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$. **(1 punto)**

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x)=x\ln(x)$ con $x>0$

a) Calcular la derivada de *f(x)*. **(0,75 puntos)**

b) Calcular una primitiva de *f(x)*. **(0,75 puntos)**

c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. **(1 punto)**

Solución:

a) Los denominadores nunca se anulan y el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene pues el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales. $y=b$

Estudiamos que ocurre cuando x tiene a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\left(\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)^2}=\frac{4\left(\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(\frac{4}{\infty}+1\right)^2}=\frac{0}{1}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{x}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{2(1+e^x)\cancel{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(1+e^x)}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=\frac{+\infty}{4}=+\infty$$

$$\ldots=0+\infty=+\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiene a $-\infty$ no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

Estudiamos que ocurre cuando x tiene a $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{x}{4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(1+e^x)^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(1+e^x)^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}=\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(1+e^x)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L'Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2+2x(1+e^x)e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2+2x(e^x+e^{2x})}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2(1+e^x)e^x+2(e^x+e^{2x})+2x(e^x+2e^{2x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2(1+e^x)e^x+2(1+e^x)e^x+2x(1+2e^x)e^x}=$$

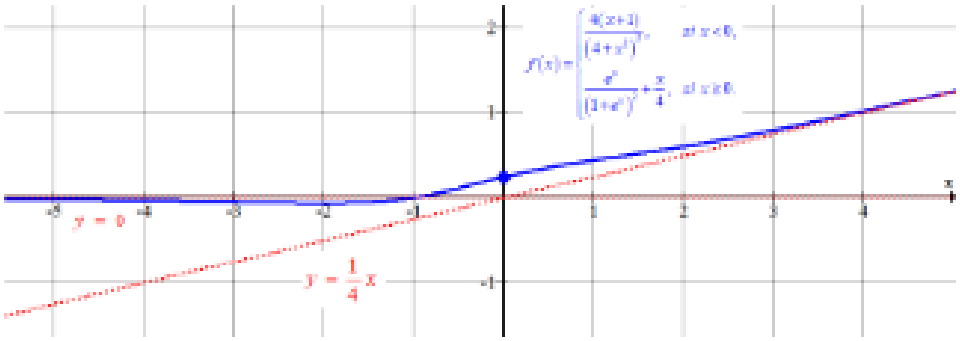
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(1+e^x)+2(1+e^x)+2x(1+2e^x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\ldots=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{x}{4}-\frac{1}{4}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\left\{\begin{matrix}Calculado\\previamente\end{matrix}\right\}=0$$

La recta $y=\frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.



b) En el intervalo (0, 1) la función tiene la expresión $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{x}{4}$. Calculamos su integral.

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{x}{4}dx=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx+\int \frac{x}{4}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 1+e^x=t\to e^x=t-1\to e^x dx=dt\to\\ \to dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t-1}dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int \frac{t-1}{t^2}\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{4}\int x dx=\int \frac{1}{t^2}dt+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}=\int t^{-2}dt+\frac{x^2}{8}=\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{x^2}{8}=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{t}=\boxed{\frac{x^2}{8}-\frac{1}{1+e^x}+K}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{8}-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1=\left[\frac{1^2}{8}-\frac{1}{1+e^1}\right]-\left[\frac{0^2}{8}-\frac{1}{1+e^0}\right]=\frac{1}{8}-\frac{1}{1+e}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{5}{8}-\frac{1}{1+e}}$$

Solución 2B:

a) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x)=x\ln x \Rightarrow f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x,\ \text{con}\ x>0$$

b) Para calcular la integral utilizamos el método de integración por partes.

$$\int f(x)dx=\int x\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx \rightarrow v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

La integral indefinida de $f(x)$ es $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. Considerando $C=0$ obtenemos una primitiva de la función que tiene la expresión $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$.

c) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

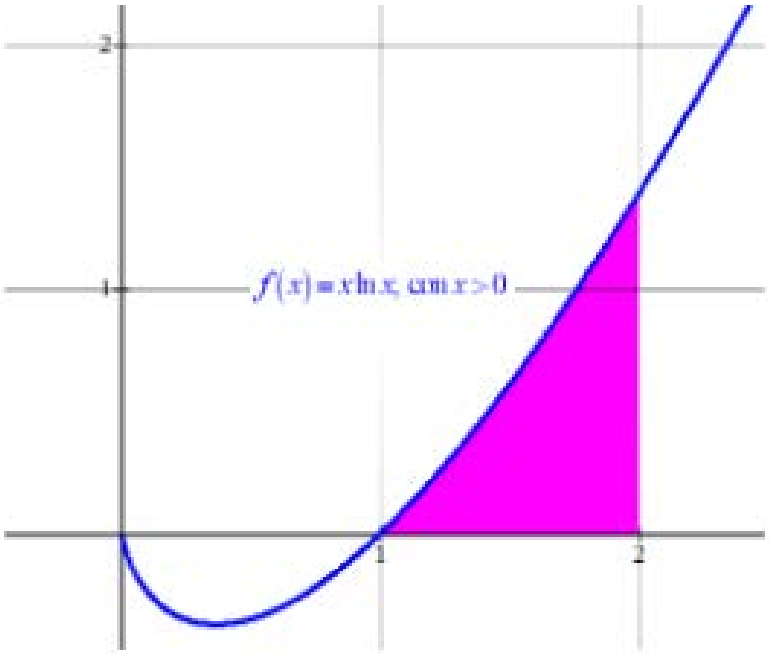
$$\left.\begin{matrix} f(x)=x\ln x \\ eje\,OX \rightarrow y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\ln x=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x=0\notin(0,+\infty) \\ \ln x=0\rightarrow x=1\end{matrix}\right.$$

La función no corta el eje en (1, 2), por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x)=x\ln x>0$, con $x>1$.

$$Área=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^2}{2}\ln 2-\frac{2^2}{4}\right]-\left[\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1^2}{4}\right]=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=\boxed{\ln 4-\frac{3}{4}\approx 0.64\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4-\frac{3}{4}\approx 0.64$ unidades cuadradas.


2
1
$f(x)=x\ln x$, con $x>0$
1
2

Problema 3:

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Dado el plano $\pi \equiv x+y=0$, el punto $A(1,-1,0)$ y la recta $s \equiv x=y=z$. Hallar la recta r, en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π, y corta a la recta s. **(2,5 puntos)**

Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**
b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**
c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices $ABEO$, siendo O(0,0,0) el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

Solución 3A:

El punto A pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,-1,0) \\ \pi \equiv x+y=0 \\ ¿A \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1-1=0? \Rightarrow ¡¡SI!! \Rightarrow A \in \pi$$

La recta s debe cortar al plano. Hallamos el punto P de corte de la recta con el plano.

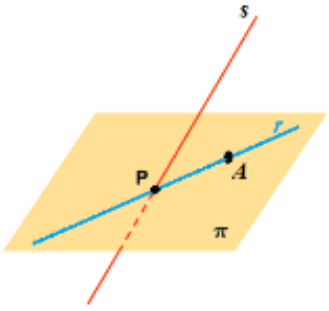
$$s \equiv \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_s(0,0,0) \\ \vec{v_s}=(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y=0 \\ s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow P(0,0,0) \\ z=0 \end{cases}$$

La recta r debe cortar a la recta s y estar contenida en el plano, por lo que la recta debe pasar por el punto P. Podemos tomar como vector director de la recta r el vector $\vec{PA}$. Hallamos la recta r como la recta que pasa por A(1,-1,0) con vector director $\vec{PA}$.

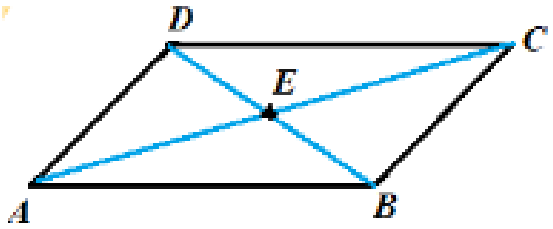
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r}=\vec{PA}=(1,-1,0)-(0,0,0)=(1,-1,0) \\ A(1,-1,0) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$.



Solución 3B:

a) Dibujamos el paralelogramo ABCD.



El vértice C se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AE} = (0,0,1) - (1,1,1) = (-1,-1,0)$$

$$C = E + \overrightarrow{AE} = (0,0,1) + (-1,-1,0) = (-1,-1,1)$$

El vértice C tiene coordenadas $C(-1,-1,1)$.

El vértice D se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BE} = (0,0,1) - (0,2,0) = (0,-2,1)$$

$$D = E + \overrightarrow{BE} = (0,0,1) + (0,-2,1) = (0,-2,2)$$

El vértice D tiene coordenadas $D(0,-2,2)$.

b) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y E.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1,1) \in \pi \\ B(0,2,0) \in \pi \\ E(0,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E(0,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AE} = (-1,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BE} = (0,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 0 + 2(z-1) - 0 + y - 0 = 0 \Rightarrow -x + 2z - 2 + y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - y - 2z + 2 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene el paralelogramo ABCD es $\pi : x - y - 2z + 2 = 0$.

c) El volumen del tetraedro ABEO es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-1,-1,0) \\ \overrightarrow{BE} = (0,-2,1) \\ \overrightarrow{OE} = (0,0,1) - (0,0,0) = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El volumen del tetraedro ABEO es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$ unidades cúbicas.

Problema 4:

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2.025 (365 días), sigue una distribución normal con media 337,2 hm^3 y desviación típica de 40,5 hm^3.

a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a 299,94 hm^3. **(1 punto)**

b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre 299,94 hm^3 y 350,16 hm^3. **(1 punto)**

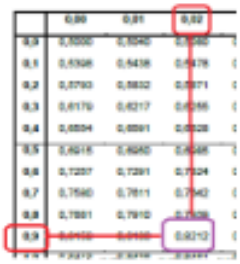
c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: "el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180". **(0,5 puntos)**

Solución 4A:

Nos piden calcular $P(X > 299.94)$.

$$P(X>299.94) = \left\{\begin{matrix}\text{Tipificamos} \\ Z=\dfrac{X-337.2}{40.5}\end{matrix}\right\} = P\left(Z > \frac{299.94-337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(Z>-0.92) = P(<0.92) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.8212}$$



b) Calculamos $P(299.94 < X < 350.16)$.

$$P(299.94<X<350.16) = \left\{\begin{matrix}\text{Tipificamos} \\ Z=\dfrac{X-337.2}{40.5}\end{matrix}\right\} = P\left(\frac{299.94-337.2}{40.5} < Z < \frac{350.16-337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(-0.92<Z<0.32) = P(Z<0.32) - P(Z<-0.92) =$$

$$= P(Z<0.32) - P(Z>0.92) = P(Z<0.32) - [1-P(Z\le 0.92)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.6255 - [1-0.8212] = \boxed{0.4467}$$



La probabilidad de que un día cualquiera el pantano tenga almacenada una cantidad de agua comprendida entre 299,94 hm^3 y 350,16 hm^3 es de 0.4467. Multiplicamos esta cifra por los 365 días del año y obtenemos que $365 \cdot 0.4467 = 163$ días el pantano tendrá almacenada una cantidad de agua comprendida entre 299,94 hm^3 y 350,16 hm^3.

c) Sabemos que "el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 299,94 hm^3 y 350,16 hm3 es de 163".
El intervalo (310, 330) tiene menos amplitud que el intervalo (299.94, 350.16) por lo que "el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debe ser menor de 163".
La afirmación "el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180" no es correcta, pues 170 es mayor que 163.

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. **(0,5 puntos)**

Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. **(1 punto)**

c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. **(1 punto)**

Solución 4B:

a) Llamamos L al suceso "el ejercicio lo ha resuelto Lucía", G a "el ejercicio lo ha resuelto Gloria", M a "el ejercicio lo ha resuelto María" y C al suceso "el ejercicio se ha resuelto correctamente".
Considerando el experimento "la profesora elige un ejercicio al azar" tenemos las siguientes probabilidades: $P(L)=0.45$, $P(G)=0.3$, $P(M)=1-0.45-0.3=0.25$, $P(C/L)=0.90$, $P(C/G)=0.95$ y $P(C/M)=0.80$.

b) Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(C\cap L)+P(C\cap G)+P(C\cap M)=$$

$$=P(L)P(C/L)+P(G)P(C/G)+P(M)P(C/M)=$$

$$=0.45\cdot 0.9+0.3\cdot 0.95+0.25\cdot 0.8=\boxed{0.89}$$

La probabilidad de que un ejercicio elegido al azar esté resuelto correctamente vale 0.89.

c) Debemos calcular $P(G/\overline{C})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/\overline{C})=\frac{P(G\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(G)P(\overline{C}/G)}{1-P(C)}=\frac{0.3\cdot(1-0.95)}{1-0.89}=\boxed{\frac{3}{22}=0.1364}$$

La probabilidad de que un ejercicio resuelto de forma incorrecta lo haya resuelto Gloria tiene un valor de $\frac{3}{22}=0.1364$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat Catalunya

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exerci- cis 1, 2 i 3 responent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada. En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent. Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Problema 1:

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{2x} & x\le 0 \\ (x+m)^2+1 & 0<x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases},$$

on m és un paràmetre real.

1.1. Determineu els valors de m que fan que la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1

1.2. Feu un esbós de la gràfica de $y=f(x)$ per al cas $m=-2$, i calculeu l'àrea delimitada per aquesta gràfica, l'eix OX i les rectes $x=-1$ i $x=3$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2

1.3. Per a $m=-2$, trobeu un punt on la recta tangent a $y=f(x)$ sigui paral·lela a $y=-2x$. Calculeu l'equació d'aquesta recta tangent.
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3

Problema 2:

Exercici 2
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que està format per tres plans a l'espai i depèn del paràmetre real m:

$$\left.\begin{aligned} x+my+z&=4\\ x+3y+z&=5\\ mx+y+z&=4 \end{aligned}\right\}.$$

2.1. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1

2.2. Interpreteu geomètricament aquest sistema per a tots els valors del paràmetre m i resoleu-lo, si és possible, per al cas $m=1$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2

2.3. Per a $m=1$, és possible afegir una quarta equació de manera que el sistema resultant sigui compatible determinat i tingui com a solució $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$? Raoneu la resposta.
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 2.3

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 3:

Exercici 3
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3

L'Ajuntament de Canet de Mar ha aconseguit 24 entrades gratuïtes per a un concert d'un grup de rock català, i ha decidit sortejar-les entre els veïns interessats a assistir-hi. Tots els veïns del poble seguidors d'aquest grup s'apunten al sorteig, i només al 16 % els toca una entrada. De la resta de seguidors del grup, sis setenes parts intenten comprar una entrada per la web, on la probabilitat d'aconseguir-ne és del 25 %.

3.1. Quantes persones d'aquest municipi tenen entrada per al concert?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1

3.2. Si escollim a l'atzar un veí de Canet seguidor d'aquest grup de rock i no té entrada per al concert, quina és la probabilitat que hagués intentat aconseguir-la via web?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2

3.3. El dia del concert, l'equip de so mesura el nivell de decibels generat pels crits entusiastes del públic durant els 5 minuts de durada de la cançó més famosa del grup; es pot aproximar per la funció següent:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \qquad t \in [0, 5],$$

on t és el temps en minuts i $S(t)$ els decibels. Quan se superen els 100 decibels es considera que el públic està molt entregat i s'activen automàticament uns efectes lumínics especials. S'activaran en algun moment durant aquests cinc minuts? Si la resposta és afirmativa, calculeu en quin minut s'activen, aproximat a les dècimes.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3

Problema 4:

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P, Q i R.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1

4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2

4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P, Q, R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels punts P, Q, R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)
[1 punt]

ació de l'apartat 4.3

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{2x} & x\le 0 \\ (x+m)^2+1 & 0<x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases},$$

on m és un paràmetre real.

1.1. Determineu els valors de m que fan que la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Feu un esbós de la gràfica de $y=f(x)$ per al cas $m=-2$, i calculeu l'àrea delimitada per aquesta gràfica, l'eix OX i les rectes $x=-1$ i $x=3$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Per a $m=-2$, trobeu un punt on la recta tangent a $y=f(x)$ sigui paral·lela a $y=-2x$. Calculeu l'equació d'aquesta recta tangent.
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

Solución:

Exercici 1

1.1.

Com que les tres funcions que defineixen f són contínues en els seus respectius intervals de definició, només cal imposar que f sigui contínua als punts de contacte, $x=0$ i $x=2$. Tenim

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 5e^{2x}=5,$$

$$f(0)=5e^0=5,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} (x+m)^2+1=m^2+1.$$

Per tant, la funció f és contínua en $x=0$ si i només si $m^2+1=5$, cosa que passa si i només si $m=\pm 2$. D'altra banda,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} (x+m)^2+1=(2+m)^2+1,$$

$$f(2)=1,$$

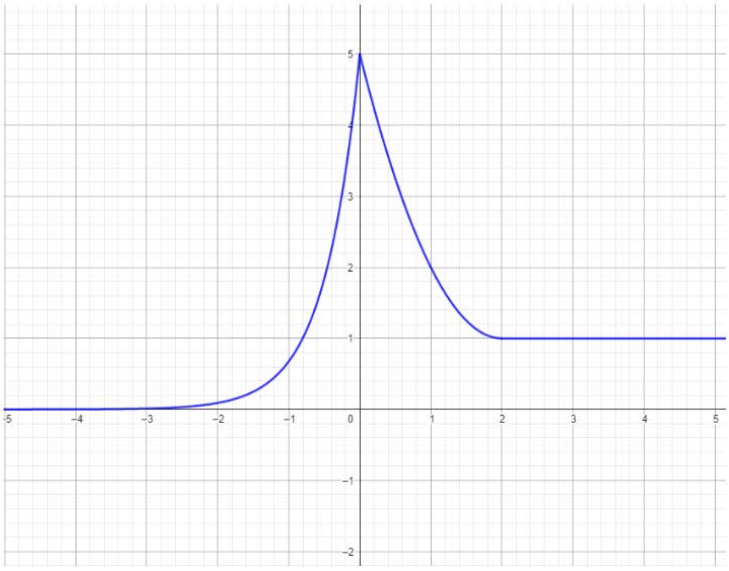
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 1=1,$$

i la funció f és contínua en $x=2$ si i només si $(2+m)^2+1=1$, cosa que passa si i només si $m=-2$. Per tant, la funció és contínua en tots els punts només quan $m=-2$.

BY NC SA

1.2.

La gràfica corresponent és:



Per representar la funció quadràtica es pot calcular el vèrtex amb la fórmula $x = \frac{-b}{2a} = 2$ o bé observar que és una translació 2 unitats a la dreta i una unitat amunt de la paràbola $y = x^2$.

És clar, fins i tot sense la gràfica, que la funció és positiva en tot el seu domini. Per tant per calcular l'àrea demanada ens cal calcular la integral definida:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 5e^{2x}\,dx + \int_{0}^{2} ((x-2)^2+1)dx + \int_{2}^{3} 1\,dx =$$

$$= \left[\frac{5}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x\right]_{0}^{2} + [x]_{2}^{3} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} + 2 + \frac{8}{3} + 3 - 2 \simeq 7{,}83\ u^2.$$

1.3.

Com que el primer tram de la gràfica és creixent, i el tercer és pla, només pot haver-hi punts amb pendent negativa al tram del mig. Volem un punt on el pendent sigui -2, per tant derivem el tram parabòlic i igualem la derivada a -2:

$$2(x-2) = -2 \ \longrightarrow \ x = 1.$$

La recta tangent al punt $\big(1, f(1)\big) = (1, 2)$ és

$$y - 2 = -2(x-1) \ \longrightarrow \ y = -2x + 4.$$

Pautes de correcció: (**1.1**) Compteu 0,25 punts per justificar que ja és contínua fora dels punts de contacte; 0,25 per estudiar cadascun dels dos contactes, i 0,25 per combinar-ho i donar la resposta final correcta. (**1.2**) Compteu 0,25 per l'esbós de la gràfica; 0,25 pel planteig correcte de l'àrea com a suma d'integrals; 0,25 pel càlcul de la integral de la part exponencial, i 0,25 per la integral de la part parabòlica. (**1.3**) Compteu 0,25 per trobar el punt i 0,25 pel càlcul de l'equació de la recta tangent.

Problema 2:

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que està format per tres plans a l'espai i depèn del paràmetre real m:

$$\left.\begin{array}{l} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{array}\right\}.$$

2.1. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1	

2.2. Interpreteu geomètricament aquest sistema per a tots els valors del paràmetre m i resoleu-lo, si és possible, per al cas $m=1$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2	

2.3. Per a $m=1$, és possible afegir una quarta equació de manera que el sistema resultant sigui compatible determinat i tingui com a solució $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$? Raoneu la resposta.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 2.3	

Solución:

Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Calculant el determinant de la matriu A, tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+m^2+1-3m-1-m=m^2-4m+3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A|=0 \Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=3,\ 1.$$

En el cas $m\neq 1,3$, tenim $|A|\neq 0$, $rang(A)=rang(\bar{A})=3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m=3$, tenim $|A|=0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ per tant $rang(A)=2$. Per altra banda,

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

i deduïm que $rang(\bar{A}) = 3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m = 1$, tenim $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $rang(A) = 2$, i també $rang(\bar{A}) = 2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m \neq 1, 3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m = 3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x + 3y + z = 4$, i el segon, $x + 3y + z = 5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{F1=F3} \left.\begin{matrix} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{z=\lambda} \left.\begin{matrix} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 3\lambda - 5 + \lambda}{2} = \frac{7 - 2\lambda}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 - \lambda - 4 + \lambda}{2} = \frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda(-1,0,1)$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

2.3.

Per a $m = 1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda = \frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x = 3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Criteris de correcció: (2.1) Compteu 0,25 punts per calcular el determinant i trobar els dos valors crítics, i 0,25 punts per la discussió de cadascun dels tres casos. **(2.2)** Compteu 0,25 punts per cadascuna de les tres interpretacions geomètriques i 0,25 per la resolució del sistema en el cas $m = 1$. **(2.3)** Compteu 0,5 punts per donar l'equació demanada i raonar que és vàlida.

BY NC SA

Problema 3:

Exercici 3
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

L'Ajuntament de Canet de Mar ha aconseguit 24 entrades gratuïtes per a un concert d'un grup de rock català, i ha decidit sortejar-les entre els veïns interessats a assistir-hi. Tots els veïns del poble seguidors d'aquest grup s'apunten al sorteig, i només al 16 % els toca una entrada. De la resta de seguidors del grup, sis setenes parts intenten comprar una entrada per la web, on la probabilitat d'aconseguir-ne és del 25 %.

3.1. Quantes persones d'aquest municipi tenen entrada per al concert?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. Si escollim a l'atzar un veí de Canet seguidor d'aquest grup de rock i no té entrada per al concert, quina és la probabilitat que hagués intentat aconseguir-la via web?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

3.3. El dia del concert, l'equip de so mesura el nivell de decibels generat pels crits entusiastes del públic durant els 5 minuts de durada de la cançó més famosa del grup; es pot aproximar per la funció següent:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \qquad t \in [0, 5],$$

on t és el temps en minuts i $S(t)$ els decibels. Quan se superen els 100 decibels es considera que el públic està molt entregat i s'activen automàticament uns efectes lumínics especials. S'activaran en algun moment durant aquests cinc minuts? Si la resposta és afirmativa, calculeu en quin minut s'activen, aproximat a les dècimes.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	

Solución:

Exercici 3

3.1.

Calculem primer la probabilitat que un seguidor del grup aconsegueixi comprar una entrada al web. Considerem els successos:

ES = "Obtenir entrada al sorteig",

W = "Intentar comprar-la al web",

EW = "Aconseguir entrada al web".

A partir de les dades de l'enunciat, tenim que

$$P(ES) = 0{,}16,$$

$$P(W) = (1 - 0{,}16) \cdot 6/7 = 0{,}72,$$

$$P(EW) = P(W) \cdot 0{,}25 = 0{,}18.$$

Per tant, en total el $16 + 18 = 34$ per cent dels seguidors d'aquest grup al municipi aconsegueixen entrada per al concert. Si el 16% dels seguidors corresponen a 24 persones, el 34% correspondran a:

$\frac{24}{16} = \frac{x}{34} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \cdot 3 = 51$ persones.

BY NC SA
Textos Marea Verde

3.2.

Sigui noE el succés "No tenir entrada per al concert". Ens demanen $P(W|noE)$. Per la llei de Bayes,

$$P(W|noE) = \frac{P(noE|W)P(W)}{P(noE)}.$$

De l'apartat anterior sabem que la probabilitat de tenir entrada és del 34%, per tant $P(noE) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$. Sabem també que $P(W) = 0{,}72$ i $P(noE|W) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Per tant,

$$P(W|noE) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}72}{0{,}66} \approx 0{,}82.$$

3.3. Tenim la funció polinòmica $S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90$, a l'interval $t \in [0, 5]$; òbviament és contínua, per ser polinòmica. L'enunciat ens demana si en algun moment $S(t)$ valdrà 100, és a dir,

$$-t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90 = 100.$$

Si considerem la nova funció $D(t) = S(t) - 100$, el problema es transforma en saber si $D(t) = 0$ en algun moment $t \in [0{,}5]$. Com que D també és contínua, i tenim que

$$D(0) = -10 < 0 \quad \text{i} \quad D(5) = 15 > 0,$$

es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano i, per tant, es pot afirmar que existeix un punt $c \in (0, 5)$ tal que $D(c) = 0$. Aproximem-lo amb una dècima de precisió:

$$D(2) = -30 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (2, 5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4) = -2 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4, 5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'5) = 6'85 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4, 4'5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'2) = 1'592 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4, 4'2) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'1) = -0'201 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4'1, 4'2) \text{ tal que } D(c) = 0.$$

Així doncs, els llums de la sala s'activaran aproximadament al cap de 4,1 minuts d'haver començat a sonar la cançó més famosa del grup.

Criteris de correcció: (3.1) Compteu 0,5 punts per calcular el percentatge de seguidors que obtenen entrada, i 0,25 punts pel nombre de persones que això representa. **(3.2)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i 0,5 pel càlcul de la probabilitat demanada. **(3.3)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i per comentar la continuïtat de la funció; 0,5 per la primera aplicació del teorema de Bolzano correctament raonada, i 0,25 punts per l'aproximació fins a una dècima.

Problema 4: OPCIÖN A

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

Solución:

Exercici 4

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10-x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r=\frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10-x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c=\frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2=\left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{10-x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{100-20x+x^2}{16}=\frac{(4+\pi)x^2-20\pi x+100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x)=\frac{(8+2\pi)x-20\pi}{16\pi}=0 \quad\longrightarrow\quad x=\frac{20\pi}{8+2\pi}\simeq 4{,}4\ m.$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x)=\frac{8+2\pi}{16\pi}>0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb $4{,}4\ m$ de barana i un tancat quadrat amb els $5{,}6\ m$ restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4{,}4)=\frac{(4+\pi)\cdot 4{,}4^2-20\pi\cdot 4{,}4+100\pi}{16\pi}\simeq 3{,}5\ m^2.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts per plantejar el perímetre de la circumferència; 0,25 punts pel perímetre del quadrat, i 0,5 punts per l'expressió de l'àrea total en funció d'una sola variable. Compteu 0,5 punts per la derivada i obtenció del punt crític; 0,5 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per la resposta final, incloent-hi les dues longituds i el valor de l'àrea mínima.

Textos Marea Verde

Problema 4: OPCIÓN B

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P, Q i R.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P, Q, R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels punts P, Q, R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR)\cdot\text{altura}}{3}$.)
[1 punt]

ació de l'apartat 4.3	

Solución:

OPCIÓ B.

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi\colon\ 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ, aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

i vector director $(2,-2,1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x-2y+z+D=0$, amb $2-2+1+D=0 \longrightarrow D=-1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x-2y+z-1=0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1+2\lambda)-2(-2\lambda)+(-1+\lambda)-1=0 \longrightarrow 9\lambda=0 \longrightarrow \lambda=0,$$

és el punt $(1,0,-1)$ (és casualitat que sigui P; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte). Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\text{Àrea}(PQR)=\frac{base\cdot\ alçada}{2}=\frac{d(P,Q)\cdot d(P,R)}{2}=\frac{3\cdot\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1+1)^2}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}\,u^2.$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{45}=\frac{3}{2}\sqrt{5}\,u^2.$$

4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P,Q,R,S és

$$Volum(PQRS)=\frac{\text{Àrea}(PQR)\cdot\ alçada}{3}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot d(S,\pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S=(x,y,z)$ al pla $\pi\colon 5x+4y-2z-7=0$ és

$$d(S,\pi)=\frac{|5x+4y-2z-7|}{\sqrt{5^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{|5x+4y-2z-7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P,Q,R,S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{|5x+4y-2z-7|}{3\sqrt{5}}}{3}=1,$$

$$5x+4y-2z-7=\pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π, d'equacions

$$5x+4y-2z-1=0, \qquad i \qquad 5x+4y-2z-13=0.$$

Criteris de correcció: (4.1) Compteu 0,75 punts pel càlcul de l'equació correcta del pla. **(4.2)** Compteu 0,5 punts pel càlcul de la base i l'alçada del triangle, i 0,25 per l'àrea. **(4.3)** Compteu 0,5 punts pel planteig i desenvolupament del problema; 0,25 per tractar correctament el valor absolut i 0,25 per les equacions dels dos plans finals.

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solución:

BY NC SA

Problema 2:

Solución:

BY NC SA

Problema 3:

Solución:

BY NC SA

Problema 4:

Solución:

BY NC SA

Problema 5:

Solución:

BY NC SA

Problema 6:

Solución:

BY NC SA

Problema 7:

Solución:

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S
Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Ejercicio 1A, (2,5 puntos):

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & a\\ 1 & 0 & a\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcula la inversa de la matriz $A-3I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) Para a=1 resuelve la ecuación matricial $A\,X-B=3\,X$

Ejercicio 1B , (2,5 puntos):

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ -3 & 2 & 2\\ -5 & a+4 & 2\end{pmatrix}$ donde a es un número real.

a) Encuentra los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a=0$, si es posible.

c) ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2A, (2,5 puntos):

Dada la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$

a) Determina sus máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Calcula $g(x)$ sabiendo que $g'(x)=f(x)$ y que $g(0)=1$.

Ejercicio 2B, (2,5 puntos):

Sean las funciones: $f(x)=-3x-5$ y $g(x)=(x+1)^2-2$.

a) Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto (0,2) y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa x=1 es paralela a la recta $f(x)$

b) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$

BY NC SA

Ejercicio 3A, (2,5 puntos):

Sean el plano π: $2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos A(1, 2, −1), B(2, 1, 0). Obtén de forma razonada:

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.
b) La ecuación de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.
c) La distancia entre el punto B y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Ejercicio 3B, (2,5 puntos):

Dada la recta $r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -t \end{cases}$ y dado el plano $\pi: mx + 3y - 4z + 6 = 0$,

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro m.
b) Para m = 2, calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) Para m = 0, halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

Ejercicio 4 (2,5 puntos):

Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.
b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
c) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
d) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

BY NC SA

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1A:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & a\\ 1 & 0 & a\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcula la inversa de la matriz $A-3I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) Para a=1 resuelve la ecuación matricial $A\,X-B=3\,X$

Solución:

a) Se cumple que $|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & a\\ 1 & 0 & a\\ a & 1 & 0\end{vmatrix}=a^2+a=a(a+1)=0\Leftrightarrow a=0 \text{ o } a=-1.$

Entonces *A* tiene inversa si y sólo si $a\neq 0,\ -1$

b) Se cumple que

$$|A-3\,I|=\begin{vmatrix}0-3 & 1 & 1\\ 1 & 0-3 & 1\\ 1 & 1 & 0-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-27+2+3+3+3=-16.$$

Entonces

$$(A-3\,I)^{-1}=\frac{1}{|A-3\,I|}\,adj(A-3\,I)^t=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}8 & 4 & 4\\ 4 & 8 & 4\\ 4 & 4 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

BY NC SA

c) Se cumple que:

$$A\,X - B = 3\,X \Leftrightarrow A\,X - 3\,X = (A - 3\,I)\,X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = (A - 3\,I)^{-1}\,B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(En la antepenúltima igualdad hemos utilizado el valor de la inversa hallado en el apartado a)

BY NC SA

Ejercicio 1B:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$ donde a es un número real.

a) Encuentra los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.
b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = 0$, si es posible.
c) ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Al ser un sistema cuadrado y homogéneo, tiene infinitas soluciones si y sólo si:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{vmatrix} = 4+10-3\,a\,(a+4)+10\,a-2\,(a+4)-6 = -3\,a^2-4\,a = -a\,(3\,a+4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ o } 3\,a+4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = -\frac{4}{3}$$

a = 0 o a = -4/3

b) Para $a = 0$, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -3\,x+2\,y+2\,z \\ -5\,x+4\,y+2\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ -3\,x+2\,y+2\,z=0 \\ -5\,x+4\,y+2\,z== \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=x \\ -3\,x+2\,y+2\,z=0 \\ -5\,x+4\,y+2\,z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=x \\ -3\,x+2\,x+2\,z=0 \\ -5\,x+4\,x+2\,z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=x \\ -x+2\,z=0 \\ -x+2\,z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=x \\ x=2\,z \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=2\,z \\ x=2\,z \end{matrix}\right\}$$

Dando el parámetro $z = \alpha$, nos queda que las soluciones son

$$x = 2\,\alpha,\ y = 2\,\alpha,\ z = \alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

c) El sistema es homogéneo por lo que siempre al menos tiene la solución trivial x= y = z = 0

Ejercicio 2A:

Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

a) Determina sus máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Calcula $g(x)$ sabiendo que $g'(x) = f(x)$ y que $g(0) = 1$.

Solución:

a) Se cumple que $f'(x) = \frac{e^x - (x+1)\,e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tenemos que:

$f'(x) = \frac{-x}{e^x} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f'(x) = \frac{-x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$,

por lo que si $x < 0$, $f'(x) > 0$ y *f* es estrictamente creciente, si $x > 0$, $f'(x) < 0$ y *f* es estrictamente decreciente, teniendo f un máximo relativo en 0.

Si $x < 0$, *f* es estrictamente creciente, si $x > 0$, *f* es estrictamente decreciente, teniendo *f* un máximo relativo en 0 con *f*(0) = 1.

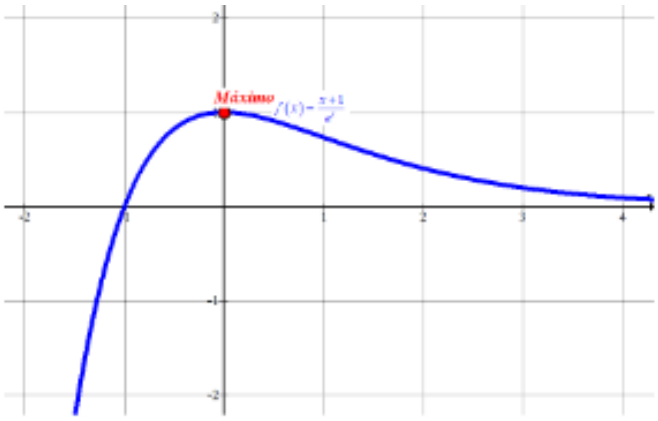
b) Como $g'(x) = f(x)$, se cumple que $g(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)\,e^{-x}\,dx$. Si llamamos:

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-x} \Rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$, se cumple que:

$\int (x+1)\,e^{-x}\,dx = -(x+1)\,e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+1)\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+2)\,e^{-x} + C$. Entonces:

$g(x) = \int (x+1)\,e^{-x}\,dx = -(x+2)\,e^{-x} + C$. Tenemos que $g(0) = -(0+2)\,e^{-0} + C = -2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$, por lo que

$$g(x) = -(x+2)\,e^{-x} + 3$$



Ejercicio 2B:

Sean las funciones: $f(x) = -3x - 5$ y $g(x) = (x+1)^2 - 2$.

a) Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto (0,2) y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa x=1 es paralela a la recta $f(x)$
b) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$

Solución:

a) Se cumple que $\boldsymbol{P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$ tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{(0,2)}$, por lo que:

$$\boldsymbol{P(0) = a\,0^3 + b\,0^2 + 0 + d = 2 \Longrightarrow d = 2, P'(0) = 0.}$$

Se tiene que:

$$\boldsymbol{P'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c \Longrightarrow P'(0) = c = 0}$$

Como la recta tangente a P en 1 es paralela a f, tenemos que $\boldsymbol{P'(1) = -3}$.

Se tiene que:

$$\boldsymbol{P'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c \Longrightarrow P'(1) = 3\,a + 2\,b = -3}\,.$$

Como $\boldsymbol{x = 1}$ es un punto de inflexión de P, $\boldsymbol{P''(1) = 0}$. Se tiene que:

$$\boldsymbol{P''(x) = 6\,a\,x + 2\,b \Longrightarrow P''(1) = 6\,a + 2\,b = 0 \Longrightarrow b = -\frac{6\,a}{2} = -3\,a.}$$

Sustituyéndolo en la ecuación anterior, tenemos que $\boldsymbol{3\,a + 2\,b = 3\,a - 6\,a = -3\,a = -3 \Longrightarrow a = 1}$, por lo que $\boldsymbol{b = -3\,a = -3}$ y el polinomio pedido es $\boldsymbol{P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = x^3 - 3\,x^2 + 2}$

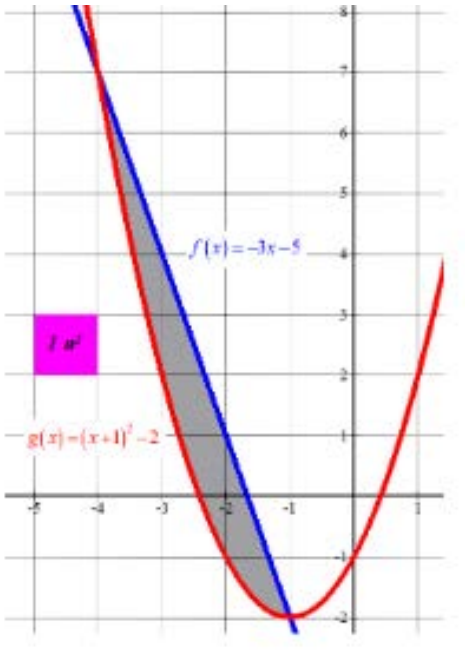
El polinomio es $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 3\,x^2 + 2.}$

b) Se cumple que los puntos de corte son:

$f(x) = -3\,x - 5 = g(x) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2\,x - 1 \Leftrightarrow$
$x^2 + 5\,x + 4 = (x+1)\,(x+4) = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow x = -4, x = -1$

Como $g(x)$ es una parábola con las ramas hacia arriba y $f(x)$ es una recta, se cumple que $f(x) \geq g(x)$ entre los puntos de corte. Por tanto:

$$A = \int_{-4}^{-1}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_{-4}^{-1} -3\,x - 5 - ((x+1)^2 - 2) =$$
$$\int_{-4}^{-1} -3\,x - 5 - (x^2 + 2\,x - 1) = \int_{-4}^{-1}(-x^2 - 5\,x - 4)\,dx =$$
$$\left[-\frac{x^3}{3} - 5\,\frac{x^2}{2} - 4\,x\right]_{-4}^{-1} =$$
$$= -\frac{(-1)^3}{3} - 5\,\frac{(-1)^2}{2} - 4\,(-1) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 5\,\frac{(-4)^2}{2} - 4\,(-4)\right]$$
$$= -21 - 12 + \frac{75}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$



El área del recinto es $\boldsymbol{4.5\ u^2}$.

BY NC SA

Ejercicio 3A:

Sean el plano π: $2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos A(1, 2, −1), B(2, 1, 0). Obtén de forma razonada:

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.
b) La ecuación de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.

c) La distancia entre el punto B y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Solución:

a) Como pasa por los puntos *A* y *B*, un vector director es $\boldsymbol{B - A = (2,1,0) - (1,2,-1) = (1,-1,1)}$.

Como es perpendicular a $\boldsymbol{\pi}$, otro vector director es el vector característico de $\boldsymbol{\pi}$, es decir $\boldsymbol{(2,1,-1)}$.

Por tanto, una ecuación paramétrica del plano pedido es:

$$\boldsymbol{(x,y,z) = A + \alpha\,(1,-1,1) + \beta\,(2,1,-1) = (1,2,-1) + \alpha\,(1,-1,1) + \beta\,(2,1,-1) =}$$

$$\boldsymbol{= (1+\alpha+2\beta, 2-\alpha+\beta, -1+\alpha-\beta) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1+\alpha+2\beta \\ y = 2-\alpha+\beta \\ z = -1+\alpha-\beta \end{matrix}\right\}}$$

Para obtener la ecuación implícita sumamos las dos últimas ecuaciones: $\boldsymbol{y + z = 1 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0}$

(Se puede hallar también con el determinante cuyas filas son $\boldsymbol{(x,y,z) - A}$ y los dos vectores directores)

El plano pedido es $\boldsymbol{y + z - 1 = 0}$.

b) Como *r* es perpendicular a π, el vector característico de π es un vector director de *r*, por lo que:

$\bar{v} = (2,1,-1)$ es un vector director de *r*, y entonces una ecuación paramétrica de *r* es:

$$(x,y,z) = A + \alpha\,(2,1,-1) = (1,2,-1) + \alpha\,(2,1,-1) = (1+2\,\alpha, 2+\alpha, -1-\alpha) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1+2\,\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = -1-\alpha \end{matrix}\right\},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

La recta pedida es $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x = 1+2\,\alpha} \\ \boldsymbol{y = 2+\alpha} \\ \boldsymbol{z = -1-\alpha} \end{matrix}\right\}, \boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$

c) Hallamos el plano *p* que pasa por *B* y es perpendicular a *s*. Como es perpendicular a *s*, el vector director de *s*, $(2,1,-1)$, es un vector característico del plano, luego *p* es $2\,x + y - z = C$. Para que pase por *B*: $2 \times 2 + 1 - 0 = C \Leftrightarrow C = 5$, luego *p* es $2\,x + y - z = 5$. Lo intersecamos con *s*:

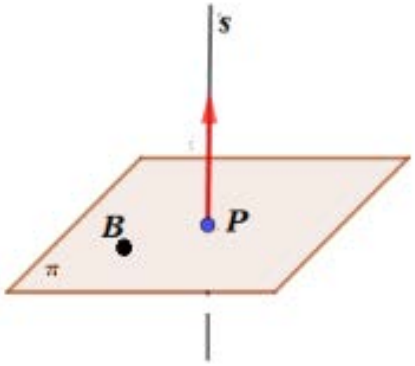
$$\left.\begin{matrix} 2\,x + y - z = 5 \\ y = \frac{x-1}{2} + 2 = \frac{x+3}{2} \\ z = \frac{1-x}{2} - 1 = \frac{-1-x}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\,x + y - z = 2\,x + \frac{x+3}{2} - \frac{-1-x}{2} = 3\,x + 2 = 5 \Rightarrow$$

BY NC SA

$\Rightarrow x = 1, y = \frac{1+3}{2} = 2, z = \frac{-1-1}{2} = -1$: $(1, 2, -1)$. Entonces:

$$d(B, s) = d\big((2,1,0),(1,2,-1)\big) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + \big(0-(-1)\big)^2} = \sqrt{3}$$

La distancia pedida es $\sqrt{3}$.



BY NC SA

Ejercicio 3B:

Dada la recta $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases}$ y dado el plano $\pi: mx+3y-4z+6=0$,

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro m.
b) Para m = 2, calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) Para m = 0, halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

Solución:

a) Intersecamos la recta con el plano:

$$\boldsymbol{m\,(2+t)+3\,(1-2\,t)-4\,(-t)+6=2\,m+m\,t+3-6\,t+4\,t+6=}$$

$$\boldsymbol{=2\,m+9+(m-2)\,t=0\Leftrightarrow t=\frac{3-2\,m}{m-2}}\ (\text{si } \boldsymbol{m\neq 2})$$

Entonces si $\boldsymbol{m\neq 2}$, hay una única solución por lo que r y $\boldsymbol{\pi}$ se cortan en un punto.

Si $\boldsymbol{m=2}$, queda $\boldsymbol{2\,(2+t)+3\,(1-2\,t)-4\,(-t)+6=4+2\,t+3-6\,t+4\,t+6=13\neq 0}$,luego no hay intersección y la recta es paralela al plano.

Si $\mathbf{m\neq 2}$ r y $\boldsymbol{\pi}$ se cortan en un punto, si $\mathbf{m=2}$ r y $\boldsymbol{\pi}$ son paralelos.

b) Como el plano contiene a *r*, ha de contener a un punto por el que pasa, $\boldsymbol{P=(2,1,0)}$, y a su vector director $\boldsymbol{(1,-2,-1)}$ (coeficientes de *t*).

Como es perpendicular a $\boldsymbol{\pi}$, el vector característico de $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{(2,3,-4)}$, es otro vector director del plano, luego una ecuación paramétrica del plano pedido es:

$$\boldsymbol{(x,y,z)=(2,1,0)+\alpha\,(1,-2,-1)+\beta\,(2,3,-4)=\ (2+\alpha+2\,\beta,1-2\,\alpha+3\,\beta,-\alpha-4\,\beta)}$$

La ecuación implícita sería:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=8\,(x-2)-2\,(y-1)+3\,z+4\,z+3\,(x-2)+4\,(y-1)=$$

$$=11\,x+2\,y+7\,z-24=0$$

La ecuación del plano pedido es $\mathbf{11\,x+2\,y+7\,z-24=0}$.

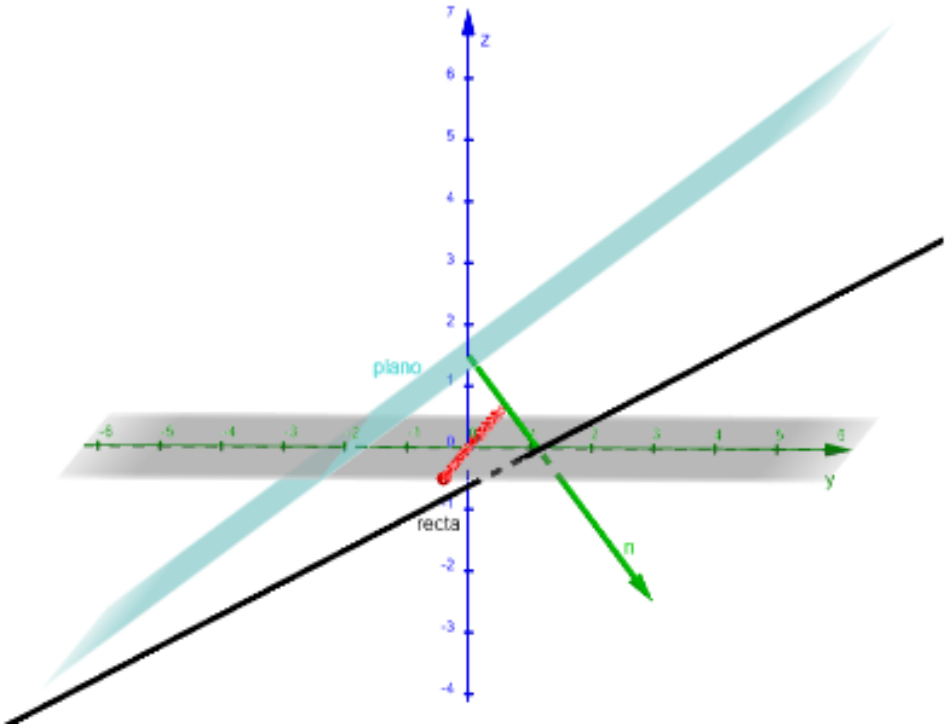
BY NC SA

c) Para $m=0$ el plano tiene ecuación $\pi: 3y-4z+6=0$ y por lo estudiado en el apartado a) sabemos que la recta r es secante con el plano.
Hallamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_r}=(1,-2,-1)\\ \overline{n}=(0,3,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overline{v_r},\overline{n}\right)=\frac{\overline{v_r}\cdot\overline{n}}{\left|\overline{v_r}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}=\frac{(1,-2,-1)(0,3,-4)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}}=$$

$$=\frac{0-6+4}{\sqrt{6}\sqrt{25}}=\frac{-2}{5\sqrt{6}}\Rightarrow \boxed{\left(\overline{v_r},\overline{n}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-2}{5\sqrt{6}}\right)=99.4^\circ}$$

Para $m=0$ el ángulo que determinan la recta y el plano tiene un valor aproximado de $99.4^\circ - 90^\circ = 9.4^\circ$.



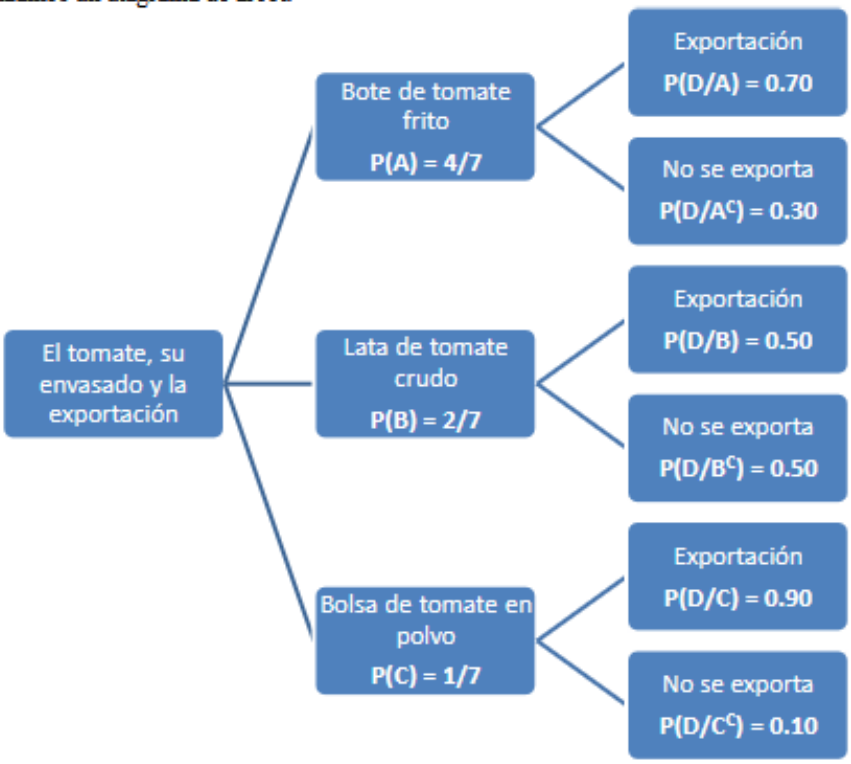
Ejercicio 4:

Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.
b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
c) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
d) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

Solución:

Llamamos A al suceso "el producto es un bote de tomate frito", B a "el producto es una lata de tomate crudo", C a "el producto es una bolsa de tomate en polvo" y D a "el producto se dedica a la exportación"
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot 0.7+\frac{2}{7}\cdot 0.5+\frac{1}{7}\cdot 0.9=\boxed{\frac{47}{70}=0.6714}$$

BY NC SA

b) Nos piden calcular $P(B/D^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D^c)=\frac{P(B\cap D^c)}{P(D^c)}=\frac{P(B)P(D^c/B)}{1-P(D)}=\frac{\frac{2}{7}\cdot 0.5}{1-\frac{47}{70}}=\boxed{\frac{10}{23}=0.4348}$$

c) Nos piden calcular $P(A\cap D)$.

$$P(A\cap D)=P(A)P(D/A)=\frac{4}{7}\cdot 0.7=\boxed{\frac{2}{5}=0.40}$$

d) Debemos calcular $P(A\cup D)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)=\frac{4}{7}+\frac{47}{70}-\frac{2}{5}=\boxed{\frac{59}{70}=0.8429}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos.

Suponemos que hay 700 productos. Cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito., por lo que $\frac{4}{7}\cdot 700=400$ productos son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo, por lo que $\frac{2}{7}\cdot 700=200$ productos son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo, es decir $700-400-200=100$ bolsas de tomate en polvo.

Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito ($0.70\cdot 400=280$ botes de tomate frito se exportan), el 50% del tomate crudo ($0.50\cdot 200=100$ latas de tomate crudo se exportan) y el 90% del concentrado de tomate en polvo ($0.90\cdot 100=90$ bolsas de tomate en polvo se exportan).

Colocamos todos estos datos en una tabla para tenerlos más organizados.

	Tomate frito	Tomate crudo	Tomate polvo	TOTALES
Se exportan	280	100	90	
No se exportan				
TOTALES	400	200	100	700

Completamos la tabla.

	Tomate frito	Tomate crudo	Tomate polvo	TOTALES
Se exportan	280	100	90	470
No se exportan	120	100	10	230
TOTALES	400	200	100	700

Aplicamos la regla de Laplace para responder a las preguntas planteadas.

BY NC SA

a) De los 700 productos se exportan un total de 470, por lo que la probabilidad de que al elegir un producto al azar este sea destinado a la exportación vale $\frac{470}{700}=\frac{47}{70}$.

b) De los 230 productos que no se exportan 100 son latas de tomate crudo, por lo que la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación vale $\frac{100}{230}=\frac{10}{23}$.

c) De los 700 productos solo 280 son botes de tomate frito destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte vale $\frac{280}{700}=\frac{2}{5}$

.

d) De los 700 productos hay 400 que son tomate frito, 100 son latas de tomate crudo destinadas a la exportación y 90 son bolsas de tomate en polvo destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte vale $\frac{400+100+90}{700}=\frac{590}{700}=\frac{59}{70}$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Problema 1:

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) **a) 0,75 puntos** **b) 1 punto** **c) 0,75 puntos**

Dadas las matrices: $A=\begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^tB=C$

b) Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A\cdot C$ y calcular la inversa de $A\cdot C$ para el caso $k=0$.

c) Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2=B-I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) **a) 1,5 puntos** **b) 1 punto**

Dado el sistema $\begin{cases} kx+2y-z=3k \\ 2x+ky-2z=6 \\ x-y+z=k \end{cases}$

a) Discute dicho sistema según los valores del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para el valor $k=3$.

Problema 2:

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) **a) 1,25 puntos** **b) 1,25 puntos**

Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)*.

b) Calcula una primitiva de la función $g(x)=(x^2-3x)\cdot e^x$ que pase por el punto P(0,1).

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) **a) 1,25 puntos** **b) 1,25 puntos**

a) Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3-2x^2+2x-2=0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.

b) Dada la función $g(x)=-x^2+2x+2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones *g(x)* y *g´(x)*.

Problema 3:

EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) **a) 1 punto** **b) 0,75 puntos** **c) 0.75 puntos**

Dados los puntos A(4, 3, 3), B(3, 3, 4), C(1, 0, 4) y D(4,0,1),

a. Justifica de forma razonada que los puntos A, B, C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.

b. Calcula el valor de k para que el punto $P(7,k,2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C.

c. Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C.

BY NC SA

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) **a) 0,5 puntos** **b) 1,5 puntos** **c) 0,5 puntos**

Dados los planos $\pi_1 : x+ky-3z-6=0$, $\pi_2 : 2x-y-5=0$ y el punto $A(2,3,-4)$:

a) Calcula el valor de "k" para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para $k=2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1.

c) Para $k=2$, calcula la distancia del punto A al plano

Problema 4:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos) **a) 1 punto** **b) 0,5 puntos** **c) 1 punto**

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

a) ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?

b) Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?

c) ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1.A

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) **a) 0,75 puntos** **b) 1 punto** **c) 0,75 puntos**

Dadas las matrices: $A=\begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^tB=C$

b) Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A\cdot C$ y calcular la inversa de $A\cdot C$ para el caso $k=0$.

c) Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2=B-I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$A^tB=C\Rightarrow\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} k^2-1 & k \\ -k & -1 \\ k-k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} k^2-1=0\rightarrow k^2=1\rightarrow k=\sqrt{1}=\pm1 \\ k=1 \\ -k=-1\rightarrow k=1 \end{cases}\Rightarrow\boxed{k=1}$$

Para que se cumpla la igualdad debe ser $k=1$.

b) Hallamos la expresión de la matriz $A\cdot C$.

$$A\cdot C=\begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1+0 & k+1+1 \\ 0+0+0 & 1+0+k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa de $A\cdot C$ su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A\cdot C|=\begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{vmatrix}=k+1 \qquad |A\cdot C|=0\Rightarrow k+1=0\Rightarrow\boxed{k=-1}$$

Existe la inversa de $A\cdot C$ para cualquier valor de k distinto de -1.

Para $k=0$ la matriz queda $A\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$|A\cdot C|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0$$

BY NC SA

$$(A\cdot C)^{-1}=\frac{Adj\left((A\cdot C)^{T}\right)}{|A\cdot C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Para $k=0$ la matriz inversa de $A\cdot C$ es $(A\cdot C)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$.

c) Averiguamos cuando se cumple la igualdad $B^2=B-I$.

$$B^2=B-I\Rightarrow\begin{pmatrix}k&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&1\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}k^2-1&k\\-k&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\bullet\, k^2-1=k-1\rightarrow k^2-k=0\rightarrow\\ \quad\rightarrow k(k-1)=0\rightarrow\begin{cases}k=0\\k=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{k=1}\\ \bullet\, k=1\\ \bullet\, -k=-1\rightarrow k=1\end{cases}$$

La igualdad se cumple para $k=1$.

BY NC SA

Problema 1.B

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) **a) 1,5 puntos** **b) 1 punto**

Dado el sistema $\begin{cases} kx+2y-z=3k \\ 2x+ky-2z=6 \\ x-y+z=k \end{cases}$

a) Discute dicho sistema según los valores del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para el valor $k=3$.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 3k \\ 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-4+2+k-4-2k=k^2-k-6$$

$$|A|=0\Rightarrow k^2-k-6=0\Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}\frac{1+5}{2}=\boxed{3=k}\\ \frac{1-5}{2}=\boxed{-2=k}\end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq-2$ y $k\neq3$

En este caso el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=-2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 2^a+\text{Fila } 1^a\\ 2\quad -2\quad -2\quad 6\\ -2\quad 2\quad -1\quad -6\\ \hline 0\quad 0\quad -3\quad 0\end{matrix}\rightarrow\text{Nueva fila } 2^a\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}2\cdot\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a\\ 2\quad -2\quad 2\quad -4\\ -2\quad 2\quad -1\quad -6\\ \hline 0\quad 0\quad 1\quad -10\end{matrix}\rightarrow\text{Nueva fila } 3^a\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot\text{Fila } 3^{\text{ª}}+\text{Fila } 2^{\text{ª}}\\ 0\quad 0\quad 3\quad -30\\ 0\quad 0\quad -3\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad -30\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{-2 & 2 & -1 & -6}^{A/B}\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -30\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. $k=3$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc}3 & 2 & -1 & 9\\ 2 & 3 & -2 & 6\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\cdot\text{Fila } 2^{\text{ª}}-2\cdot\text{Fila } 1^{\text{ª}}\\ 6\quad 9\quad -6\quad 18\\ -6\quad -4\quad 2\quad -18\\ \hline 0\quad 5\quad -4\quad 0\rightarrow\text{Nueva fila } 2^{\text{ª}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot\text{Fila } 3^{\text{ª}}-\text{Fila } 1^{\text{ª}}\\ 3\quad -3\quad 3\quad 9\\ -3\quad -2\quad 1\quad -9\\ \hline 0\quad -5\quad 4\quad 0\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}3 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 5 & -4 & 0\\ 0 & -5 & 4 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}}+\text{Fila } 2^{\text{ª}}\\ 0\quad -5\quad 4\quad 0\\ 0\quad 5\quad -4\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{3 & 2 & -1 & 9}^{A/B}\\ 0 & 5 & -4 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $k=3$ (caso 3) el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos sus infinitas soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{3 & 2 & -1 & 9}^{A/B}\\ 0 & 5 & -4 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+2y-z=9\\ 5y-4z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+2y-z=9\\ 5y=4z\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+2y-z=9\\ y=\frac{4}{5}z\end{array}\right.\Rightarrow 3x+2\frac{4}{5}z-z=9\Rightarrow 3x+\frac{8-5}{5}z=9\Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow 3x = 9 - \frac{3}{5}z \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{5}z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

BY NC SA

Problema 2.A:

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) **a) 1,25 puntos** **b) 1,25 puntos**

Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)*.

b) Calcula una primitiva de la función $g(x)=\left(x^2-3x\right)\cdot e^x$ que pase por el punto P(0,1).

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
El dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x(x-1)-1\cdot e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow e^x(x-2)=0\Rightarrow\{e^x\neq 0\}\Rightarrow\boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x=2$ y del valor excluido del dominio $x=1$.

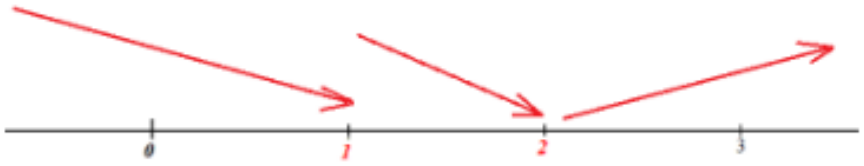
- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{e^0(0-2)}{(0-1)^2}=-2<0$.

  La función decrece en $(-\infty,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale

  $f'(1.5)=\dfrac{e^{1.5}(1.5-2)}{(1.5-1)^2}=\dfrac{-0.5e^{1.5}}{0.25}<0$. La función decrece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{e^3(3-2)}{(3-1)^2}=\dfrac{e^3}{4}>0$.

  La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty,1)\cup(1,2)$ y crece en $(2,+\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2)=\dfrac{e^2}{2-1}=e^2$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(2,e^2\right)$.

BY NC SA

c) Calculamos la integral indefinida de la función *g(x)*.

$$\int g(x)dx = \int (x^2-3x)\cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2-3x \to du = 2x-3dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2-3x)e^x - \int (2x-3)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x-3 \to du = 2dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2-3x)e^x - \left[(2x-3)e^x - \int 2e^x dx \right] = (x^2-3x)e^x - (2x-3)e^x + 2e^x =$$

$$= (x^2-3x-2x+3+2)e^x = \boxed{(x^2-5x+5)e^x + K}$$

La primitiva de la función *g(x)* es $G(x) = (x^2-5x+5)e^x + K$. Hallamos el valor de K para que $G(0)=1$.

$$\left. \begin{array}{l} G(0)=1 \\ G(x) = (x^2-5x+5)e^x + K \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = (0^2-5\cdot 0+5)e^0 + K \Rightarrow 1 = 5+K \Rightarrow \boxed{K=-4}$$

La primitiva de $g(x) = (x^2-3x)\cdot e^x$ que pasa por el punto P(0,1) tiene la expresión $G(x) = (x^2-5x+5)e^x - 4$.

Problema 2.B:

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) **a) 1,25 puntos** **b) 1,25 puntos**

a) Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3-2x^2+2x-2=0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.

b) Dada la función $g(x)=-x^2+2x+2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones *g(x)* y *g´(x)*.

Solución:

a) Consideramos la función $f(x)=x^3-2x^2+2x-2$. Esta función es polinómica y por tanto es continua. Tenemos que $f(1)=1^3-2\cdot1^2+2\cdot1-2=-1<0$ y $f(2)=2^3-2\cdot2^2+2\cdot2-2=2>0$. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$.
Para aproximar la solución a las décimas valoramos la función en distintos valores entre 1 y 2.

$$f(1.2)=1.2^3-2\cdot1.2^2+2\cdot1.2-2=-0.752<0$$
$$f(1.5)=1.5^3-2\cdot1.5^2+2\cdot1.5-2=-0.125<0$$
$$f(1.6)=1.6^3-2\cdot1.6^2+2\cdot1.6-2=0.176>0$$

La función $f(x)=x^3-2x^2+2x-2$ en el intervalo $(1.5,1.6)$ es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Aplicando de nuevo el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c\in(1.5,1.6)$ tal que $f(c)=0$.
La solución de la ecuación $x^3-2x^2+2x-2=0$ tiene un valor entre 1.5 y 1.6.
Comprobamos que esta solución es única.
Si existiese otro valor d tal que $f(d)=0$ podríamos considerar la función $f(x)=x^3-2x^2+2x-2$ que es continua en $[c,d]$ y derivable en (c,d), como además $f(c)=f(d)$ aplicando el teorema de Rolle debe existir un $p\in(c,d)$ tal que $f'(p)=0$.
Comprobamos que esto no es posible.

$$f(x)=x^3-2x^2+2x-2\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-4x+2=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{6}=\text{¡No existe!}$$

No existe ningún valor que anule la derivada y esa segunda solución de $x^3-2x^2+2x-2=0$ no existe. La solución es única teniendo un valor entre 1.5 y 1.6.

b) Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones *g(x)* y *g´(x)*.

$$\left.\begin{matrix}g(x)=-x^2+2x+2\\ g'(x)=-2x+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow -x^2+2x+2=-2x+2\Rightarrow -x^2+4x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-4=0\rightarrow\boxed{x=4}\end{cases}$$

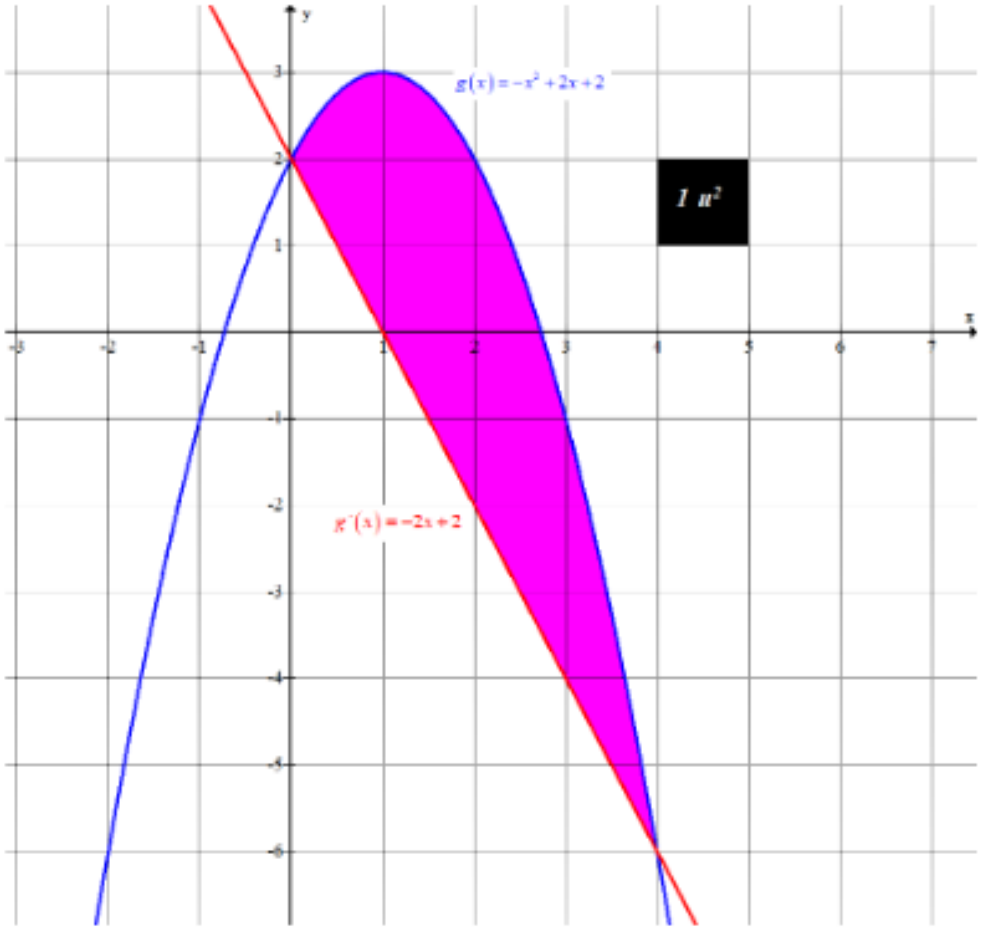
BY NC SA

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones *g(x)* y *g´(x)* se obtiene con el valor absoluto de la integral definida de 0 a 4 de la diferencia de las dos funciones *g(x)* y *g´(x)*.

$$\int_0^4 g(x)-g'(x)dx=\int_0^4 -x^2+2x+2-(-2x+2)dx=\int_0^4 -x^2+4xdx=$$

$$=\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=\left[\frac{-4^3}{3}+2\cdot 4^2\right]-\left[\frac{-0^3}{3}+2\cdot 0^2\right]=\frac{-64}{3}+32=\frac{32}{3}\simeq 10.66\ u^2$$

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones *g(x)* y *g´(x)* tiene un valor de $\frac{32}{3}=10.66$ unidades cuadradas.



Problema 3.A:

EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) **a) 1 punto** **b) 0,75 puntos** **c) 0.75 puntos**

Dados los puntos A(4, 3, 3), B(3, 3, 4), C(1, 0, 4) y D(4,0,1),

a. Justifica de forma razonada que los puntos A, B, C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.

b. Calcula el valor de k para que el punto $P(7,k,2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C.

c. Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C.

Solución:

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} A(4,\ 3,\ 3)\in\pi \\ B(3,\ 3,\ 4)\in\pi \\ C(1,\ 0,\ 4)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,3,4)-(4,3,3)=(-1,0,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,0,4)-(4,3,3)=(-3,-3,1) \\ C(1,\ 0,\ 4)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -3y+3(z-4)+y+3(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y+3z-12+y+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi:3x-2y+3z-15=0}$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi:3x-2y+3z-15=0 \\ ¿D(4,0,1)\in\pi? \end{array}\right\}\Rightarrow ¿3\cdot 4-2\cdot 0+3\cdot 1-15=0?\Rightarrow ¿12+3-15=0?\Rightarrow ¡¡SI!!$$

Los cuatro puntos pertenecen al plano de ecuación $\pi:3x-2y+3z-15=0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y C.

$$\left.\begin{array}{l} A(4,3,3)\in r \\ C(1,0,4)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\overrightarrow{AC}=(-3,-3,1) \\ C(1,0,4)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases}}$$

Obtenemos el valor de k para que la recta pase por el punto P.

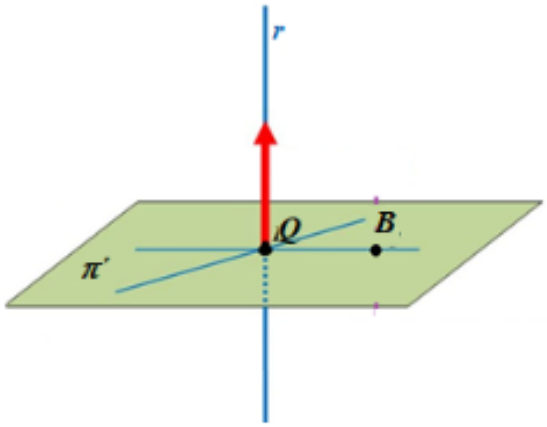
$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases} \\ P(7,k,2)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} 7=1-3\lambda\rightarrow 6=-3\lambda\rightarrow\lambda=-2 \\ k=-3\lambda \\ 2=4+\lambda\rightarrow\lambda=-2 \end{cases}\Rightarrow \boxed{k=-3(-2)=6}$$

Para $k=6$ el punto P pertenece a la recta que pasa por los puntos A y C.

BY NC SA

c) Hallamos la distancia pedida hallando primero el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{n'}=\overline{v_r}=(-3,-3,1)\\ B(3,3,4)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi':-3x-3y+z+D=0\\ B(3,3,4)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot 3-3\cdot 3+4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9-9+4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14+D=0\Rightarrow D=14\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi':-3x-3y+z+14=0}$$

Hallamos el punto Q de corte del plano hallado con la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}\pi':-3x-3y+z+14=0\\ r:\begin{cases}x=1-3\lambda\\ y=-3\lambda\\ z=4+\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -3(1-3\lambda)-3(-3\lambda)+4+\lambda+14=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+9\lambda+9\lambda+4+\lambda+14=0\Rightarrow 19\lambda+15=0\Rightarrow \lambda=\frac{-15}{19}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-3\dfrac{-15}{19}=\dfrac{64}{19}\\ y=-3\dfrac{-15}{19}=\dfrac{45}{19}\\ z=4-\dfrac{15}{19}=\dfrac{61}{19}\end{cases}\Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{64}{19},\frac{45}{19},\frac{61}{19}\right)}$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C es el módulo del vector que une los puntos B y Q.

$$\left.\begin{array}{l}Q\left(\dfrac{64}{19},\dfrac{45}{19},\dfrac{61}{19}\right)\\ B(3,3,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{BQ}=\left(\frac{64}{19},\frac{45}{19},\frac{61}{19}\right)-(3,3,4)=\left(\frac{7}{19},\frac{-12}{19},\frac{-15}{19}\right)$$

$$d(B,r)=\left|\overline{BQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{19}\right)^2+\left(\frac{-12}{19}\right)^2+\left(\frac{-15}{19}\right)^2}=\frac{\sqrt{418}}{19}\simeq 1.08\,u$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C vale $\dfrac{\sqrt{418}}{19}\simeq 1.08$ unidades.

BY NC SA

Problema 3.B:

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) **a) 0,5 puntos** **b) 1,5 puntos** **c) 0,5 puntos**

Dados los planos $\pi_1 : x+ky-3z-6=0$, $\pi_2 : 2x-y-5=0$ y el punto $A(2,3,-4)$:

a) Calcula el valor de "k" para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para $k=2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1.

c) Para $k=2$, calcula la distancia del punto A al plano

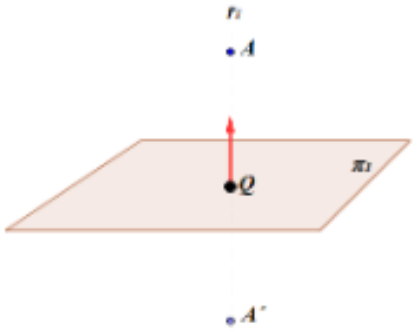
Solución:

a) Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares sus vectores normales deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x+ky-3z-6=0 \rightarrow \vec{n_1}=(1,k,-3)\\ \pi_2 : 2x-y-5=0 \rightarrow \vec{n_2}=(2,-1,0)\\ \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0\end{array}\right\} \Rightarrow (1,k,-3)(2,-1,0)=0 \Rightarrow 2-k=0 \Rightarrow \boxed{k=2}$$

Para $k=2$ los planos son perpendiculares.

b) Para $k=2$ la ecuación del plano π_1 queda $\pi_1 : x+2y-3z-6=0$.



Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene el punto A. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1 : x+2y-3z-6=0 \rightarrow \vec{n_1}=(1,2,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l}A(2,3,-4)\in r_1\\ \vec{v_1}=\vec{n_1}=(1,2,-3)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r_1 : \begin{cases}x=2+\lambda\\ y=3+2\lambda\\ z=-4-3\lambda\end{cases}}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta con el plano π_1.

$$\left.\begin{array}{l}r_1 : \begin{cases}x=2+\lambda\\ y=3+2\lambda\\ z=-4-3\lambda\end{cases}\\ \pi_1 : x+2y-3z-6=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda+2(3+2\lambda)-3(-4-3\lambda)-6=0 \Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow 2+\lambda+6+4\lambda+12+9\lambda-6=0\Rightarrow 14+14\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=-1\Rightarrow \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=3-2=1 \\ z=-4+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1,1,-1)}$$

El punto simétrico A´ se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ}=(1,1,-1)-(2,3,-4)=(-1,-2,3)$$

$$A'=A+\overrightarrow{AQ}=(1,1,-1)+(-1,-2,3)=(0,-1,2)$$

El simétrico del punto A respecto del plano π_1 tiene coordenadas $A'(0,-1,2)$.

c) La distancia del punto A al plano es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$d(A,\pi_1)=\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

La distancia del punto A al plano π_1 tiene un valor de $\sqrt{14}$ unidades.

BY NC SA

Problema 4:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos) **a) 1 punto** **b) 0,5 puntos** **c) 1 punto**

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

a) ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?

b) Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?

c) ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

Solución:

a) Llamamos A a "la canción es de Extremoduro", B a "la canción es de Robe" y C a "el fan se sabe la letra de la canción".
Por la información proporcionada y suponiendo que todos los discos tienen el mismo número de canciones sabemos que:

$$P(A)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=0.75;\ P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0.25;\ P(C/A)=0.70 \text{ y } P(C/B)=0.80$$

Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(B)P(C/B)=0.75\cdot 0.7+0.25\cdot 0.8=\boxed{0.725}$$

La probabilidad de que el fan conozca la letra de la canción elegida al azar vale 0.725.

b) Debemos calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C/A)}{P(C)}=\frac{0.75\cdot 0.7}{0.725}=\boxed{\frac{21}{29}=0.7241}$$

La probabilidad de que la canción que suena cuya letra sabe el fan sea de Extremoduro vale $\frac{21}{29}=0.7241$.

c) Nos piden calcular $P(B\cup\overline{C})$.

$$P(B\cup\overline{C})=P(B)+P(\overline{C})-P(B\cap\overline{C})=P(B)+1-P(C)-P(B)P(\overline{C}/B)=$$

$$=P(B)+1-P(C)-P(B)\left[1-P(C/B)\right]=P(B)+1-P(C)-P(B)+P(B)P(C/B)=$$

$$=1-P(C)+P(B)P(C/B)=1-0.725+0.25\cdot 0.8=\boxed{0.475}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Supongamos que todos los discos tienen el mismo número de canciones y que todos llevan 10 canciones. Serían 120 canciones de Extremoduro y 40 de Robe.
El fan se sabe la letra del 70% de las canciones de Extremoduro, es decir, se sabe la letra de $0.7\cdot 120 = 84$ canciones de Extremoduro.

El fan se sabe la letra del 80% de las canciones de Robe, es decir, se sabe la letra de $0.8 \cdot 40 = 32$ canciones de Robe.
Hacemos una tabla con los datos proporcionados.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84		120
Canción de Robe	32		40

Completamos la tabla.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84	36	120
Canción de Robe	32	8	40
	116	44	160

a) De las 160 canciones el fan se sabe la letra de 116. La probabilidad de que al elegir una canción al azar el fan se sepa la letra vale $\frac{116}{160} = 0.725$.

b) El fan sabe la letra de 116 canciones y de estas 84 son de Extremoduro. La probabilidad de que la canción que suena y de la cual sabe la letra el fan sea de Extremoduro vale $\frac{84}{116} = \frac{21}{29} = 0.7241$.

c) De las 160 canciones hay 40 de su etapa en solitario y 36 de su etapa en Extremoduro cuya letra no se sabe el fan. La probabilidad de que la canción elegida sea de su etapa en solitario o no la sepa el fan vale $\frac{40+36}{160} = 0.475$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Luis Bóveda

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2 PUNTOS)

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.
(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$, $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y. Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

Problema 2: ÁLGEBRA. (2 PUNTOS).

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.
2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2? Obtenga X, simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = (1 \quad 1)$, $B = I$ y $C = (0 \quad 0)$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

BY NC SA

Problema 3: ANÁLISIS. (4 PUNTOS).

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b), y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$.
b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
d) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Problema 4: GEOMETRÍA. (2 PUNTOS). Responda uno de los apartados

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P', siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r.
4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P, Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.
4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.
(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$, $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y. Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

Solución:

1.1. Explicación de sucesos/variables y cálculo de la probabilidad de retraso significativo

Definición de sucesos y variables:

I: Suceso de que se active el protocolo por incidencia meteorológica en un día de la temporada invernal.

$\bar{I}$: Suceso de que no se active el protocolo por incidencia meteorológica (el viaje transcurre en condiciones operativas habituales).

R: Suceso de que el tren Alvia experimente un "retraso significativo" según los criterios de la compañía.

X: Variable aleatoria que mide el tiempo de viaje (en minutos) en un día sin incidencias ($\bar{I}$). Sigue una distribución normal con media de 765 minutos y desviación típica de 18 minutos: $X \sim N(765,18)$.

Y: Variable aleatoria que mide el tiempo de viaje (en minutos) en un día con incidencias meteorológicas (I). Sigue una distribución normal con media de 810 minutos y desviación típica de 40 minutos: $Y \sim N(810,40)$.

Datos de probabilidad iniciales:

Probabilidad de incidencia: $P(I)=30\%=0.3$

BY NC SA

Probabilidad de no incidencia: $P(\bar{I})$=1-0.3=0.7

Umbral de retraso sin incidencia: $P(R|\bar{I})=P(X>780)$

Umbral de retraso con incidencia: $P(R|I)=P(Y>840)$

Paso 1: Cálculo de las probabilidades condicionadas (Tipificación)

Para calcular estas probabilidades con la variable normal estándar $Z \sim N(0,1)$, restamos la media y dividimos entre la desviación típica de cada caso:

- **Días sin incidencia ($\bar{I}$):**

$$P(R|\bar{I})=P(X>780)=P\left(\frac{X\text{-}765}{18}>\frac{780\text{-}765}{18}\right)=P\left(Z>\frac{15}{18}\right)=P(Z>0.83)$$

$$P(Z>0.83)=1\text{-}P(Z\leq 0.83)=1\text{-}0.7967=0.2033$$

- **Días con incidencia (I):**

$$P(R|I)=P(Y>840)=P\left(\frac{Y\text{-}810}{40}>\frac{840\text{-}810}{40}\right)=P\left(Z>\frac{30}{40}\right)=P(Z>0.75)$$

$$P(Z>0.75)=1\text{-}P(Z\leq 0.75)=1\text{-}0.7734=0.2266$$

Paso 2: Aplicación del Teorema de la Probabilidad Total

Para hallar la probabilidad global de que el tren sufra un retraso significativo ($P(R)$) en la temporada invernal, combinamos ambas situaciones:

$$P(R)=P(\bar{I})\cdot P(R|\bar{I})+P(I)\cdot P(R|I)$$

$$P(R)=(0.7\cdot 0.2033)+(0.3\cdot 0.2266)$$

$$P(R)=0.14231+0.06798=0.21029$$

Resultado 1.1: La probabilidad de que un día cualquiera de la temporada de invierno el tren Alvia sufra un retraso significativo es de 0.2103 (o un 21.03%).

BY NC SA

1.2. Probabilidad de viaje inferior a 765 minutos en un día con incidencia activa

Nos piden calcular la probabilidad de que el tiempo de viaje sea menor que 765 minutos bajo la condición de incidencia activa (es decir, trabajando con la variable Y):

$$P(Y<765)$$

Tipificamos utilizando los parámetros correspondientes a los días con protocolo meteorológico activado

($Y \sim N(810,40)$):

$$P(Y<765)=P\left(\frac{Y\text{-}810}{40}<\frac{765\text{-}810}{40}\right)=P\left(Z<\frac{\text{-}45}{40}\right)=P(Z<\text{-}1.125)$$

Por la propiedad de simetría de la campana de Gauss:

$$P(Z<\text{-}1.125)=P(Z>1.125)=1\text{-}P(Z \leq 1.125)$$

Consultando los valores proporcionados en el enunciado ($P(Z \leq 1.125)=0.8697$):

$$P(Y<765)=1\text{-}0.8697=0.1303$$

Resultado 1.2: La probabilidad de que el tren complete su viaje en menos de 765 minutos en un día con incidencia activa es de 0.1303 (o un 13.03%).

Problema 2:

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X-I)B=C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.
2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2? Obtenga X, simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A=(1 \quad 1)$, $B=I$ y $C=(0 \quad 0)$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases}(m-4)x & & + & 5z & = & 9,\\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8,\\ (m-4)x & + & (m-1)y & + & 7z & = & m+9.\end{cases}$$

Solución:

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA

2.1. Igualdad matricial

2.1.1. Despejar X en la expresión A(X-I)B=C

Asumiendo que A y B son matrices cuadradas e invertibles, procedemos a despejar X multiplicando por sus matrices inversas en el orden correcto:

1. Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A(X-I)B=A^{-1}\cdot C \Longrightarrow (X-I)B=A^{-1}C$$

1. Multiplicamos por la derecha por B^{-1}:

$$(X-I)B\cdot B^{-1}=A^{-1}C\cdot B^{-1} \Longrightarrow X-I=A^{-1}CB^{-1}$$

2. Sumamos la matriz identidad (I) en ambos lados:

$$\boldsymbol{X=A^{-1}CB^{-1}+I}$$

2.1.2. Análisis de dimensiones y resolución del caso particular

Análisis de dimensiones: Si A y C son matrices de dimensión 1×2 y $B=I$ (matriz identidad), la igualdad queda simplificada como:

$$A(X-I)=C$$

Para que el producto de la matriz A (1×2) por la matriz $(X-I)$ sea viable, el número de filas de $(X-I)$ debe ser de **2**.

El enunciado define a X como una matriz cuadrada, por lo que $(X\text{-}I)$ también conserva el formato cuadrado. Al tener 2 filas, obligatoriamente tendrá 2 columnas (2×2). Por tanto, X **tiene dimensiones** 2×2.

Dado que el producto opera de manera consistente en este entorno algebraico y $B=I$ actúa de elemento neutro por la derecha, B **se establece como la matriz identidad de orden** 2×2.

Resolución del caso particular: Buscamos una matriz X simétrica cuyas componentes de la diagonal sumen 0 (traza igual a 0). La definimos formalmente de la siguiente manera:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & \text{-}x_1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el término $(X\text{-}I)$:

$$X\text{-}I=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & \text{-}x_1 \end{pmatrix}\text{-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\text{-}1 & x_2 \\ x_2 & \text{-}x_1\text{-}1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices dados, $A=(1 \quad 1)$ y $C=(0 \quad 0)$:

$$(1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1\text{-}1 & x_2 \\ x_2 & \text{-}x_1\text{-}1 \end{pmatrix}=(0 \quad 0)$$

Efectuamos el producto de la fila por cada columna:

$$(1 \cdot (x_1\text{-}1)+1 \cdot x_2 \quad 1 \cdot x_2+1 \cdot (\text{-}x_1\text{-}1))=(0 \quad 0)$$
$$(x_1+x_2\text{-}1 \quad x_2\text{-}x_1\text{-}1)=(0 \quad 0)$$

Igualando componente a componente, obtenemos un sistema lineal de dos ecuaciones:

1. $x_1+x_2=1$

2. $\text{-}x_1+x_2=1$

Sumamos directamente ambas ecuaciones para cancelar x_1:

$$2x_2=2 \Longrightarrow x_2=1$$

Sustituyendo el valor de x_2 en la primera ecuación:

$$x_1+1=1 \Longrightarrow x_1=0$$

Resultado 2.1.2: La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema viene dado por:

$$\begin{cases} (m\text{-}4)x+5z=9 \\ (m\text{-}1)y+6z=m+8 \\ (m\text{-}4)x+(m\text{-}1)y+7z=m+9 \end{cases}$$

Planteamos la matriz de coeficientes (M) y la matriz ampliada (M^*):

$$M=\begin{pmatrix} m\text{-}4 & 0 & 5 \\ 0 & m\text{-}1 & 6 \\ m\text{-}4 & m\text{-}1 & 7 \end{pmatrix}; M^*=\begin{pmatrix} m\text{-}4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m\text{-}1 & 6 & m+8 \\ m\text{-}4 & m\text{-}1 & 7 & m+9 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes $|M|$:

$$|M|=\begin{vmatrix} m\text{-}4 & 0 & 5 \\ 0 & m\text{-}1 & 6 \\ m\text{-}4 & m\text{-}1 & 7 \end{vmatrix}$$

Para simplificar el cálculo, restamos la Fila 1 a la Fila 3 ($F_3 \leftarrow F_3\text{-}F_1$):

$$|M|=\begin{vmatrix} m\text{-}4 & 0 & 5 \\ 0 & m\text{-}1 & 6 \\ 0 & m\text{-}1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna:

$$|M|=(m\text{-}4)\cdot\begin{vmatrix} m\text{-}1 & 6 \\ m\text{-}1 & 2 \end{vmatrix}=(m\text{-}4)\cdot[2(m\text{-}1)\text{-}6(m\text{-}1)]$$

$$|M|=(m\text{-}4)\cdot[\text{-}4(m\text{-}1)]=\text{-}4(m\text{-}4)(m\text{-}1)$$

Buscamos los valores de m que anulan el determinante:

$$\text{-}4(m\text{-}4)(m\text{-}1)=0 \Longrightarrow m=4 \text{y} m=1$$

Análisis de los casos (Teorema de Rouché-Frobenius):

- **Caso 1: Si** $m \neq 4$ **y** $m \neq 1$ El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero ($|M| \neq 0$). Por tanto, el rango de la matriz principal es 3, que coincide con el rango de la ampliada y con el número de incógnitas. > **Conclusión:** El sistema es **Sistema Compatible Determinado (SCD)**. Tiene solución única.

- **Caso 2: Si** $m=4$ Sustituimos $m=4$ en la matriz ampliada:

$$M^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5 & 9\\ 0 & 3 & 6 & 12\\ 0 & 3 & 7 & 13\end{pmatrix}$$

Como la primera columna es completamente nula, $|M|=0$ y su rango máximo es 2. Tomamos un menor de orden 2 diferente de cero en M: $\begin{vmatrix}3 & 6\\ 3 & 7\end{vmatrix}=21\text{-}18=3\neq 0\Longrightarrow \text{rango}(M)=2$. Estudiamos el rango de M^* analizando el determinante formado al sustituir la columna nula por los términos independientes:

$$\begin{vmatrix}0 & 5 & 9\\ 3 & 6 & 12\\ 3 & 7 & 13\end{vmatrix}=\text{-}5(39\text{-}36)+9(21\text{-}18)=\text{-}5(3)+9(3)=\text{-}15+27=12\neq 0\Longrightarrow \text{rango}(M^*)=3$$

Al ser $\text{rango}(M)=2\neq \text{rango}(M^*)=3$: > **Conclusión:** El sistema es **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene solución.

Caso 3: Si $m=1$ Sustituimos $m=1$ en la matriz ampliada:

$$M^*=\begin{pmatrix}\text{-}3 & 0 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 6 & 9\\ \text{-}3 & 0 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

En este caso, la segunda columna es nula, por lo que $\text{rango}(M)\leq 2$. Extraemos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix}\text{-}3 & 5\\ \text{-}3 & 7\end{vmatrix}=\text{-}21\text{-}(\text{-}15)=\text{-}6\neq 0\Longrightarrow \text{rango}(M)=2$. Estudiamos el rango de M^* calculando el determinante con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}\text{-}3 & 5 & 9\\ 0 & 6 & 9\\ \text{-}3 & 7 & 10\end{vmatrix}=\text{-}3(60\text{-}63)\text{-}3(45\text{-}54)=\text{-}3(\text{-}3)\text{-}3(\text{-}9)=9+27=36\neq 0\Longrightarrow \text{rango}(M^*)=3$$

Al ser $\text{rango}(M)=2\neq \text{rango}(M^*)=3$: >

Conclusión: El sistema es Sistema Incompatible (SI). No tiene solución.

Problema 3:

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b), y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$.
b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
d) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Solución:

PREGUNTA 3. ANÁLISIS

3.1. Viabilidad y esbozo de las funciones según propiedades

a) Continua pero no derivable en $x=0$: *Es totalmente posible.* El ejemplo por excelencia es la función valor absoluto $f(x)=|x|$. Es una curva continua que dibuja una "V" cuyo vértice en $(0,0)$ constituye un punto anguloso, provocando que las derivadas laterales no coincidan.

b) Continua en $[a,b]$, con $f(a)f(b)<0$, y que corta al eje x en más de un punto de (a,b): *Es totalmente posible.* El Teorema de Bolzano asegura que si hay cambio de signo existirá *al menos* un punto de corte, pero no impide que existan múltiples. Una función de tercer grado u ondulatoria que oscile cruzando el eje horizontal varias veces cumple esta condición.

c) Continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), con $f(a)f(b)<0$, $f'>0$ en (a,b), y corte múltiple: *Es imposible.* La condición de que la primera derivada sea estrictamente positiva ($f'(x)>0$) fuerza a que la función sea **estrictamente creciente** en todo el intervalo. Una trayectoria que solo asciende no puede retornar a cortar el eje horizontal una segunda vez. Por tanto, el punto de corte con el eje x es único.

d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f''>0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$: *Es totalmente posible.* La condición $f''(x)>0$ nos indica que la función es **estrictamente convexa** (forma de "U"). Puede ser monótona si elegimos una función cuya tendencia sea siempre creciente o siempre decreciente a lo largo de todo el dominio real, como ocurre con la función exponencial $f(x)=e^x$, donde $f'(x)=e^x>0$ (creciente) y $f''(x)=e^x>0$ (convexa).

BY NC SA

3.2. Cálculo de límites

- **a)** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x}$ Sustituimos directamente el valor numérico:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln 1}{1}=\frac{0}{1}=0$$

- **b)** $\lim_{x\to 1}\frac{x\text{-}1}{\ln x}$ Al evaluar obtenemos la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicamos la regla de L'Hôpital derivando de manera independiente el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(x\text{-}1)}{\frac{d}{dx}(\ln x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x=1$$

- **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}$ Descomponemos la tangente empleando la identidad trigonométrica fundamental $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

- **d)** $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ Nos encontramos ante la indeterminación $[0\cdot(\text{-}\infty)]$. Reordenamos los términos algebraicamente para transformarlo en una estructura de cociente $\left[\frac{\text{-}\infty}{\infty}\right]$ y aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{\text{-}1/2}}$$

- Derivamos las funciones correspondientes:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\text{-}\frac{1}{2}x^{\text{-}3/2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\text{-}\frac{1}{2}x\cdot x^{\text{-}3/2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\text{-}\frac{1}{2}x^{\text{-}1/2}}=\lim_{x\to 0^+}\text{-}2x^{1/2}=\lim_{x\to 0^+}\text{-}2\sqrt{x}=0$$

3.3. Determinación del parámetro positivo a mediante el área encerrada

Dada la función $f(x)=ax^2\text{-}2ax$ con $a>0$. Hallamos los puntos de intersección con el eje horizontal igualando la función a cero ($f(x)=0$):

$$ax^2\text{-}2ax=0\Longrightarrow ax(x\text{-}2)=0\Longrightarrow x=0 \text{ y } x=2$$

Dado que el coeficiente principal es positivo ($a>0$), la parábola tiene sus ramas orientadas hacia arriba, lo que implica que en el intervalo abierto $(0,2)$ los valores de la función se localizan por debajo del eje x. El cálculo del área se plantea mediante la integral definida del opuesto de la función:

$$\text{Área}=\int_0^2\text{-}(ax^2\text{-}2ax)dx=\int_0^2(2ax\text{-}ax^2)dx$$

$$\text{Área}=\left[ax^2\text{-}\frac{ax^3}{3}\right]_0^2=\left(a(2)^2\text{-}\frac{a(2)^3}{3}\right)\text{-}0$$

BY NC SA

$$\text{Área}=4a-\frac{8a}{3}=\frac{12a-8a}{3}=\frac{4a}{3}$$

El enunciado establece que el área debe ser igual a 10 unidades de superficie:

$$\frac{4a}{3}=10 \Longrightarrow 4a=30 \Longrightarrow a=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}=7.5$$

Resultado 3.3: El parámetro positivo buscado es $a=\frac{15}{2}$ (o 7.5).

BY NC SA

Problema 4:

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P', siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r.
4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P, Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.
4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

Solución:

4.1.1. Obtención del punto simétrico P′ y las ecuaciones paramétricas de r

El punto $Q(0,1,0)$ actúa como el punto medio del segmento delimitado por $P(1,0,1)$ y su punto simétrico $P'(x,y,z)$. Aplicamos la fórmula del punto medio coordenado:

$$Q=\frac{P+P'}{2} \Longrightarrow (0,1,0)=\left(\frac{1+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{1+z}{2}\right)$$

Igualamos componente a componente para despejar las coordenadas de P': $*\ 0=\frac{1+x}{2} \Longrightarrow 1+x=0 \Longrightarrow x=-1$ $*\ 1=\frac{y}{2} \Longrightarrow y=2$ $*\ 0=\frac{1+z}{2} \Longrightarrow 1+z=0 \Longrightarrow z=-1$

El punto simétrico obtenido es $P'(-1,2,-1)$.

La recta r viene definida por pasar por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y el punto P'. Su vector director coincide con el vector posicional $\overrightarrow{OP'}$:

$$\vec{v}_r=\overrightarrow{OP'}=(-1,2,-1)$$

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r:\begin{cases}x=-\lambda\\y=2\lambda\\z=-\lambda\end{cases}$$

4.1.2. Ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el origen

Al determinarse que el plano es perpendicular a la recta r, el vector director de dicha recta se convierte en el vector normal del plano ($\vec{n}_\pi$):

$$\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(-1,2,-1)$$

La ecuación general o implícita del plano adopta la forma estructural:

$$-1x+2y-1z+D=0 \Longrightarrow -x+2y-z+D=0$$

Dado que el plano pasa explícitamente por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, al sustituir los valores obtenemos que la constante independiente es cero ($D=0$).

Resultado 4.1.2: La ecuación implícita del plano es $-x+2y-z=0$ (o multiplicando por -1: $x-2y+z=0$).

4.2. Puntos en el espacio, planos y distancias

4.2.1. Demostración de puntos no alineados y obtención de la ecuación implícita de π

Disponemos de los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$. Construimos los vectores directores generados a partir de ellos:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0-1,1-0,0-1)=(-1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{PR}=R-P=(1-1,1-0,1-1)=(0,1,0)$$

Para validar si se encuentran alineados, comprobamos la proporcionalidad de sus coordenadas componentes:

$$\frac{-1}{0}\neq\frac{1}{1}$$

Al carecer de proporcionalidad, se concluye que los vectores son linealmente independientes y, por ende, los tres puntos **no están alineados**, garantizando la existencia de un único plano π.

El vector normal al plano ($\vec{n}_\pi$) lo calculamos mediante el producto vectorial de ambos vectores de posición:

$$\vec{n}_\pi=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_\pi=\vec{\imath}(0-(-1))-\vec{\jmath}(0-0)+\vec{k}(-1-0)=1\vec{\imath}+0\vec{\jmath}-1\vec{k}=(1,0,-1)$$

Con el vector normal $(1,0,-1)$, la ecuación implícita se escribe provisionalmente como:

$$1x+0y-1z+D=0\Longrightarrow x-z+D=0$$

Hacemos pasar el plano por cualquiera de los puntos, por ejemplo, $Q(0,1,0)$:

$$0-0+D=0\Longrightarrow D=0$$

Resultado 4.2.1: La ecuación implícita del plano π es $x-z=0$.

4.2.2. Determinación del valor o valores de a según la distancia establecida

Se requiere hallar el valor del parámetro del punto $S(a,0,0)$ de modo que su distancia al plano calculado sea exactamente igual a $a\sqrt{2}$ unidades de longitud.

Empleamos la expresión analítica de la distancia de un punto a un plano:

$$d(S,\pi)=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$a\sqrt{2}=\frac{|1\cdot a+0\cdot 0-1\cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}\Longrightarrow a\sqrt{2}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

Despejamos multiplicando los términos en cruz de la igualdad:

$$a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=|a| \Longrightarrow 2a=|a|$$

Evaluamos las dos alternativas posibles que presenta la definición de la función de valor absoluto: 1. **Si** $a \geq 0$**:** La igualdad se traduce de forma directa en $2a=a \Longrightarrow a=0$. 2. **Si** $a<0$**:** El término absoluto altera el signo, quedando como $2a=\text{-}a \Longrightarrow 3a=0 \Longrightarrow a=0$.

Resultado 4.2.2: El único valor admisible que cumple las directrices geométricas requeridas es $a=0$

.

BY NC SA

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAU Convocatoria extraordinaria 2026 MATEMÁTICAS II	CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^TA$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

BY NC SA

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a, b, c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1,2)$ y
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.
4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^*.

4.2. Considere el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.
4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2 PUNTOS)

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

Solución:

1.1. Probabilidad de permanecer entre 45 y 70 minutos

Sea T el tiempo, en minutos, que una persona permanece en la feria. Según el enunciado:

$$T \sim N(50,19.5)$$

$$z_{45}=\frac{45-50}{19.5} \approx -0.26, z_{70}=\frac{70-50}{19.5} \approx 1.03$$

Por tanto, utilizando los valores de la función de distribución normal estándar proporcionados:

$$P(45<T<70)=\Phi(1.03)-\Phi(-0.26)$$

$$P(45<T<70)=0.8485-(1-0.6026)=0.4511$$

BY NC SA

Resultado 1.1: La probabilidad pedida es 0,4511, es decir, aproximadamente un 45,11 %.

1.2. Probabilidad condicionada

Salir antes de las 18:00 equivale a permanecer menos de 60 minutos; seguir dentro a las 17:45 equivale a haber permanecido más de 45 minutos. Por ello:

$$P(T<60|T>45)=\frac{P(45<T<60)}{P(T>45)}$$

$$\frac{\Phi(0.51)-\Phi(-0.26)}{1-\Phi(-0.26)}=\frac{0.6950-0.3974}{0.6026}\approx 0.4939$$

Resultado 1.2: La probabilidad condicionada pedida es 0,4939 (49,39 %).

BY NC SA

Problema 2: ÁLGEBRA (2 PUNTOS)

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X=AA^T$ e $Y=A^TA$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ tales que $BM=M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

Solución:

2.1. Productos de matrices e invariancia

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2.1.1. Cálculo de X e Y

$$X=AA^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, Y=A^TA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$detX=8\neq 0, X^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$detY=0$(la primera y la tercera filas coinciden)

Resultado 2.1.1: X es invertible y su inversa es la indicada; Y no es invertible.

2.1.2. Matrices M que cumplen BM = M

$$M=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, BM=\begin{pmatrix}a+c\\b\\a+c\end{pmatrix}$$

$$BM=M \Leftrightarrow \begin{cases}a+c=a\\b=b\\a+c=c\end{cases} \Leftrightarrow a=c=0$$

$$M=\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Resultado 2.1.2: Todas las soluciones son los múltiplos del vector $(0,1,0)^T$.

2.2. Discusión del sistema según m

La matriz de coeficientes y el cálculo de su determinante son:

$$A_m=\begin{pmatrix}2 & 2m-2 & m+6\\1 & m-2 & 3\\0 & 2 & 2m+2\end{pmatrix}, R_1 \leftarrow R_1-2R_2: A_m \sim \begin{pmatrix}0 & 2 & m\\1 & m-2 & 3\\0 & 2 & 2m+2\end{pmatrix}$$

$$detA_m=-[2(2m+2)-2m)=-2(m+2)$$

Si m ≠ −2, el determinante no se anula y el sistema es compatible determinado. Una eliminación sencilla da:

$$R_1 \leftarrow R_1-2R_2: 2y+mz=5$$

$$R_3: 2y+(2m+2)z=m-5$$

$$(m+2)z=m-10$$

$$z=\frac{m-10}{m+2}, y=\frac{-m^2+15m+10}{2(m+2)}, x=\frac{m^3-17m^2+18m+88}{2(m+2)}$$

Si m = −2, las ecuaciones obtenidas son contradictorias:

$$m=-2: y-z=\frac{5}{2} y y-z=-\frac{7}{2}$$

Resultado 2.2: Para m ≠ −2 el sistema es compatible determinado y tiene la solución indicada. Para m = −2 es incompatible y no tiene solución.

BY NC SA

Problema 3: ANÁLISIS (4 PUNTOS)

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a, b, c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1,2)$ y
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

Solución:

3.1. Determinación del polinomio

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d, p'(x)=3ax^2+2bx+c$$

Que (1,−6) sea un extremo relativo implica p(1)=−6 y p′(1)=0. La recta tangente y=4x+2 en x=−1 aporta p(−1)=−2 y p′(−1)=4:

$$p(1)=-6, p'(1)=0, p(-1)=-2, p'(-1)=4$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=-6 \\ 3a+2b+c=0 \\ -a+b-c+d=-2 \\ 3a-2b+c=4 \end{cases}$$

$$a=2, b=-1, c=-4, d=-3$$

$$p(x)=2x^3-x^2-4x-3$$

Además:

$$p''(1)=12\cdot 1-2=10>0$$

Resultado 3.1: Los coeficientes son a=2, b=−1, c=−4 y d=−3. Como p”(1)>0, el punto (1,−6) es efectivamente un mínimo relativo.

3.2. Ejemplo de función con las propiedades pedidas

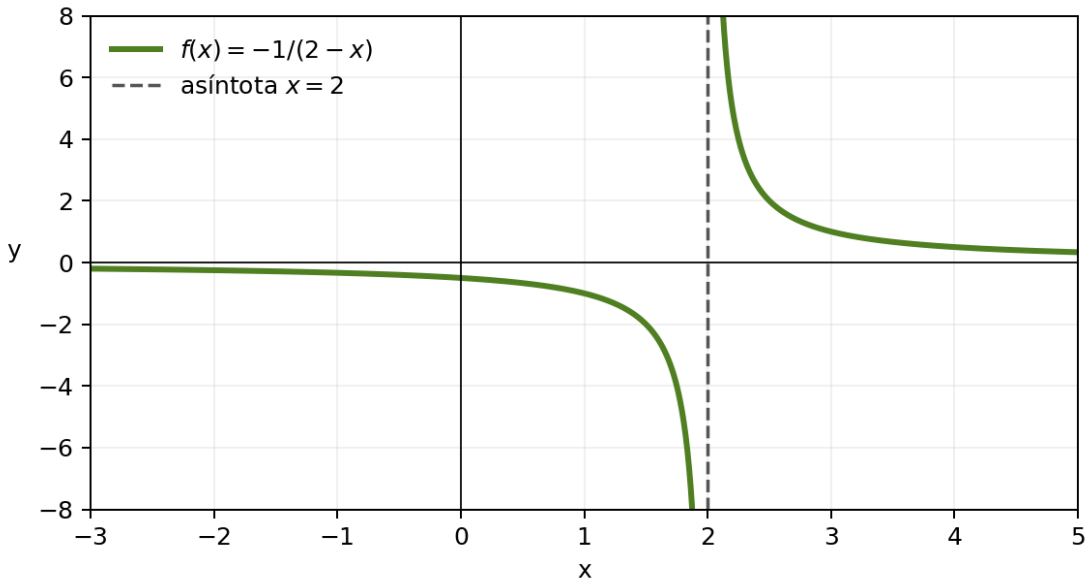
Una elección especialmente sencilla es:

$$f(x)=-\frac{1}{2-x}, x\neq 2$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(2-x)^2}, f''(x)=-\frac{2}{(2-x)^3}$$

$$x\in(-1,2)\Rightarrow f(x)<0, f'(x)<0, f''(x)<0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

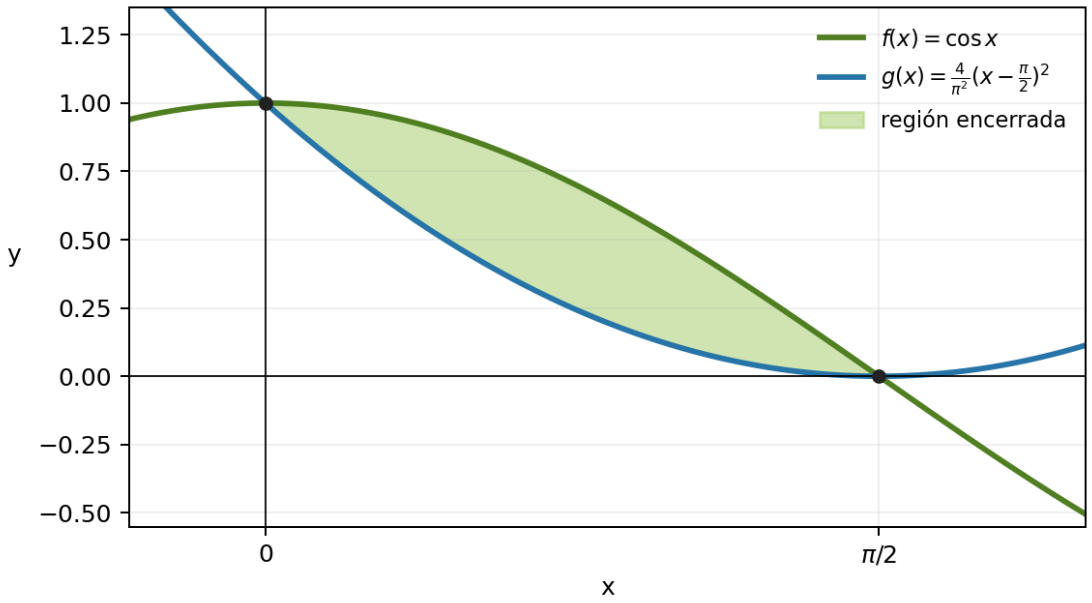


En (−1,2) la función es negativa, decreciente y cóncava. La recta x=2 es una asíntota vertical y la rama izquierda desciende sin cota al aproximarse a ella.

3.3. Área encerrada por las dos gráficas

Las gráficas se cortan en los extremos del intervalo que encierra la región:

$$cos 0=1=g(0), cos\frac{\pi}{2}=0=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



Además, si restamos ambas funciones, la diferencia es estrictamente cóncava en el intervalo y se anula en los extremos; por ello es positiva en el interior:

$$h(x)=cosx-\frac{4}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2, h''(x)=-cosx-\frac{8}{\pi^2}<0 \text{en} \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

En [0,π/2], la función cos x queda por encima de la parábola. Por tanto:

$$A=\int_0^{\pi/2}\left[cosx-\frac{4}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)dx$$

$$A=\left[sinx-\frac{4}{3\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)_0^{\pi/2}=1-\frac{\pi}{6}\approx 0.4764$$

Resultado 3.3: El área encerrada es 1−π/6 unidades cuadradas, aproximadamente 0,4764.

BY NC SA

Problema 4: GEOMETRÍA (2 PUNTOS)

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2,-1,1)$.
4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^*.

4.2. Considere el punto $P(3,0,-1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2,-1,2)$.
4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2\,y\, + \,z - 8\, = \,0$.

Solución:

4.1. Plano que contiene a la recta y distancia

4.1.1. Ecuación del plano π

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow P_0 = (1,1,0), \vec{v} = (2,1,3)$$

$$\overrightarrow{P_0Q} = (1,-2,1)$$

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_0Q} = (7,1,-5)$$

$$\pi: 7(x-1) + (y-1) - 5z = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 5z - 8 = 0$$

Resultado 4.1.1: El plano pedido es π: 7x+y−5z−8=0.

*4.1.2. Paralelismo y distancia a π**

Un vector normal de π* es (1,1,−1). El producto escalar con el vector director de r es nulo:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_{\pi^*} = (2,1,3) \cdot (1,1,-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Por ello r es paralela a π*.

La recta no está contenida en el plano, pues:

BY NC SA

$$1+1-0-1=1\neq 0 \Rightarrow P_0 \notin \pi^*$$

Como el punto P_o=(1,1,0) pertenece a r, la distancia es:

$$d(r,\pi^*)=d(P_0,\pi^*)=\frac{|1+1-0-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resultado 4.1.2: La distancia de r a π* es 1/√3=√3/3.

4.2. Simetrías

4.2.1. Simétrico respecto de un punto

$$Q=\frac{P+P'}{2} \Rightarrow P'=2Q-P$$

$$P'=2(2,-1,2)-(3,0,-1)=(1,-2,5)$$

Resultado 4.2.1: P'=(1,−2,5).

4.2.2. Simétrico respecto del plano

El vector normal del plano es n=(1,2,1). Para P=(3,0,−1):

$$s=3+2\cdot 0-1-8=-6, \| \vec{n} \|^2 =1^2+2^2+1^2=6$$

$$P''=P-2\frac{s}{\| \vec{n} \|^2}\vec{n}=(3,0,-1)+2(1,2,1)=(5,4,1)$$

Como comprobación, el punto medio de P y P" pertenece al plano:

$$\frac{P+P''}{2}=(4,2,0), 4+2\cdot 2+0-8=0$$

Resultado 4.2.2: P"=(5,4,1).

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

CC BY NC SA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Solo se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni típex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de Matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60 %, 75 % y 80 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]

b) Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]

c) Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

(a) En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]

(b) En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

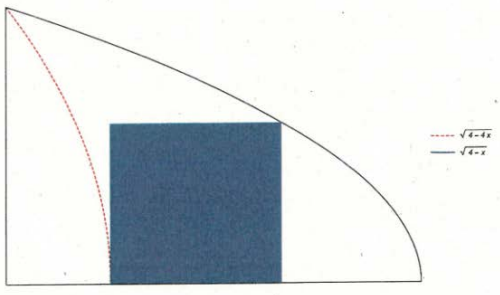


Figura 1: Parcela con piscina

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Pregunta 3:

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50 %, de la variante B el 60 % y de la variante C el 40 %. El resto se reparte a domicilio.

a) Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]

b) Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]

c) Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

Ejercicio 4:

PARTE B (Preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$,

a) determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, [0.75 puntos].

b) Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión, [0.75 puntos].

c) Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva, [0.5 puntos].

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} - 1\right)}{a^2x^2}, \quad a \neq 0.$$

b) Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0, 1)$, [1 punto].

Ejercicio 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$, con $s \in \mathbb{R}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]

b) Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]

c) Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r : \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-2}$; y $s : \begin{cases} x = -2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s. [1 punto]

b) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s. [1 punto]

BY NC SA

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de Matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60 %, 75 % y 80 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]

b) Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]

c) Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Solución:

a) Llamamos A, B y C a los sucesos aprobar Métodos algorítmicos en matemáticas, Estadística y Bases de datos, respectivamente. Nos dicen que $P(A)=0.60$, $P(B)=0.75$ y $P(C)=0.80$.

Suponemos que los sucesos A, B y C son independientes entre si, por lo que la probabilidad de aprobar las tres asignaturas es el producto de las probabilidades de aprobar cada una de ellas.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0.6\cdot 0.75\cdot 0.8=\boxed{0.36}$$

La probabilidad de aprobar las tres asignaturas vale 0.36.

b) El suceso suspender solo una de las tres asignaturas puede ocurrir de tres formas distintas y su probabilidad será la suma de las probabilidades de estos tres sucesos.

$$P(\overline{A}\cap B\cap C)+P(A\cap \overline{B}\cap C)+P(A\cap B\cap \overline{C})=$$

$$=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})=$$

$$=(1-0.6)\cdot 0.75\cdot 0.8+0.6(1-0.75)\cdot 0.8+0.6\cdot 0.75\cdot(1-0.8)=\boxed{0.45}$$

La probabilidad de suspender solo una de las tres asignaturas vale 0.45.

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

c) Si llamamos D al suceso "suspender solo una de las tres asignaturas" nos piden calcular $P\left(\overline{A}/D\right)$. Sabemos que $P(D)=0.45$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\overline{A}/D\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap D\right)}{P(D)}=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)}{P(D)}=\frac{P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)\cdot P(C)}{P(D)}=$$

$$=\frac{(1-0.6)\cdot 0.75\cdot 0.8}{0.45}=\boxed{\frac{8}{15}\simeq 0.5333}$$

BY NC SA

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

(a) En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]

(b) En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

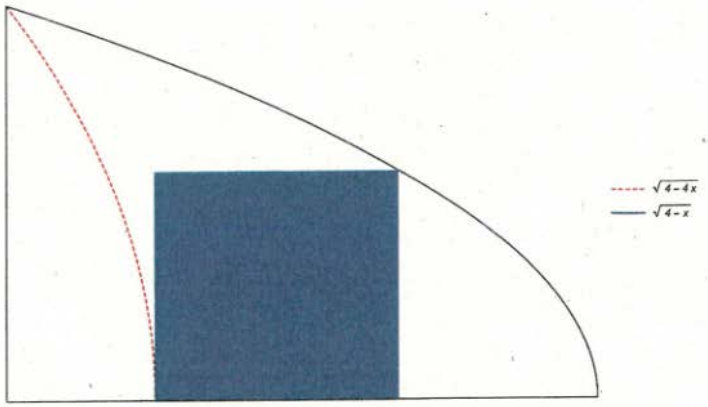


Figura 1: Parcela con piscina

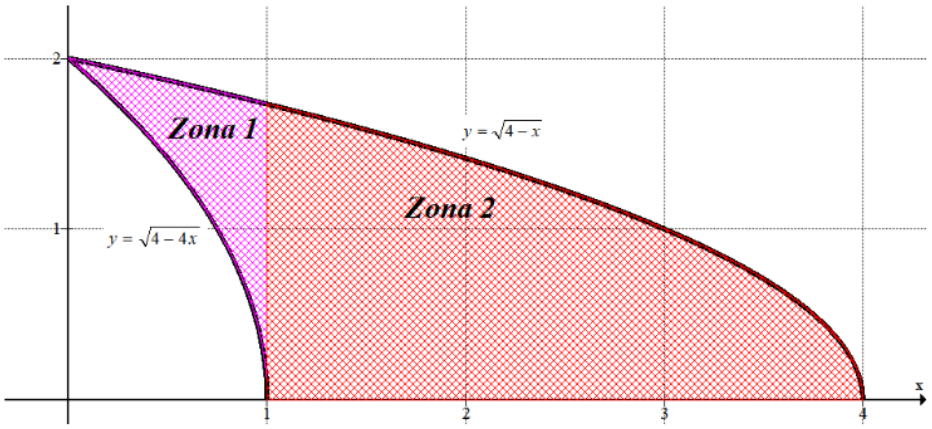
Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas con el eje $y = 0$.

$$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{4-x} \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{4-x}=0 \Rightarrow 4-x=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{4-4x} \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{4-4x}=0 \Rightarrow 4-4x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Añadimos a la Figura 1 la información obtenida y coloreamos la parcela.



BY NC SA

El área de la parcela la obtenemos como la suma de las áreas de la zona 1 y zona 2.
El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones: $\sqrt{4-x}-\sqrt{4-4x}$.

$$Área\ 1=\int_0^1 \sqrt{4-x}-\sqrt{4-4x}dx=\int_0^1 (4-x)^{1/2}-(4-4x)^{1/2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1}\cdot\frac{1}{-1}-\frac{(4-4x)^{1/2+1}}{1/2+1}\cdot\frac{1}{-4}\right]_0^1=\left[-\frac{(4-x)^{3/2}}{3/2}+\frac{(4-4x)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 4}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{(4-4x)^3}}{6}-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3}\right]_0^1=\left[\frac{\sqrt{(4-4)^3}}{6}-\frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3}\right]-\left[\frac{\sqrt{(4-0)^3}}{6}-\frac{2\sqrt{(4-0)^3}}{3}\right]=$$

$$=\frac{-2\sqrt{27}}{3}-\frac{\sqrt{64}}{6}+\frac{2\sqrt{64}}{3}=-2\sqrt{3}-\frac{8}{6}+\frac{16}{3}=\boxed{4-2\sqrt{3}\simeq 0.54\ u^2}$$

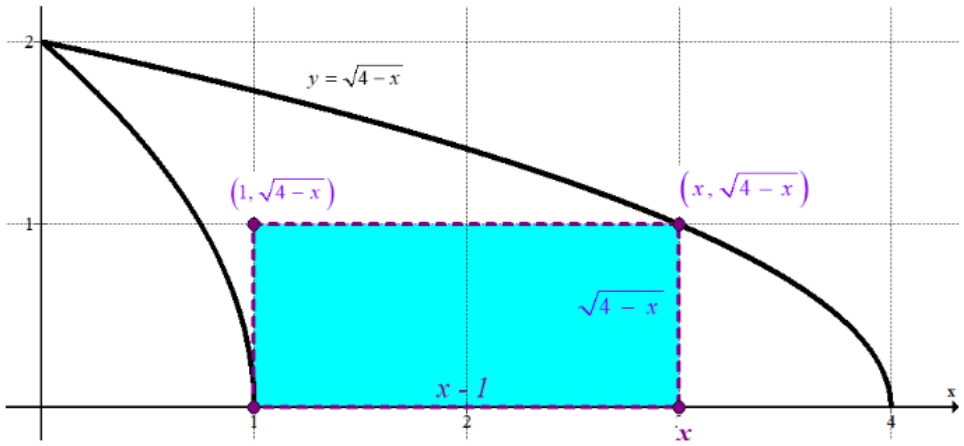
El área de la zona 2 es el valor de la integral definida de 1 a 4 de $y=\sqrt{4-x}$.

$$Área\ 1=\int_1^4 \sqrt{4-x}dx=\int_1^4 (4-x)^{1/2}\,dx=\left[-\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_1^4=\left[-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3}\right]_1^4=$$

$$=\left[-\frac{2\sqrt{(4-4)^3}}{3}\right]-\left[-\frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3}\right]=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{3}=\boxed{2\sqrt{3}\simeq 3.46\ u^2}$$

El área de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas: $4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4$ unidades cuadradas.

b) Tomamos un punto cualquiera de la gráfica de $y=\sqrt{4-x}$, siendo $1\le x\le 4$ y dibujamos la piscina obteniendo la longitud de sus lados.



BY NC SA

El área de la piscina es el producto de la base por la altura: $A(x)=(x-1)\sqrt{4-x}$
Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula su derivada (puntos críticos).

$$A(x)=(x-1)\sqrt{4-x}\Rightarrow A'(x)=\sqrt{4-x}+(x-1)\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{2\left(\sqrt{4-x}\right)^2-x+1}{2\sqrt{4-x}}=$$

$$=\frac{2(4-x)-x+1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{8-2x-x+1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{-3x+9}{2\sqrt{4-x}}=\frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}}$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}}=0\Rightarrow -3(x-3)=0\Rightarrow x-3=0\Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=3$.

- Antes de $x=3$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $A'(2)=\frac{-3(2-3)}{2\sqrt{4-2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}>0$.
  La función área crece de 1 a 3.
- Después de $x=3$ consideramos $x=3.5$ y la derivada vale
  $A'(3.5)=\frac{-3(3.5-3)}{2\sqrt{4-3.5}}=\frac{-1.5}{2\sqrt{0.5}}<0$. La función área decrece de 3 a 4.

Como el área crece antes de $x=3$ y decrece después podemos afirmar que el área es máxima para $x=3$.
Para $x=3$ el área de la piscina vale $A(3)=(3-1)\sqrt{4-3}=2$ unidades cuadradas.
El área máxima que puede tener la piscina es de 2 unidades cuadradas.

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

Problema 3:

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50 %, de la variante B el 60 % y de la variante C el 40 %. El resto se reparte a domicilio.

a) Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]

b) Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]

c) Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

Solución:

a) La matriz que se pide es la que aparece en la tabla.

$$M=\begin{matrix} \\ Pequeño \\ Grande \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) Escribimos la matriz que expresa el porcentaje según la variante y el tipo de venta.

$$N=\begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} Tienda & Domicilio \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.50 & 1-0.5 \\ 0.60 & 1-0.6 \\ 0.40 & 1-0.4 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow N=\begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} Tienda & Domicilio \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) Obtenemos el producto de las dos matrices anteriores.

$$M\cdot N=\begin{matrix} \\ Pequeño \leftarrow \\ Grande \leftarrow \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix}\cdot\begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} Tienda & Domicilio \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$MN=\begin{matrix} \\ Pequeño \\ Grande \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} Tienda & Domicilio \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 50+30+40 & 50+20+60 \\ 80+90+40 & 80+60+60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 120 & 130 \\ 210 & 200 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

BY NC SA

Problema 4:

PARTE B (Preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$,

a) determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, [0.75 puntos].

b) Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión, [0.75 puntos].

c) Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva, [0.5 puntos].

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2x^2}, \quad a \neq 0.$$

b) Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0, 1)$, [1 punto].

Solución:

a) La función existe para cualquier valor real, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = In\det er\min ación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = \frac{1}{4\cdot\infty\cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2} = (1-4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}}$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x)=\left(1-4x^2\right)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x)=-8xe^{-2x^2}+\left(1-4x^2\right)\left(-4x\right)e^{-2x^2}=$$

$$=-8xe^{-2x^2}+\left(-4x+16x^3\right)e^{-2x^2}=\left(-12x+16x^3\right)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x)=4x\left(4x^2-3\right)e^{-2x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(4\left(\frac{-1}{2}\right)^2-3\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=-2\cdot(-2)e^{-1/2}>0 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\cdot(-2)e^{-1/2}<0 \end{cases}$$

Para $x=\frac{-1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor positivo. La función presenta un mínimo relativo en $x=\frac{-1}{2}$.

Para $x=\frac{1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor negativo. La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-0.5$ y $x=0.5$.

- En el intervalo $(-\infty,-0.5)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\left(1-4(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2}=\frac{-3}{e^2}<0$. La función decrece en $(-\infty,-0.5)$.
- En el intervalo $(-0.5,0.5)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\left(1-4\cdot 0^2\right)e^{-2\cdot 0^2}=1>0$. La función crece en $(-0.5,0.5)$.
- En el intervalo $(0.5,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\left(1-4\cdot 1^2\right)e^{-2\cdot 1^2}=\frac{-3}{e^2}<0$. La función decrece en $(0.5,+\infty)$.

BY NC SA

La función decrece en $(-\infty,-0.5)\cup(0.5,+\infty)$ y crece en $(-0.5,0.5)$.

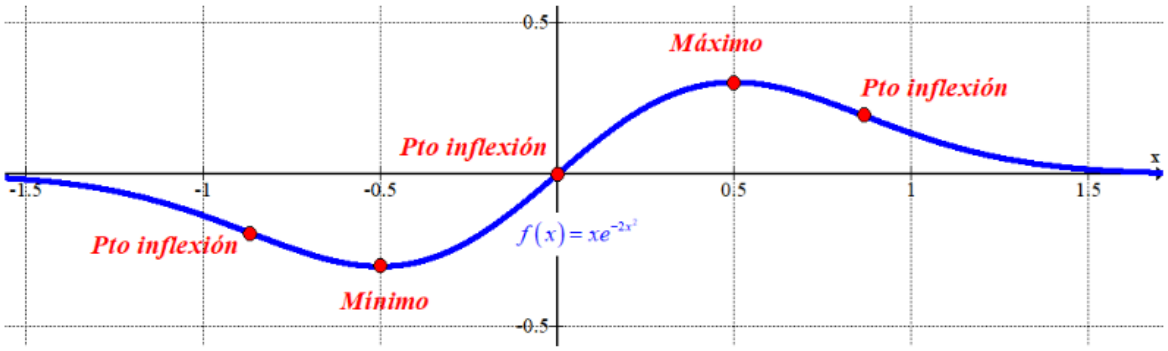
Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f''(x)=0\Rightarrow -4x\left(4x^2-3\right)e^{-2x^2}=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 4x^2-3=0\rightarrow 4x^2=3\rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}}\end{cases}$$

La función tiene tres puntos de inflexión: $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $x=0$ y $x=\frac{+\sqrt{3}}{2}$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función-

x	$f(x)=xe^{-2x^2}$
-1	$-e^{-2}\simeq -0.13$
$-\sqrt{3}/2$	-0.19 Punto de inflexión
$-1/2$	-0.3 Mínimo
0	0 Punto de inflexión
$1/2$	0.3 Máximo
$\sqrt{3}/2$	0.19 Punto de inflexión
1	$e^{-2}\simeq 0.13$



BY NC SA

Solución 4.2:

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)}{a^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}{a^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\sin x)}{a^2x^2\sin x}=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=$$

$$=\frac{2(0-\sin 0)}{a^2\cdot 0^2\sin 0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{1-\cos 0}{2\cdot 0\cdot\sin 0+\cdot 0^2\cos 0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x+x^2(-\sin x)}=\frac{2}{a^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(2-x^2)\sin x+4x\cos x}=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{2\sin 0}{(2-0^2)\sin 0+4\cdot 0\cdot\cos 0}=$$

$$=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{-2x\sin x+(2-x^2)\cos x+4\cos x+4x(-\sin x)}=$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{cos0}{-2\cdot 0\cdot\sin 0+(2-0^2)\cos 0+4\cos 0+4\cdot 0\cdot(-\sin 0)}=\frac{2}{6a^2}=\boxed{\frac{1}{3a^2}}$$

b) Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^3(x-1)^2+1$ en el intervalo $[0,1]$. La función es continua en el intervalo $[0,1]$. La función tiene una expresión polinómica y es derivable en $(0,1)$.

Se cumple que $f(0)=0^3(0-1)^2+1=1$ y $f(1)=1^3(1-1)^2+1=1$, por lo que $f(0)=f(1)$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle y afirmar que existe $c\in(0,1)$ tal que $f'(c)=0$.

BY NC SA

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)
También podemos hacerlo calculando la inversa y encontrando sus raíces.
Encontramos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x)=x^3(x-1)^2+1\Rightarrow f'(x)=3x^2(x-1)^2+x^3 2(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=(x-1)\left[3x^2(x-1)+2x^3\right]=(x-1)\left[3x^3-3x^2+2x^3\right]=(x-1)\left[5x^3-3x^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=x^2(x-1)(5x-3)$$

Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2(x-1)(5x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-1=0\rightarrow x=1\\ 5x-3=0\rightarrow 5x=3\rightarrow \boxed{x=\frac{3}{5}=0.6\in(0,1)}\end{cases}$$

La derivada se anula para $x=\frac{3}{5}=0.6$ que pertenece al intervalo (0, 1).

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los tres primeros puntos de apoyo.

$$\left.\begin{array}{l}(3,8,17/2)\in\pi\\(4,6,37/4)\in\pi\\(2,8,8)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(3,8,17/2)-(2,8,8)=(1,0,1/2)\\ \vec{v}=(4,6,37/4)-(2,8,8)=(2,-2,5/4)\\(2,8,8)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u'}=2\vec{u}=2(1,0,1/2)=(2,0,1)\\ \vec{v'}=4\vec{v}=4(2,-2,5/4)=(8,-8,5)\\(2,8,8)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2 & y-8 & z-8\\ 2 & 0 & 1\\ 8 & -8 & 5\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+8y-\cancel{64}-16z+128-0-10y+\cancel{80}+8x-\cancel{16}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-2y-16z+128=0\Rightarrow\boxed{\pi:4x-y-8z+64=0}$$

El plano que contiene el toldo tiene ecuación $\pi:4x-y-8z+64=0$.

b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el cuarto punto debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:4x-y-8z+64=0\\(s,16,8)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 4s-16-64+64=0\Rightarrow 4s=16\Rightarrow\boxed{s=4}$$

Para $s=4$ los cuatro puntos de apoyo son coplanarios.

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

c) Hallamos la distancia del punto (0, 0, 5) al plano π que contiene el toldo.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 4x-y-8z+64=0\\ P(0,0,5)\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|4\cdot 0-0-8\cdot 5+64|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2}}=\frac{24}{\sqrt{81}}=\frac{24}{9}\simeq 2.6666\,metros$$

Se cumple que el altavoz está a más de 2 metros de distancia del toldo y la instalación del altavoz en el punto (0, 0, 5) es correcta.

BY NC SA

Problema 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3,8,17/2)$, $(4,6,37/4)$, $(2,8,8)$ y $(s,16,8)$, con $s \in \mathbb{R}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]

b) Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]

c) Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0,0,5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \dfrac{x}{2} = y-3 = \dfrac{z-1}{-2}$; y $s: \begin{cases} x = -2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 1+\lambda, \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s. [1 punto]

b) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1,1,-1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s. [1 punto]

Solución:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} = (2,1,-2) \\ P_r(0,3,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s} = (-2,1,1) \\ Q_s(0,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r} = (2,1,-2) \\ \vec{u_s} = (-2,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\vec{v_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,3,1) \\ Q_s(0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,0,1) - (0,3,1) = (0,-3,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r} = (2,1,-2) \\ \vec{u_s} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-3,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-12-0-0+6 = -6 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y no coinciden en ningún punto).

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

b) El plano paralelo a las dos rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(-2,1,1)\\ P\equiv(1,1,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+4y-\cancel{4}+2z+\cancel{2}+2z+\cancel{2}-2y+\cancel{2}+2x-\cancel{2}=0\Rightarrow \boxed{\pi:3x+2y+4z-1=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi:3x+2y+4z-1=0$.

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Problema 1:

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y –0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

a) la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]

b) entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Problema 2:

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

a) Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]

b) Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Problema 3:

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b, por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a, x_b, p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X\left(X^t X\right)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

Problema 4:

PARTE B (preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y=x^3$, $y=2x$ e $y=x$. [2 puntos]

4.2 a) Sea $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f. [1 punto]

b) Dados $a,b\in\mathbb{R}$, estudia la continuidad de f, en función de a, b, para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax+b}, & si\ x<1,\\ e, & si\ x=1\\ e-ax+1, & si\ x>1 \end{cases}$$

Problema 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r:\frac{x}{3}=y=\frac{z-11}{-1}$ y el punto $P=(0,1,1)$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r. [1 punto]

b) Halla la distancia de P a la recta r. [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x+y+z=1\\ \pi_2: (a-1)x+y+z=a\\ \pi_3: x+(a-1)y-z=0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y –0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

a) la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]

b) entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

a) Sea X la variable aleatoria que nos ofrece la medición de cierto índice. $X = N(\mu, \sigma)$.

$$\left.\begin{array}{l} Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \\ X = 109 \\ Z = 0.6 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.6 = \frac{109-\mu}{\sigma} \Rightarrow 0.6\sigma = 109-\mu \Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6\sigma}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \\ X = 88 \\ Z = -0.8 \end{array}\right\} \Rightarrow -0.8 = \frac{88-\mu}{\sigma} \Rightarrow -0.8\sigma = 88-\mu \Rightarrow \boxed{\mu = 88 + 0.8\sigma}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 109 - 0.6\sigma \\ \mu = 88 + 0.8\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow 88 + 0.8\sigma = 109 - 0.6\sigma \Rightarrow 1.4\sigma = 21 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{21}{1.4} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6 \cdot 15 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 15.

b) Nos piden hallar "a" tal que $P(100-a \le X \le 100+a) = 0.8$.

$$P(100-a \le X \le 100+a) = 0.8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-100}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{100-a-100}{15} \le Z \le \frac{100+a-100}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \le Z \le \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \le -\frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \ge \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{a}{15}\right)\right] = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - 1 = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) = 1.8 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = 1.28 \Rightarrow \boxed{a = 1.28 \cdot 15 = 19.2}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El intervalo buscado es $(100 - 19.2,\ 100 + 19.2) = (80.8,\ 119.2)$.

BY NC SA

Problema 2:

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

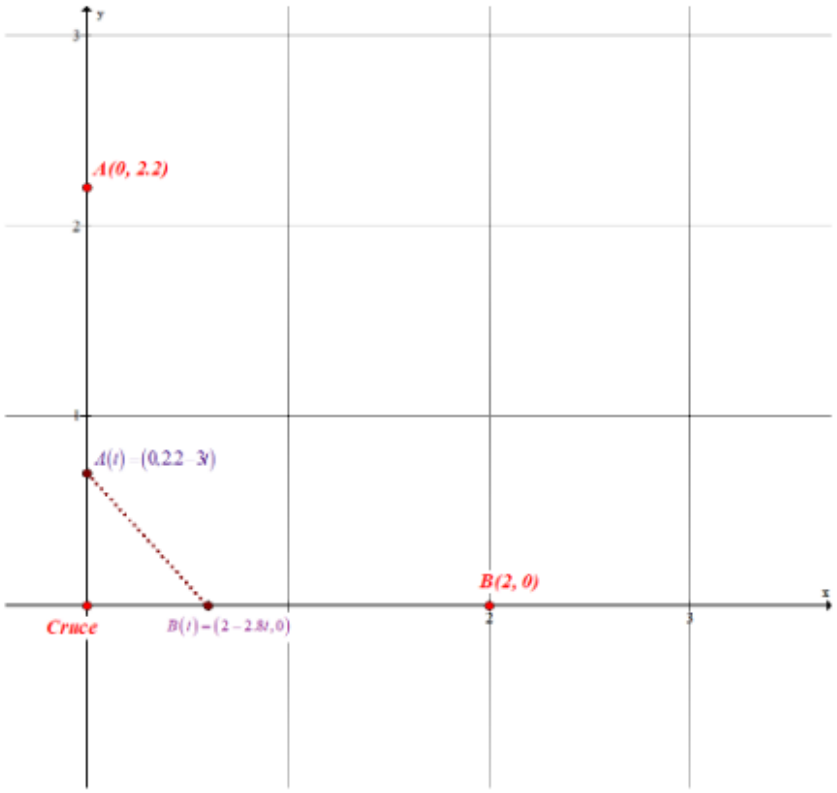
En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

a) Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]

b) Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Solución:

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada situándola en unos ejes de coordenadas donde el cruce de las calles está situado en el origen de coordenadas.



Desde la iglesia A la procesión avanza a razón de 3 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $A(t)=(0,2.2-3t)$.

Desde la iglesia B la procesión avanza a razón de 2.8 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $B(t)=(2-2.8t,0)$.

La distancia entre las dos procesiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos $2.2-3t$ y $2-2.8t$.

$$d(t)=\sqrt{(2.2-3t)^2+(2-2.8t)^2}=\sqrt{4.84+9t^2-13.2t+4+7.84t^2-11.2t}$$

$$d(t)=\sqrt{16.84t^2-24.4t+8.84}$$

BY NC SA

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función distancia.

$$d(t)=\sqrt{16.84t^2-24.4t+8.84}\Rightarrow d'(t)=\frac{33.68t-24.4}{2\sqrt{16.84t^2-24.4t+8.84}}$$

$$d'(t)=0\Rightarrow\frac{33.68t-24.4}{2\sqrt{16.84t^2-24.4t+8.84}}=0\Rightarrow 33.68t-24.4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33.68t=24.4\Rightarrow\boxed{t=\frac{24.4}{33.68}\simeq 0.7245}$$

La función presenta un punto crítico en $t=0.7245$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $t=0.7245$ tomamos $t=0.5$ y la derivada vale
  $d'(0.5)=\dfrac{33.68\cdot 0.5-24.4}{2\sqrt{16.84\cdot 0.5^2-24.4\cdot 0.5+8.84}}=\dfrac{-7.56}{+}<0$. La función decrece antes de $t=0.7245$.
- Después de $t=0.7245$ tomamos $t=1$ y la derivada vale
  $d'(1)=\dfrac{33.68\cdot 1-24.4}{2\sqrt{16.84\cdot 1^2-24.4\cdot 1+8.84}}=\dfrac{9.28}{+}>0$. La función crece después de $t=0.7245$.

La función decrece antes y crece después de $t=0.7245$. La función tiene un mínimo relativo en dicho valor.

La distancia entre las dos procesiones es mínima al cabo de 0.7245 horas, es decir, al cabo de aproximadamente 43 minutos y 28 segundos.

b) Calculamos el valor de la función distancia para $t=0.7245\rightarrow d(0.7245)$.

$$d(0.7245)=\sqrt{16.84\cdot 0.7245^2-24.4\cdot 0.7245+8.84}\simeq 0.039$$

La distancia mínima entre las dos procesiones es de 39 metros.

BY NC SA

Problema 3:

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b, por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a, x_b, p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X\left(X^t X\right)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

Solución:

a) Resolvemos el sistema asociado a la igualdad matricial dada.

$$\left.\begin{aligned} x_a &= 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \\ x_b &= 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \\ p_a &= 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b \\ p_b &= 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_a &= 2 + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \frac{1}{3}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ p_b &= 2 + \frac{1}{2}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \frac{1}{4}\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3p_a &= 6 + 3\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ 4p_b &= 8 + 2\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3p_a = 6+51-6p_a+1.5p_b+20-3p_b+0.5p_a \\ 4p_b = 8+40-6p_b+p_a+17-2p_a+0.5p_b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8.5p_a = 77-1.5p_b \\ 9.5p_b = 65-p_a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 8.5p_a = 77-1.5p_b \\ p_a = 65-9.5p_b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8.5(65-9.5p_b) = 77-1.5p_b \Rightarrow \frac{1105}{2} - \frac{323}{4}p_b = 77-1.5p_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2210-323p_b = 308-6p_b \Rightarrow 1902 = 317p_b \Rightarrow \boxed{p_b = \frac{1902}{317} = 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a = 65-9.5\cdot 6 = 8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_a = 17-2\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 6 = 4} \\ \boxed{x_b = 20-3\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 8 = 6} \end{cases}$$

La solución es $x_a = 4;\ x_b = 6;\ p_a = 8;\ p_b = 6$.

b) Obtenemos la expresión de $\left(X^t X\right)^{-1}$.

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 & 1+2+1+3 \\ 1+2+1+3 & 1+4+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\left|X^t X\right| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 60-49 = 11 \neq 0$$

$$\left(X^t X\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(X^t X\right)^t\right)}{\left|X^t X\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}}{11} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz A.

$$A = I_4 - X\left(X^t X\right)^{-1} X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

BY NC SA

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-7\\-7&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}15-7&-7+4\\15-14&-7+8\\15-7&-7+4\\15-21&-7+12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}8&-3\\1&1\\8&-3\\-6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}8-3&8-6&8-3&8-9\\1+1&1+2&1+1&1+3\\8-3&8-6&8-3&8-9\\-6+5&-6+10&-6+5&-6+15\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}11&0&0&0\\0&11&0&0\\0&0&11&0\\0&0&0&11\end{pmatrix}-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5&2&5&-1\\2&3&2&4\\5&2&5&-1\\-1&4&-1&9\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}$$

La matriz queda $A=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}$.

Comprobamos que la matriz A es idempotente: $A^2=A$.

$$A^2=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-2&-5&1\\-2&8&-2&-4\\-5&-2&6&1\\1&-4&1&2\end{pmatrix}=$$

BY NC SA

$$=\frac{1}{121}\begin{pmatrix} 36+4+25+1 & -12-16+10-4 & -30+4-30+1 & 6+8-5+2 \\ -12-16+10-4 & 4+64+4+16 & 10-16-12-4 & -2-32-2-8 \\ -30+4-30+1 & 10-16-12-4 & 25+4+36+1 & -5+8+6+2 \\ 6+8-5+2 & -2-32-2-8 & -5+8+6+2 & 1+16+1+4 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{121}\begin{pmatrix} 66 & -22 & -55 & 11 \\ -22 & 88 & -22 & -44 \\ -55 & -22 & 66 & 11 \\ 11 & -44 & 11 & 22 \end{pmatrix}=\frac{1}{121}\cdot 11\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=A$$

BY NC SA

Problema 4:

PARTE B (preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y=x^3$, $y=2x$ e $y=x$. [2 puntos]

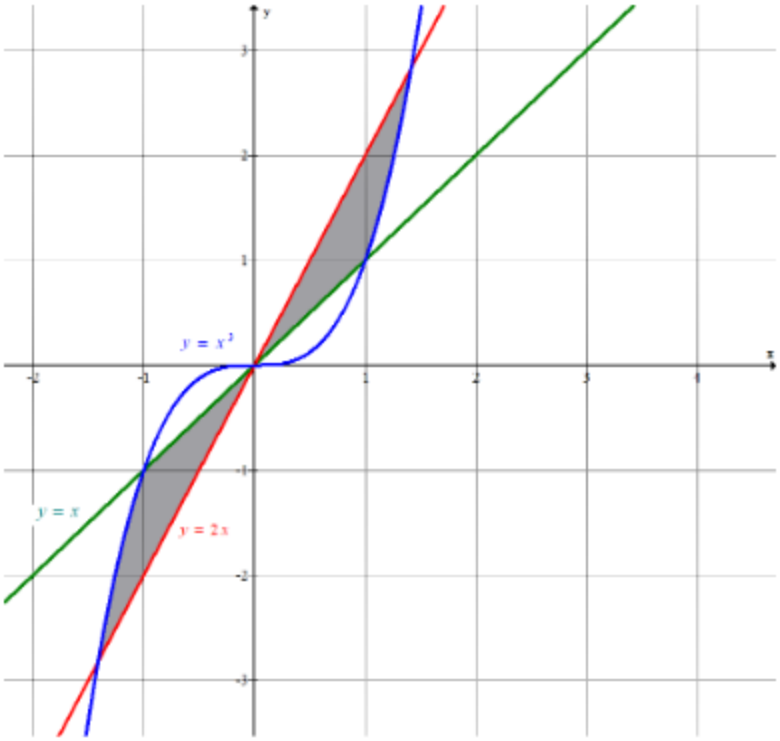
4.2 a) Sea $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f. [1 punto]

b) Dados $a,b\in\mathbb{R}$, estudia la continuidad de f, en función de a, b, para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax+b}, & si\ x<1,\\ e, & si\ x=1\\ e-ax+1, & si\ x>1\end{cases}$$

Solución 4.1:

Dibujamos las gráficas de las dos rectas y la curva para establecer la figura de la cual queremos hallar su área.



Hallamos los puntos de corte entre las gráficas.

$$\left.\begin{matrix} y=x^3\\ y=x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^3=x\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ x=-1\\ x=1\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} y=x^3\\ y=2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^3=2x\Rightarrow x^3-2x=0\Rightarrow x(x^2-2)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ x^2-1=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde



El área de la región delimitada por las tres gráficas es simétrica. Será el doble del área de la región situada en el primer cuadrante. Calculamos esta área como la suma de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la recta $y=2x$ e $y=x$ y la integral definida entre 1 y $\sqrt{2}$ de la diferencia entre la recta $y=2x$ y la curva $y=x^3$.

$$\int_0^1 2x-x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x-x^3\,dx=\left[x^2-\frac{x^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4}\right]-\left[1^2-\frac{1^4}{4}\right]=2-\frac{4}{4}-1+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

El área total de la figura limitada por $y=x^3$, $y=2x$ e $y=x$ vale:

$$\text{Área}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}=1.5\ \text{unidades cuadradas}$$

BY NC SA

Solución 4.2:

a) Para que una recta tangente a la curva en $x=a$ sea horizontal su pendiente debe ser 0, por lo que debe ser $f'(a)=0$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{3}x^2-4x+3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

La recta tangente a la curva en $x=1$ es horizontal.

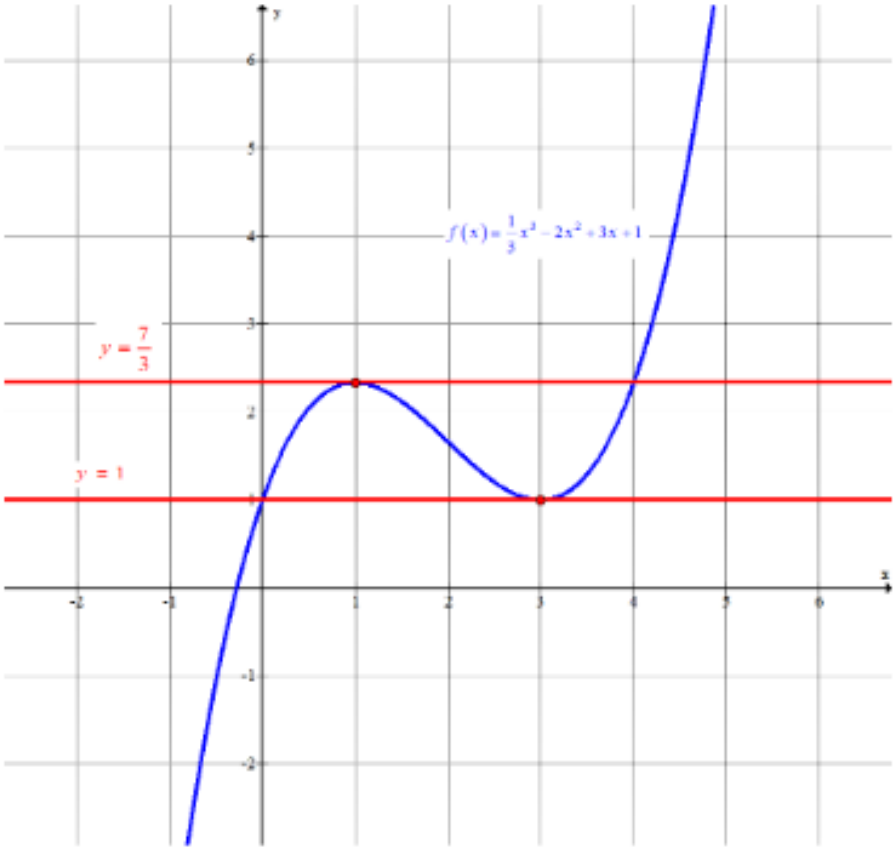
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}\\ f'(1)=1^2-4+3=0\\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{7}{3}=0(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x=3$ es horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1\\ f'(3)=3^2-4\cdot 3+3=0\\ y-f(3)=f'(3)(x-3)\end{array}\right\} \Rightarrow y-1=0(x-3)\Rightarrow \boxed{y=1}$$

Las dos rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f son: $y=\frac{7}{3}$ e $y=1$.

BY NC SA



b) En el intervalo $(-\infty,1)$ la función tiene la expresión $f(x)=e^{ax+b}$, que es una exponencial y por tanto continua.
En el intervalo $(1,+\infty)$ la función tiene la expresión $f(x)=e-ax+1$, que es una función lineal y por tanto continua.
Averiguamos cuando es continua la función en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=e \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{ax+b}=e^{a+b} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e-ax+1=e-a+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow e=e^{a+b}=e-a+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e=e^{a+b} \to a+b=1 \\ e-a+1=e \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases} \Rightarrow 1+b=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función es continua para $a=1$ y $b=0$.

BY NC SA

Problema 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P \equiv (0,1,1)$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta *r*. [1 punto]

b) Halla la distancia de P a la recta *r*. [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de *a* para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1; x+y+z=1 \\ \pi_2: (a-1)x+y+z=a \\ \pi_3: x+(a-1)y-z=0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

Solución 5.1:

a) El plano π perpendicular a la recta *r* tiene como vector normal el vector director de la recta.

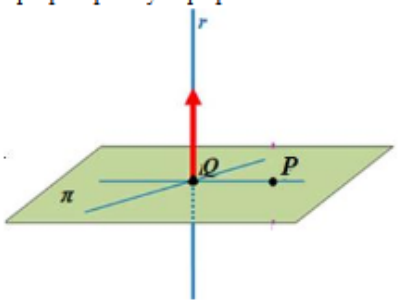
$$r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} = (3,1,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \vec{v_r} = (3,1,-1) \\ P(0,1,1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: 3x+y-z+D=0 \\ P(0,1,1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0+1-1+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x+y-z=0}$$

El plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta *r* tiene ecuación $\pi: 3x+y-z=0$

b) Hemos hallado el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta *r*: $\pi: 3x+y-z=0$.



Hallamos el punto Q de corte del plano con la recta *r*.

$$r: \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} = (3,1,-1) \\ A_r(0,0,11) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=11-\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \pi: 3x+y-z=0 \\ r: \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=11-\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3(3\lambda)+\lambda-(11-\lambda)=0 \Rightarrow 9\lambda+\lambda-11+\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda=11 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3\cdot 1=3 \\ y=1 \\ z=11-1=10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3,1,10)}$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector que une los puntos P y Q.

$$\left.\begin{matrix} Q(3,1,10) \\ P(0,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3,1,10) - (0,1,1) = (3,0,9)$$

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{90} = \boxed{3\sqrt{10} \simeq 9.49\ u}$$

La distancia del punto P a la recta r vale $3\sqrt{10} \simeq 9.49$ unidades.

BY NC SA

Solución 5.2:

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & -1\end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1 & a\\ 1 & a-1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & -1\end{vmatrix}=-1+1+(a-1)^2-1+a-1-a+1=(a-1)^2-1=$$

$$=a^2-2a+1-1=a^2-2a$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-2a=0\Rightarrow a(a-2)=0\Rightarrow \begin{cases}\boxed{a=0}\\ \boxed{a=2}\end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq 0$ y $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{ª}}+\text{Fila } 1^{\text{ª}}\\ -1\quad 1\quad 1\quad 0\\ \hline 1\quad 1\quad 1\quad 1\\ \hline 0\quad 2\quad 2\quad 1\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{ª}}\end{array}\right\}$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} - \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} + \text{Fila } 2^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A} & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

Los rangos de A y A/B son iguales a 2, menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{ª}} - \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{ª}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} - \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{\text{Fila } 3^{\text{ª}} \leftrightarrow \text{Fila } 2^{\text{ª}}\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A} & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 1 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

a) Para cualquier valor de a distinto de 0 y 2 el sistema planteado tiene una única solución que es el punto de corte de los tres planos.
Determinamos las coordenadas del punto de corte de los tres planos para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ usando el método de Cramer.

BY NC SA

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ 0 & a-1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-1+0+a^2-a-0+a-a+1}{a(a-2)}=\frac{a^2-a}{a(a-2)}=\frac{a(a-1)}{a(a-2)}=\frac{a-1}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & a & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-a+1+0-a+a-1+0}{a(a-2)}=\frac{-a}{a(a-2)}=\frac{-1}{a-2}=\frac{1}{2-a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & a\\ 1 & a-1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{0+a+(a-1)^2-1-0-a(a-1)}{a(a-2)}=\frac{a+a^2-2a+1-1-a^2+a}{a(a-2)}=$$

$$=\frac{0}{a(a-2)}=0$$

La solución es $x=\frac{a-1}{a-2}$, $y=\frac{1}{2-a}$ y $z=0$. El punto de corte de los tres planos tiene coordenadas $\left(\frac{a-1}{a-2},\frac{1}{2-a},0\right)$.

b) Los planos se cortan en una recta para $a=0$. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los planos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}^{A}\ \overbrace{\begin{matrix}1\\ 1\\ 0\end{matrix}}^{B}\right)^{A/B}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y+z=1\\ 2y+2z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y+z=1\\ y+z=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y+z=1\\ y=\frac{1}{2}-z\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

BY NC SA
Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio Martínez García

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2}-z+z=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

La recta intersección de los tres planos tiene ecuaciones paramétricas $r:\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Álvaro Garmendia Antolín

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Problema 1:

Dada la matriz real $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda-2 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda-1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ.

b) (1 punto) Para el caso λ = 2, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Problema 2:

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.
Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m^2 y la parte no techada, 50 €/m^2 pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Problema 3:

Dados el plano $\pi: 2x+2y-z=13$ y la recta

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$$

a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto P(2, 0, 0) respecto al plano π.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes**:
b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta *r*.
b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es ortogonal al plano π.

BY NC SA

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 4:

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media μ = 24 horas y desviación típica σ = 3 horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.

b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que P(B) = 0.4, $P\left(\overline{A\cup B}\right)=0.4$ y P(B|A) = 0.2, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) P(A) y P(A∩B).

b) (1 punto) P((A ∩ B)|(A ∪ B)).

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 5:

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f\left(x\right)=\ln\left(x\right)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y la recta $x=e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

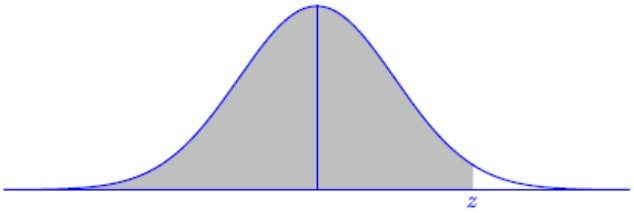
$$f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2-sen\left(ax\right)+b & si \quad x<0\\ \dfrac{2e^x}{1+x^2} & si \quad x\geq 0\end{cases}.$$

a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=0$

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

BY NC SA

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la matriz real $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda-2 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda-1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ.

b) (1 punto) Para el caso λ = 2, resolver la ecuación matricial $A^2-AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 y su rango puede ser 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda-2 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda-1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(\lambda-2)(\lambda-1)+0-\lambda-0-0=$$

$$=1+\lambda^2-\lambda-2\lambda+2-\lambda=\lambda^2-4\lambda+3$$

$$|A|=0\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=\lambda}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=\lambda}\end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda\neq3$ y $\lambda\neq1$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de A es 3.

CASO 2. $\lambda=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $\lambda=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

BY NC SA

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$. El rango de A es 2.

Conclusión: Para $\lambda\neq 3$ y $\lambda\neq 1$ el rango de A es 3 y para $\lambda=1$ y $\lambda=3$ el rango es 2.

b) Para λ = 2 sabemos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto la matriz A tiene inversa. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2-AX=I\Rightarrow A^2-I=AX\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A-A^{-1}\cdot I=A^{-1}AX\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot A-A^{-1}=I\cdot X\Rightarrow \boxed{A-A^{-1}=X}$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2-2 & 2\\ 0 & 1 & 2-1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-2-0-0=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1-2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

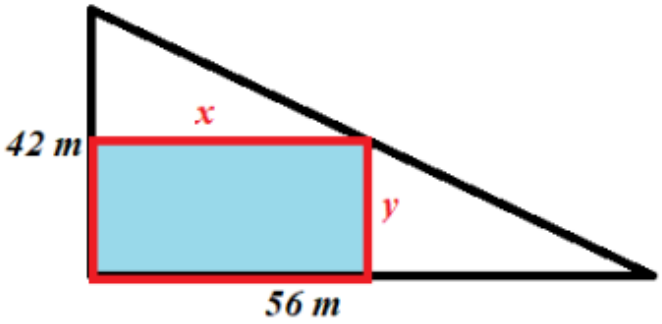
Problema 2:

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m^2 y la parte no techada, 50 €/m^2 pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Solución:

Dibujamos la situación planteada.

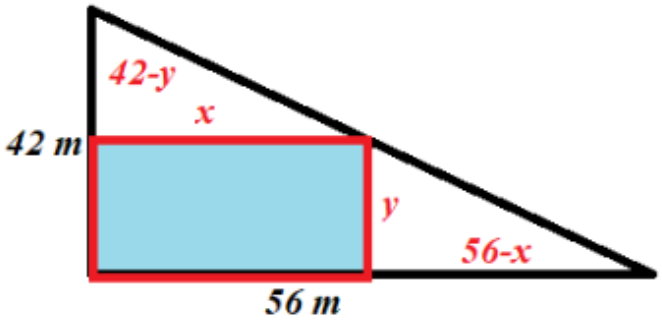


El área del rectángulo techado es $x \cdot y$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $30x \cdot y$ euros.

El resto tiene un área de $\frac{42 \cdot 56}{2} - xy = 1176 - xy$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $50 \cdot 1176 - 50xy = 58800 - 50xy$ euros.

El coste total del alicatado es $C(x, y) = 30xy + 58800 - 50xy = 58800 - 20xy$ euros.

Buscamos la relación entre x e y. Los triángulos rectángulos pequeños son semejantes.



Se cumple que los catetos tienen longitudes proporcionales.

$$\frac{42-y}{y} = \frac{x}{56-x} \Rightarrow (42-y)(56-x) = xy \Rightarrow 2352 - 56y + \cancel{xy} - 42x = \cancel{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -56y = 42x - 2352 \Rightarrow y = \frac{2352}{56} - \frac{42}{56}x \Rightarrow y = 42 - \frac{3}{4}x$$

Obtenemos la expresión del coste total del alicatado del jardín.

$$\left.\begin{array}{l} y = 42 - \dfrac{3}{4}x \\ C(x,y) = 58800 - 20xy \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = 58800 - 20x\left(42 - \frac{3}{4}x\right) = 58800 - 840x + 15x^2$$

El coste del alicatado es $C(x) = 15x^2 - 840x + 58800$ euros.

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$C(x) = 15x^2 - 840x + 58800 \Rightarrow C'(x) = 30x - 840$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 30x - 840 = 0 \Rightarrow 30x = 840 \Rightarrow \boxed{x = \frac{840}{30} = 28}$$

Sustituimos $x = 28$ en la segunda derivada.

$$C'(x) = 30x - 840 \Rightarrow C''(x) = 30 \Rightarrow C''(28) = 30 > 0$$

Para $x = 28$ se anula la primera derivada y la segunda derivada es positiva, por lo que la función presenta un valor mínimo para $x = 28$.

Para este valor el otro lado de la zona techada vale $y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$.

Las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo son 28 metros en el lado largo y 21 en el lado corto, es decir, a la mitad de cada lado.

Problema 3:

Dados el plano $\pi: 2x+2y-z=13$ y la recta

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$$

a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto P(2, 0, 0) respecto al plano π.

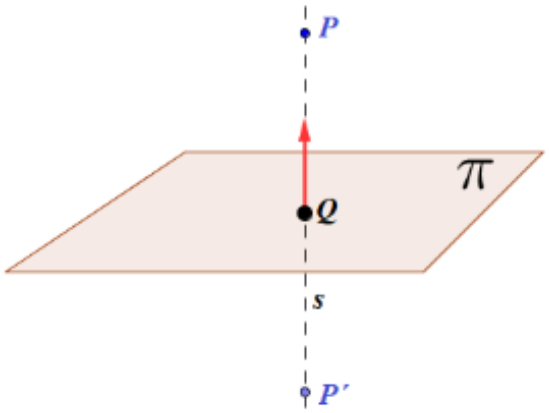
b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes**:

b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta *r*.

b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es ortogonal al plano π.

Solución:

a) Hallamos el punto simétrico P´ del punto P respecto del plano determinando primero la recta *s* perpendicular al plano que pasa por P.



$$\pi: 2x+2y-z=13 \Rightarrow \vec{n}=(2,2,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,0)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{n}=(2,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta *s* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} s: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \\ \pi: 2x+2y-z=13 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+2\lambda)+2\cdot 2\lambda-(-\lambda)=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4\lambda+4\lambda+\lambda=13 \Rightarrow 9\lambda=9 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\cdot 1=4 \\ y=2\cdot 1=2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(4,2,-1)}$$

El punto P´ es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\vec{PQ}$.

BY NC SA

$$\overline{PQ} = (4,2,-1) - (2,0,0) = (2,2,-1)$$

$$P' = Q + \overline{PQ} = (4,2,-1) + (2,2,-1) = (6,4,-2)$$

El punto simétrico del punto P(2, 0, 0) respecto al plano π tiene coordenadas $P'(6,4,-2)$.

b1) Determinamos la posición relativa de la recta r y el plano π.

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \bar{v}_r = (1,1,4)$$

$$\pi: 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \bar{n} = (2,2,-1)$$

$$\bar{v}_r \cdot \bar{n} = (1,1,4)(2,2,-1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta podemos afirmar que la recta es paralela o está contenida en el plano.
La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4} \Rightarrow P_r(2,0,0) \\ \pi: 2x + 2y - z - 13 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|2\cdot 2 + 2\cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \boxed{3u}$$

La distancia tiene un valor de 3 unidades.

b2) El plano π′ que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano. También contiene al punto $P_r(2,0,0)$ de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(2,0,0) \in \pi' \\ \bar{u} = \bar{v}_r = (1,1,4) \\ \bar{v} = \bar{n} = (2,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x-2) + 8y + 2z - 2z + y - 8(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 + 8y + 2z - 2z + y - 8x + 16 = 0 \Rightarrow -9x + 9y + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi': x - y - 2 = 0$.

BY NC SA

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 4:

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media μ = 24 horas y desviación típica σ = 3 horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.

b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que P(B) = 0.4, $P\left(\overline{A\cup B}\right)=0.4$ y P(B|A) = 0.2, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) P(A) y P(A∩B).

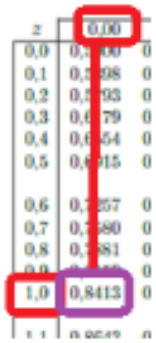
b) (1 punto) P((A ∩ B)|(A ∪ B)).

Solución 4.1:

a) X = Duración en horas de una batería. X = N(24, 3).

La batería es defectuosa si $X<21$. Nos piden calcular $P(X<21)$.

$$P(X<21)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-24}{3}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{21-24}{3}\right)=P(Z<-1)=P(Z>1)=$$



$$=1-P(Z\le 1)=\left\{\begin{matrix}Miramos\ en\ la\\ tabla\ N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.8413=\boxed{0.1587}$$

La probabilidad de que una batería sea defectuosa es de 0.1587.

b) La probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa vale $1-0.1587=0.8413$. Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de teléfonos con la batería no defectuosa de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa = 0.8413. Y = B(10, 0.8413)

Nos piden calcular $P(Y\ge 9)$.

$$P(Y\ge 9)=P(Y=9)+P(Y=10)=\binom{10}{9}0.8413^{9}\cdot 0.1587^{1}+\binom{10}{10}0.8413^{10}\cdot 0.1587^{0}=$$

$$=10\cdot 0.8413^{9}\cdot 0.1587+0.8413^{10}\simeq\boxed{0.5127}$$

La probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa tiene un valor de 0.5127.

BY NC SA

Solución 4.2:

a) Obtenemos las probabilidades pedidas.

$$P(B\,|\,A)=0.2 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.2 \Rightarrow P(A\cap B)=0.2\cdot P(A)$$

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=0.4 \Rightarrow P(A\cup B)=1-0.4=0.6$$

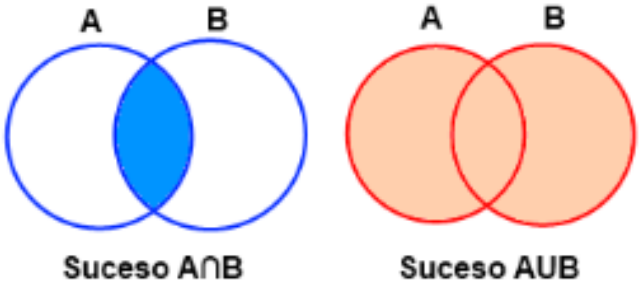
$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(B)=0.4 \\ P(A\cup B)=0.6 \\ P(A\cap B)=0.2\cdot P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.6=P(A)+0.4-0.2\cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8\cdot P(A)=0.6-0.4=0.2 \Rightarrow P(A)=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}=0.25 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=0.75} \\ \boxed{P(A\cap B)=0.2\cdot P(A)=0.05} \end{cases}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A\cap B)\,|\,(A\cup B))=\frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{0.05}{0.6}=\boxed{\frac{1}{12}=0.0833}$$

Hemos utilizado que $A\cap B$ está contenido en $A\cup B$ y por tanto $(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B$



Suceso A∩B Suceso AUB

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 5:

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x)=\ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y la recta $x=e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-sen(ax)+b & si \quad x<0\\ \dfrac{2e^x}{1+x^2} & si \quad x\geq 0\end{cases}.$$

a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=0$

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

Solución 5.1:

Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\ln(x)\\ Eje\ abscisas\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \ln(x)=0\Rightarrow \boxed{x=1}$$

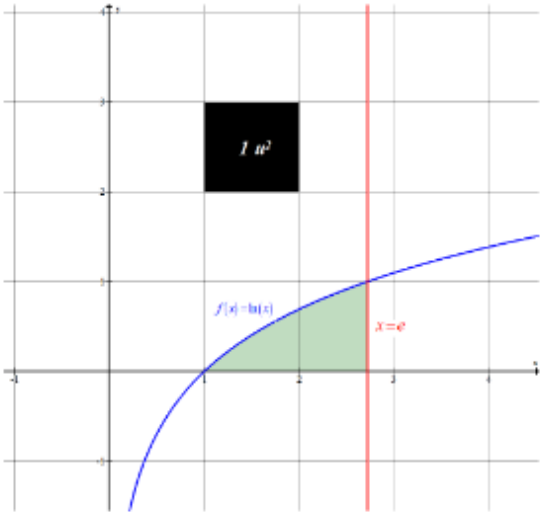
El área de la región acotada por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas y la recta $x=e$ es el valor de la integral definida de 1 a *e* de $f(x)=\ln(x)$.

$$Área=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e \ln(x)\,dx=\ldots$$

$$\int \ln(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x)\rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=dx\rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}=x\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln(x)-\int dx=x\ln(x)-x+K$$

$$\ldots=\left[x\ln(x)-x\right]_1^e=\left[e\cdot\ln(e)-e\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]=e\cdot 1-e-1\cdot 0+1=\boxed{1\ u^2}$$

Dibujamos la región del plano de la que hemos hallado el área.



Solución 5.2:

a) Para que la función sea continua deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{2e^0}{1+0^2}=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^x}{1+x^2}=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2-sen(ax)+b=3\cdot 0^2-sen(a\cdot 0)+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=2}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} 3x^2-sen(ax)+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{2e^x}{1+x^2} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$. Esta función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ siendo su derivada $f'(x)=\begin{cases} 6x-a\cdot\cos(ax) & si \quad x<0 \\ \dfrac{2e^x(1+x^2)-2x\cdot 2e^x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 6x-a\cdot\cos(ax)=6\cdot 0-a\cdot\cos(a\cdot 0)=-a \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2e^0(1-2\cdot 0+0^2)}{(1+0^2)^2}=2 \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow -a=2\Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Los valores buscados son $a=-2$ y $b=2$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{2e^2}{1+2^2}=\dfrac{2}{5}e^2 \\ f'(2)=\dfrac{2e^2(1-2\cdot 2+2^2)}{(1+2^2)^2}=\dfrac{2e^2}{25} \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{2}{5}e^2=\frac{2e^2}{25}(x-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-\frac{2}{5}e^2=\frac{2e^2}{25}x-\frac{4e^2}{25}\Rightarrow y=\frac{2e^2}{25}x-\frac{4e^2}{25}+\frac{2}{5}e^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2e^2}{25}x-\frac{4e^2}{25}+\frac{10e^2}{25}\Rightarrow \boxed{y=\frac{2e^2}{25}x+\frac{6e^2}{25}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación $y=\dfrac{2e^2}{25}x+\dfrac{6e^2}{25}$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACI ´ON: Cada pregunta se calificar ´a sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Responda a las tres preguntas siguientes (calificaci ón máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El $85\,\%$ de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El $75\ \%$ de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el $5\ \%$ de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.

b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Problema 2:

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.
Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Problema 3:

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.

b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Problema 4:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t,\ s \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.

b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1, r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P.

a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Problema 5:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - a)\,\mathrm{sen}(3x)dx = \frac{2\pi}{9}.$$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El $85\,\%$ de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El $75\ \%$ de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el $5\ \%$ de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.

b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Solución:

a) El 100 – 75 = 25 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan tarde por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.
El 15% de los alumnos viven fuera de la localidad y el 100 – 75 = 25% de ellos llegan tarde, es decir, el $0.15 \cdot 0.25 = 0.0375 = 3.75$ % del total.
El 85% de los alumnos viven en la misma localidad y el 5% de ellos llegan tarde, es decir, el $0.05 \cdot 0.85 = 0.0425 = 4.25$ % del total.
El porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora es $3.75 + 4.25 = 8\%$.

b) Llamamos L al suceso "el alumno vive en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo" y T a "el alumno llega tarde a clase por la mañana".
Por los datos proporcionados sabemos que $P(L)=0.85;\ P(\overline{L})=1-0.85;\ P(\overline{T}/\overline{L})=0.75$ y por lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $P(T)=0.08$.
Nos piden calcular $P(\overline{L}/\overline{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{L}/\overline{T})=\frac{P(\overline{L}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(\overline{L})P(\overline{T}/\overline{L})}{1-P(T)}=\frac{(1-0.85)\cdot 0.75}{1-0.08}=\boxed{\frac{45}{368}\simeq 0.1223}$$

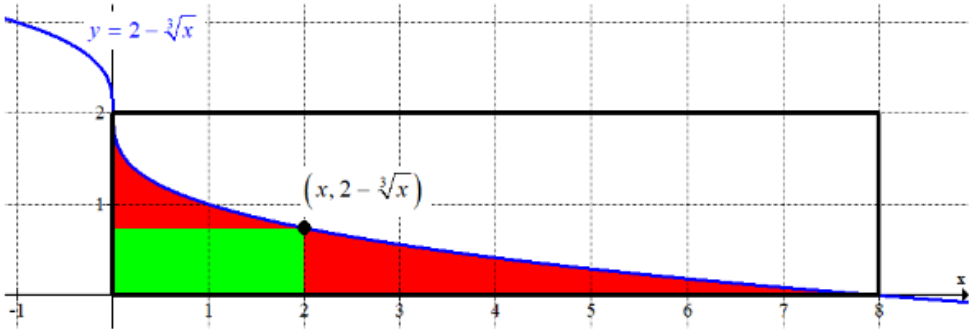
La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana tiene un valor de $\frac{45}{368}\simeq 0.1223$.

Problema 2:

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.
Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Solución:

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Para que el área roja sea lo menor posible el rectángulo verde debe tener la mayor área posible.
Hallamos la expresión del área del rectángulo de base x y altura $2-\sqrt[3]{x}$.

$$A(x) = x\left(2-\sqrt[3]{x}\right) = 2x - x\cdot x^{1/3} = 2x - x^{4/3}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = 2x - x^{4/3} \Rightarrow A'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{4/3-1} = 2 - \frac{4x^{1/3}}{3} = \frac{6-4\sqrt[3]{x}}{3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6-4\sqrt[3]{x}}{3} = 0 \Rightarrow 6 - 4\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow 6 = 4\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}}$$

La función presenta un punto crítico en $x = \frac{27}{8}$. Averiguamos el signo de la segunda derivada en dicho valor.

$$A'(x) = \frac{6-4x^{1/3}}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4\frac{1}{3}x^{1/3-1}}{3} = \frac{-4}{9}x^{-2/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow A''\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}} < 0$$

BY NC SA

Para $x=\frac{27}{8}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función tiene un máximo relativo para $x=\frac{27}{8}$. El área roja es la menor posible para $x=\frac{27}{8}$.

El área del rectángulo que es la bandera tiene un valor de $8 \cdot 2 = 16$ unidades cuadradas.

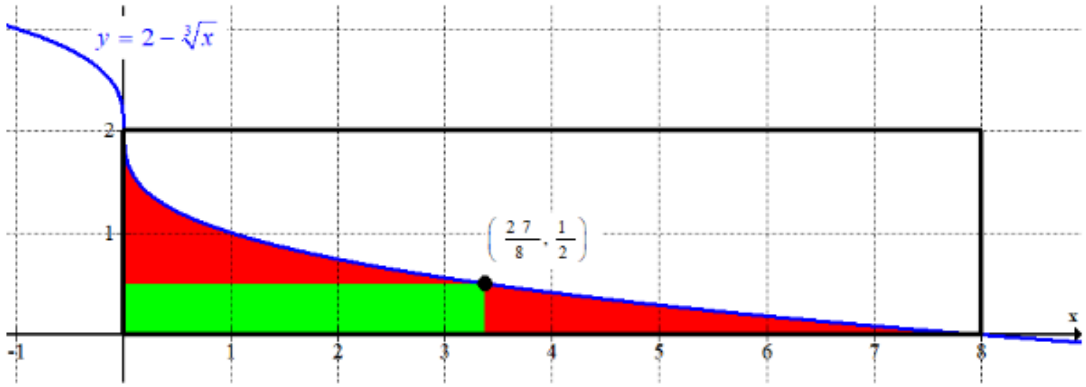
El área del trozo de bandera situada por debajo de la gráfica de $y=2-\sqrt[3]{x}$ es el valor de la integral definida de la función de 0 a 8.

$$\int_0^8 2-x^{1/3}dx=\left[2x-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+1/3}\right]_0^8=\left[2x-\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^8=\left[2\cdot 8-\frac{3}{4}8^{4/3}\right]-\left[2\cdot 0-\frac{3}{4}0^{4/3}\right]=16-12=4$$

El área de color blanco vale $16-4=12$ unidades cuadradas.

El área del rectángulo verde es $A\left(\frac{27}{8}\right)=\frac{27}{8}\left(2-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)=\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{16}=1.6875\ u^2$.

El área de la región de color rojo vale $4-1.6875=2.3125$ unidades cuadradas.



Problema 3:

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-1&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX+X=B$.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.

b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Solución:

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX+X=B\Rightarrow (A+I)X=B\Rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz A + I.

$$A+I=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$|A+I|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&2&2\end{vmatrix}=8+0+0-0-0-0=8\neq 0$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{Adj(A+I)^{T}}{|A+I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\1&0&2\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&2\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\2&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&2&-2\\0&4&0\\0&-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/4&-1/4\\0&1/2&0\\0&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=(A+I)^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2&1/4&-1/4\\0&1/2&0\\0&-1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\\\frac{1}{2}&0\\\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}&-\frac{2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2&0\\1/2&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\qquad\cdot\ 3}\times 2\longrightarrow 3\times 2$$

BY NC SA

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b1) Calculamos primero el determinante de la matriz C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el valor del determinante de $(2C)^{100}$.

$$\left|(2C)^{100}\right| = |2C|^{100} = \left\{\begin{matrix} C \text{ es una matriz cuadrada de orden 3} \\ |2C| = 2^3|C| \end{matrix}\right\} = \left(2^3|C|\right)^{100} =$$

$$= \{Sabemos\ que\ |C| = 1\} = \left(2^3 \cdot 1\right)^{100} = \boxed{2^{300}}$$

El determinante vale 2^{300}.

b2) Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0 = 1 \neq 0$$

La matriz A tiene determinante no nulo y es invertible.
Obtenemos la expresión de la matriz AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0-2 \\ 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+2-1 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 2 \longrightarrow 3\times 2$$

Esta matriz no es cuadrada y por tanto no tiene matriz inversa.

BY NC SA

Problema 4:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t,\ s \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.

b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1, r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P.

a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Solución4.1:

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv (x,y,z) = (1+t,1,0) \Rightarrow \begin{cases} P_1(1,1,0) \\ \vec{u_1} = (1,0,0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv (x,y,z) = (1+s,s,0) \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1,0,0) \\ \vec{v_2} = (1,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_1} = (1,0,0) \\ \vec{v_2} = (1,1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{0}{0}$$

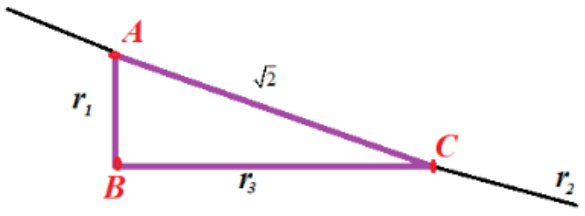
Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} P_1(1,1,0) \\ Q_2(1,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_1} = (1,0,0) \\ \vec{v_2} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r_1 y r_2 se cortan.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos el vértice A del triángulo rectángulo. Este punto es la intersección de las rectas r_1 y r_2.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+t = 1+s \\ 1 = s \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow s = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,1,0)}$$

El punto B pertenece a la recta r_1 y sus coordenadas son $B(1+t,1,0)$.

El punto C pertenece a la recta r_2 y sus coordenadas son $C(1+s,s,0)$.

Para que el triángulo ABC sea rectángulo el vector $\overrightarrow{BC}$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{BA}$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (1+s,s,0)-(1+t,1,0) = (s-t,s-1,0) \\ \overrightarrow{BA} = (2,1,0)-(1+t,1,0) = (1-t,0,0) \\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (s-t,s-1,0)\cdot(1-t,0,0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-t)(1-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s-t = 0 \rightarrow \boxed{s = t} \\ 1-t = 0 \rightarrow \boxed{t = 1} \end{cases}$$

Tenemos dos opciones para formar un triángulo rectángulo. Averiguamos cuando se cumple que la hipotenusa tenga longitud $\sqrt{2}$.

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+1,1,0) = (2,1,0) \Rightarrow A = B \\ C(1+s,s,0) \end{cases}$$

Para $t = 1$ los puntos A y B son el mismo y no existe el triángulo ABC.
Para $t = s$ hallamos la longitud de los catetos.

$$t = s \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+s,1,0) \\ C(1+s,s,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1+s,1,0)-(2,1,0) = (s-1,0,0) \\ \overrightarrow{BC} = (1+s,s,0)-(1+s,1,0) = (0,s-1,0) \end{cases} \Rightarrow$$

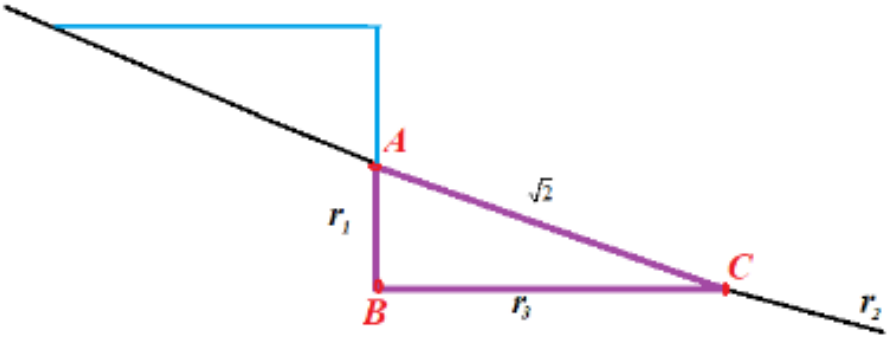
$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(s-1)^2+0^2+0^2} = |s-1| \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2+(s-1)^2+0^2} = |s-1| \end{cases}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{AB}|=|s-1|\\|\overrightarrow{BC}|=|s-1|\\|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^2=|s-1|^2+|s-1|^2\Rightarrow 2|s-1|^2=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|s-1|^2=1\Rightarrow|s-1|=1\Rightarrow\begin{cases}s-1=1\rightarrow s=2\rightarrow\begin{cases}A(2,1,0)\\B(3,1,0)\\C(3,2,0)\end{cases}\\s-1=-1\rightarrow s=0\rightarrow\begin{cases}A(2,1,0)\\B(1,1,0)\\C(1,0,0)\end{cases}\end{cases}$$



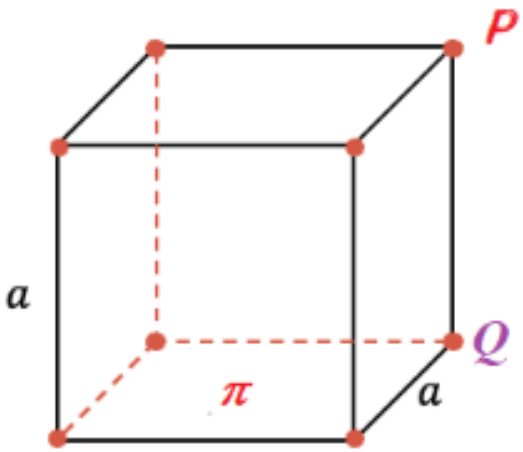
Existen dos soluciones posibles. Hallamos la recta r_3 que contiene los puntos B y C.

$$\left.\begin{array}{l}B(3,1,0)\in r_3\\C(3,2,0)\in r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{BC}=(3,2,0)-(3,1,0)=(0,1,0)\\C(3,2,0)\in r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r_3:\begin{cases}x=3\\y=2+\lambda\\z=0\end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l}B(1,1,0)\in s_3\\C(1,0,0)\in s_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_3}=\overrightarrow{BC}=(1,0,0)-(1,1,0)=(0,-1,0)\\C(1,0,0)\in s_3\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{s_3:\begin{cases}x=1\\y=-\lambda\\z=0\end{cases}}$$

Las rectas solución del problema son $r_3:\begin{cases}x=3\\y=2+\lambda\\z=0\end{cases}$ y $s_3:\begin{cases}x=1\\y=\lambda\\z=0\end{cases}$.

Solución 4.2:



a) La longitud del lado del cubo es la distancia del punto P al plano $\pi: 2x-2y+z=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-2y+z-1=0\\ P(1,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow a=d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1-2\cdot 2+1-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{9}}=\boxed{\frac{2}{3}\,u}$$

La longitud el lado del cubo es $\frac{2}{3}$ unidades.

El volumen del cubo es $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ unidades cúbicas.

b) Hallamos el vértice del cubo que es la proyección ortogonal del punto P en el plano. Para ello primero hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x-2y+z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(2,-2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(2,-2,1)\\ P(1,2,1)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2-2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+\lambda\end{cases}$$

El punto Q que buscamos es el punto de corte de la recta r y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2-2\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}\\ \pi: 2x-2y+z=1\end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda)-2(2-2\lambda)+1+\lambda=1 \Rightarrow 2+4\lambda-4+4\lambda+1+\lambda=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{2}{9} = \frac{13}{9} \\ y = 2 - 2\frac{2}{9} = \frac{14}{9} \\ z = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)}$$

Otro vértice del cubo es el punto $Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

BY NC SA

Problema 5:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a)\,\mathrm{sen}(3x)dx = \frac{2\pi}{9}.$$

Solución: 5.1:

Para que exista el logaritmo neperiano debe ser $x>0$. Además, el denominador no se debe anular, por lo que $x\neq 1$. El dominio de la función es $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Obtenemos la expresión de la derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x)=\frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\ln(x)-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}=0 \Rightarrow \ln(x)-1=0 \Rightarrow \ln(x)=1 \Rightarrow \boxed{x=e}$$

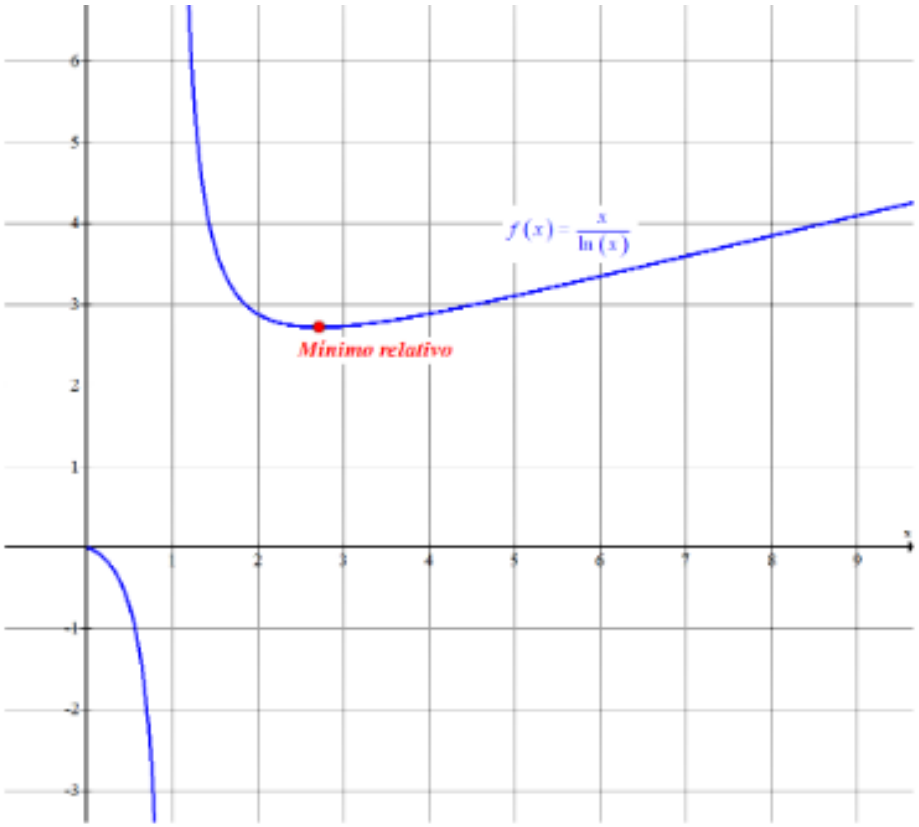
Tenemos un punto crítico en $x=e$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=1$ y $x=e$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.1$ y la derivada vale $f'(0.1)=\frac{\ln(0.1)-1}{(\ln(0.1))^2}=-0.6<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,e)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{\ln(2)-1}{(\ln(2))^2}=-0.6<0$. La función decrece en $(1,e)$.
- En el intervalo $(e,+\infty)$ tomamos $x=e^2$ y la derivada vale $f'(e^2)=\frac{\ln(e^2)-1}{(\ln(e^2))^2}=\frac{1}{4}>0$. La función crece en $(e,+\infty)$.

La función decrece en $(0,1)\cup(1,e)$ y crece en $(e,+\infty)$.

Como la función decrece antes de $x=e$ y crece después podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x=e$.

Tenemos que $f(e)=\frac{e}{\ln(e)}=e$, por lo que las coordenadas del mínimo relativo son (e,e)


$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$
Mínimo relativo

Solución 5.2:

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\int (x-a)sen(3x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-a \to du = dx \\ dv = sen(3x)dx \to v = \int sen(3x)dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) \end{array} \right\} =$$

$$= (x-a)\frac{-\cos(3x)}{3} - \int \frac{-\cos(3x)}{3}dx = \frac{-(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x)dx =$$

$$= \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{sen(3x)}{3} = \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{sen(3x)}{9} + K$$

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a)sen(3x)dx = \left[\frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{sen(3x)}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left[\frac{\left(a-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3\frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{sen\left(3\frac{\pi}{3}\right)}{9}\right] - \left[\frac{(a-0)\cos(3\cdot 0)}{3} + \frac{sen(3\cdot 0)}{9}\right] =$$

$$= \frac{\left(a-\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi)}{3} + \frac{sen(\pi)}{9} - \frac{a\cos(0)}{3} - \frac{sen(0)}{9} = \frac{-\left(a-\frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{0}{9} - \frac{a}{3} - \frac{0}{9} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{3}-a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi-3a}{9} - \frac{a}{3} = \frac{\pi-3a-3a}{9} = \boxed{\frac{\pi-6a}{9}}$$

Utilizamos el resultado obtenido para resolver la igualdad.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a)sen(3x)dx = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \frac{\pi-6a}{9} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \pi-6a = 2\pi \Rightarrow -6a = \pi \Rightarrow \boxed{a = \frac{-\pi}{6}}$$

El valor que cumple la igualdad es $a = \frac{-\pi}{6}$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Universidad de Murcia

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones. solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 1:

Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas: x miles de euros en publicidad, y miles de euros en materiales, z miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo, k, que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k. Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

a) **[0,75 ptos.]** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.

b) **[1,25 ptos.]** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de k si es necesario.

Problema 2:

Considere un punto P de coordenadas *(a.b)* que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen O(0,0). Sea x el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

a) **[0,75 ptos.]** Demuestre que el área del rectángulo de vértices 0(0,0), A(a,0). B(0, b) y P(a,b) viene dada por la función $f(x)=100\cdot sen(x)\cdot\cos(x)$.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule el ángulo x (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Problema 3:

Considere el plano $\pi: 2x-y+3z-5=0$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

a) **[0,75 ptos.]** Estudie la posición relativa de r y π.

b) **[1,25 ptos.]** Si r corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma r con π. Si r es paralela a π, calcule la distancia de r a π.

BY NC SA

Problema 4: (a elegir entre** 4.1 y 4.2**):

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).

4.2) a) **[1,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

b) **[0,5 ptos.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (e. 1).

Problema 5: (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

b) **[0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

BY NC SA

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

BY NC SA

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

		p												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas: x miles de euros en publicidad, y miles de euros en materiales, z miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo, k, que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k. Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

a) **[0,75 ptos.]** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.

b) **[1,25 ptos.]** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de k si es necesario.

Solución:

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al enunciado.

La suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros → $x+y+z=12$

La inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k → $x+2y=z+k$.

El doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros → $2x-y+z=4$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ x+2y=z+k \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ x+2y-z=k \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\}$$

b) Discutimos el sistema en función del valor de k.

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ x+2y-z=k \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 2^a - Ecuación\ 1^a \\ \begin{array}{rrrr} x & +2y & -z & =k \\ -x & -y & -z & =-12 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & y & -2z & =k-12 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 3^a - 2\cdot Ecuación\ 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -y & +z & =4 \\ -2x & -2y & -2z & =-24 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -3y & -z & =-20 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -3y-z=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 3^a + 3\cdot Ecuación\ 2^a \\ \begin{array}{rrrr} -3y & -z & = & -20 \\ 3y & -6z & = & 3k-36 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -7z & = & 3k-56 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -7z=3k-56 \end{array}\right\}$$

BY NC SA

El sistema triangular obtenido siempre va a tener solución única, independientemente del valor de *k*. Obtenemos la expresión de su solución.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -7z=3k-56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ \boxed{z=\dfrac{3k-56}{-7}=8-\dfrac{3k}{7}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+8-\dfrac{3k}{7}=12 \\ y-2\left(8-\dfrac{3k}{7}\right)=k-12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=4+\dfrac{3k}{7} \\ y-16+\dfrac{6k}{7}=k-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=4+\dfrac{3k}{7} \\ \boxed{y=4+k-\dfrac{6k}{7}=4+\dfrac{k}{7}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+4+\frac{k}{7}=4+\frac{3k}{7} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2k}{7}}$$

La solución del sistema es:

$$x=\frac{2k}{7};\ y=4+\frac{k}{7};\ z=8-\frac{3k}{7}.$$

BY NC SA

Problema 2:

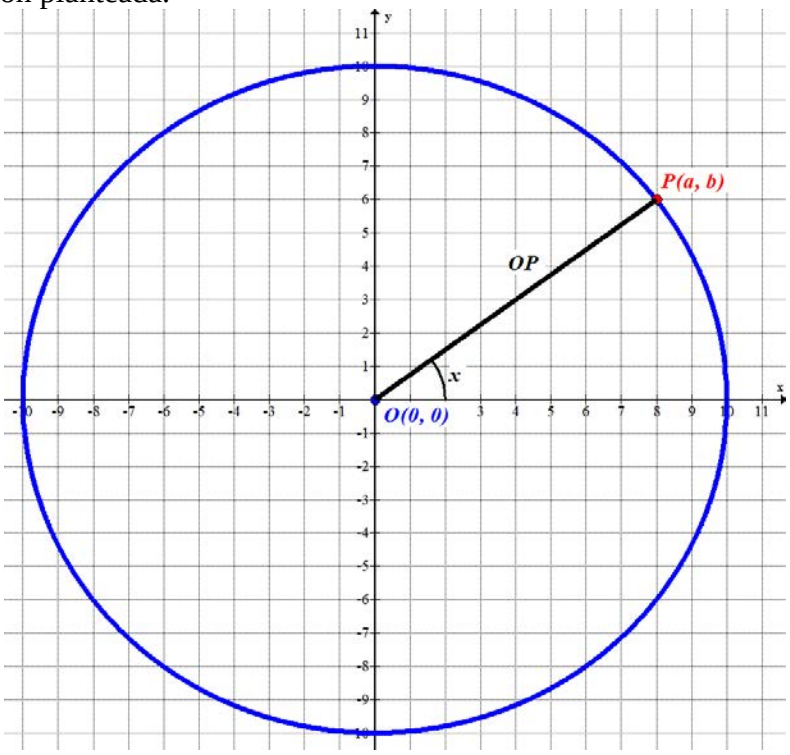
Considere un punto P de coordenadas *(a.b)* que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen O(0,0). Sea *x* el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

a) **[0,75 ptos.]** Demuestre que el área del rectángulo de vértices 0(0,0), A(a,0). B(0, b) y P(a,b) viene dada por la función $f(x)=100\cdot sen(x)\cdot\cos(x)$.

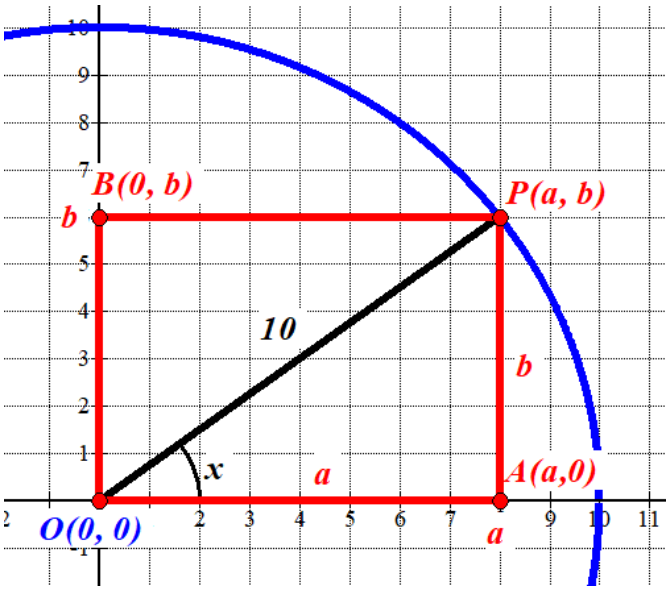
b) **[1,25 ptos.]** Calcule el ángulo *x* (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Solución:

Dibujamos la situación planteada.



a) La longitud del radio OP es 10 y el rectángulo del que queremos hallar la expresión de su área es el del dibujo siguiente.



BY NC SA

El área del rectángulo OBPA es el producto de la base por la altura: $A(x)=a\cdot b$.
Consideramos el triángulo rectángulo OAP y aplicamos las igualdades trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} sen x=\dfrac{cateto\,opuesto}{hipotenusa}=\dfrac{b}{10}\rightarrow b=10\cdot sen x \\ \cos x=\dfrac{cateto\,contiguo}{hipotenusa}=\dfrac{a}{10}\rightarrow a=10\cdot\cos x \\ A(x)=a\cdot b \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{A(x)=10sen x\cdot 10\cos x=100sen x\cdot\cos x}$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f(x)=100\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\Rightarrow f'(x)=100\cdot\cos(x)\cdot\cos(x)+100\cdot sen(x)\cdot(-sen(x))=$$

$$=100\cos^2(x)-100sen^2(x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 100\cos^2(x)-100sen^2(x)=0\Rightarrow \cos^2(x)-sen^2(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-sen^2(x)-sen^2(x)=0\Rightarrow -2sen^2(x)=-1\Rightarrow sen^2(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x \text{ está en el primer cuadrante} \\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$$

Hemos obtenido el punto crítico $x=\dfrac{\pi}{4}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x)=100\cos^2(x)-100sen^2(x)\Rightarrow f''(x)=200\cos(x)(-sen(x))-200sen(x)\cos(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=-200sen(x)\cos(x)-200sen(x)\cos(x)=-400sen(x)\cos(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-400sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-400\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-200<0$$

Para $x=\dfrac{\pi}{4}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo.

La función presenta un máximo relativo para este valor del ángulo *x*. Este máximo relativo es el máximo absoluto de la función área.

BY NC SA

Problema 3:

Considere el plano $\pi: 2x-y+3z-5=0$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

a) **[0,75 ptos.]** Estudie la posición relativa de *r* y π.

b) **[1,25 ptos.]** Si *r* corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma *r* con π. Si *r* es paralela a π, calcule la distancia de *r* a π.

Solución:

a) Para estudiar la posición relativa de recta y plano obtengo un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi: 2x-y+3z-5=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-1,3)$$

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,-1,2) \\ \vec{v_r}=(2,1,-1) \end{cases}$$

Averiguamos si el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta se anula.

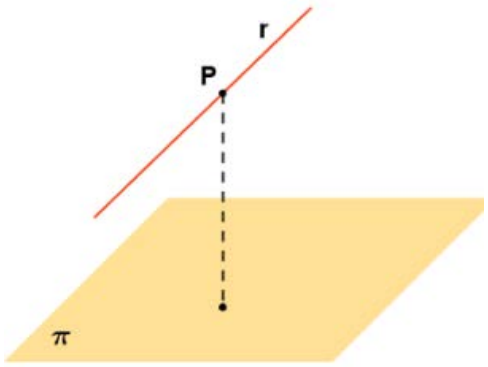
$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(2,-1,3) \\ \vec{v_r}=(2,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(2,-1,3)(2,1,-1)=4-1-3=0$$

Al ser nulo el producto escalar la recta es paralela al plano o está contenida en él. Averiguamos si el punto $P_r(1,-1,2)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y+3z-5=0 \\ ¿P_r(1,-1,2)\in\pi? \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿2\cdot 1-(-1)+3\cdot 2-5=0? \Rightarrow ¿2+1+6-5=0? \Rightarrow ¡¡NO!!$$

El punto no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

b) Como la recta es paralela al plano hallo la distancia entre recta y plano. Esta distancia es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.



BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y+3z-5=0\\ P_r(1,-1,2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|2\cdot 1-(-1)+3\cdot 2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{14}}\approx 1.07\,unidades}$$

La distancia de la recta al plano vale $\frac{4}{\sqrt{14}}\approx 1.07$ unidades.

BY NC SA

Problema 4:

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).

4.2) a) **[1,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

b) **[0,5 ptos.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (e. 1).

Solución:

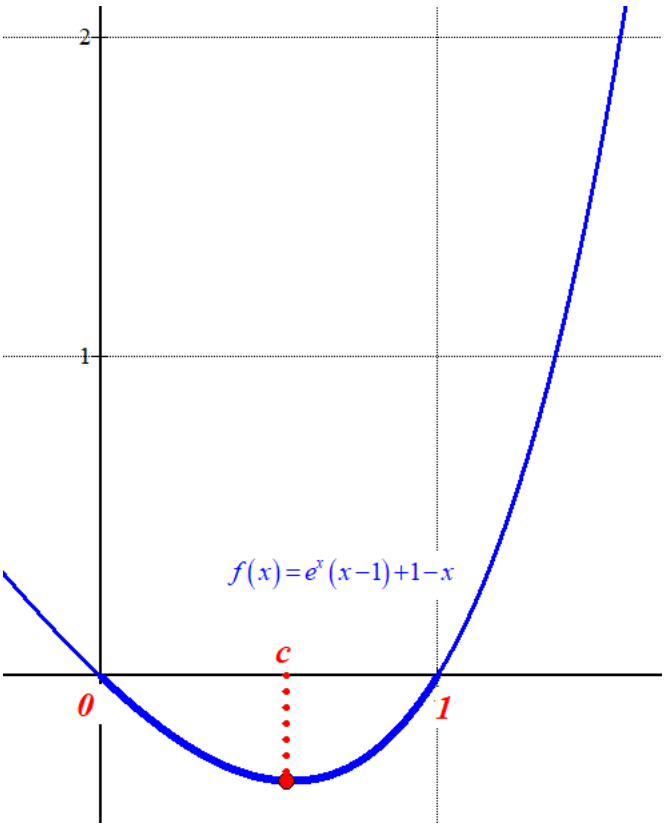
El **Teorema de Rolle** establece que si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b), y toma el mismo valor en los extremos (f(a) = f(b)), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ donde su derivada se anula, es decir, $f'(c)=0$.

Para el ejercicio consideramos la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ que es una función continua en todo pues es producto de una función exponencial y otra polinómica. También es derivable en todo por el mismo motivo.

Consideramos el intervalo (0, 1) y vemos si la función toma el mismo valor en los extremos del intervalo de definición.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0(0-1)+1-0=1(-1)+1=-1+1=0 \\ f(1)=e^1(1-1)+1-1=e\cdot 0+0=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=f(1)=0$$

Se cumplen todos los requisitos del teorema de Rolle y podemos afirmar que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).



BY NC SA

4.2.

a) Calculamos la integral pedida usando el método de cambio de variable.

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \left\{\begin{array}{l}\ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \rightarrow dx = xdt\end{array}\right\} = \int \frac{1}{\cancel{x}\cdot t^2}\cancel{x}dt = \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t} = \left\{\ln x = t\right\} = \boxed{\frac{-1}{\ln x} + K}$$

b) La primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ la hemos calculado en el apartado anterior y tiene la expresión $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + K$. Determinamos el valor de *K* para que la primitiva pase por el punto de coordenadas (e. 1).

$$\left.\begin{array}{l}F(x) = \frac{-1}{\ln x} + K \\ F(e) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{\ln e} + K = 1 \Rightarrow \frac{-1}{1} + K = 1 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-1}{\ln x} + 2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + 2$.

BY NC SA

Problema 5:

5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

b) **[0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

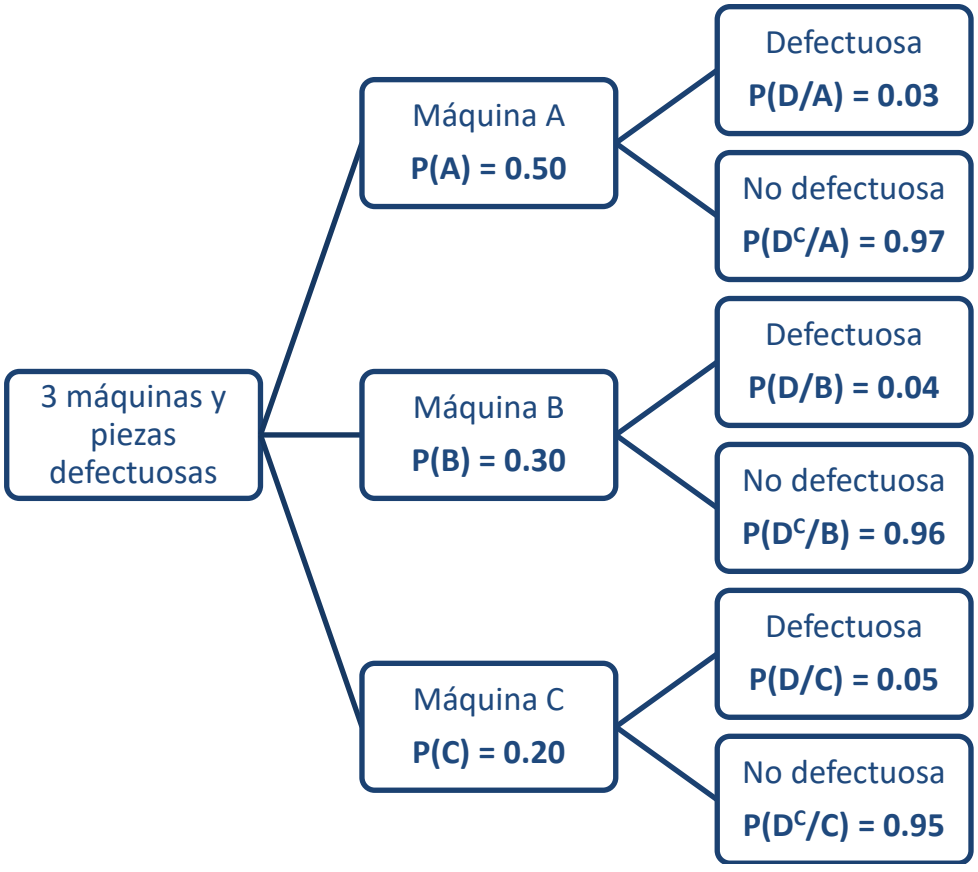
5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos “pieza producida por la máquina A, B o C. Y denominamos D al suceso “la pieza es defectuosa”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Calculamos el valor de la probabilidad $P(D)$. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total. El valor que obtendremos estará comprendido entre 0.03 y 0.05.

BY NC SA

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.2\cdot 0.05=\boxed{0.037}$$

La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa vale 0.037.

b) Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{0.3\cdot 0.04}{0.037}=\boxed{\frac{12}{37}\approx 0.3243}$$

La probabilidad de que una pieza defectuosa haya sido fabricada por la máquina B vale 0.3243.

c) Nos piden calcular $P(D^C/C)$. Esta probabilidad está puesta en el diagrama de árbol. Como nos dicen que el 5 % de las piezas producidas por la máquina C son defectuosas entonces el 95 % de las piezas producidas por la máquina C no serán defectuosas y la probabilidad pedida vale

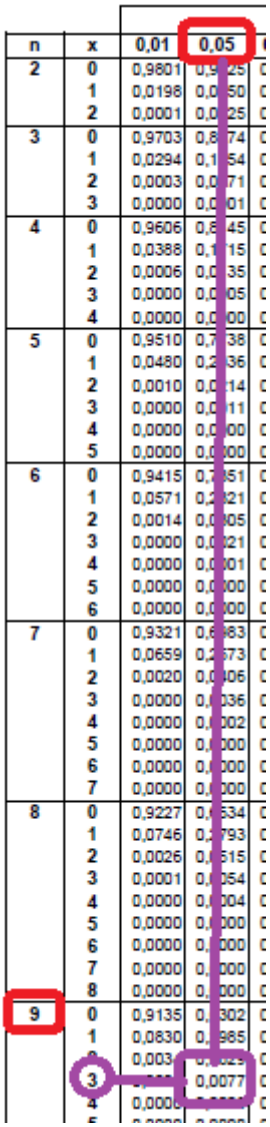
$$P(D^C/C)=0.95.$$

BY NC SA

5.2.

a) Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 9. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 9 y p = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05. X = B(9, 0.05).

Nos piden calcular $P(X=3)$. Buscamos en la tabla de la binomial y vemos que esta probabilidad vale 0.0077.



n	x	0,01	0,05
2	0	0,9801	0,9025
	1	0,0198	0,0950
	2	0,0001	0,0025
3	0	0,9703	0,8574
	1	0,0294	0,1354
	2	0,0003	0,0071
	3	0,0000	0,0001
4	0	0,9606	0,8145
	1	0,0388	0,1715
	2	0,0006	0,0135
	3	0,0000	0,0005
	4	0,0000	0,0000
5	0	0,9510	0,7738
	1	0,0480	0,2036
	2	0,0010	0,0214
	3	0,0000	0,0011
	4	0,0000	0,0000
	5	0,0000	0,0000
6	0	0,9415	0,7351
	1	0,0571	0,2321
	2	0,0014	0,0305
	3	0,0000	0,0021
	4	0,0000	0,0001
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
7	0	0,9321	0,6983
	1	0,0659	0,2573
	2	0,0020	0,0406
	3	0,0000	0,0036
	4	0,0000	0,0002
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
	7	0,0000	0,0000
8	0	0,9227	0,6634
	1	0,0746	0,2793
	2	0,0026	0,0515
	3	0,0001	0,0054
	4	0,0000	0,0004
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
	7	0,0000	0,0000
	8	0,0000	0,0000
9	0	0,9135	0,6302
	1	0,0830	0,2985
	2	0,003	
	3		0,0077
	4	0,0000	

b) Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 200. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 200 y p = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05. X = B(200, 0.05).

Nos piden calcular $P(X \geq 10)$. Como el número de repeticiones es muy alto calculamos la probabilidad pedida usando la aproximación a una normal. Como la media es $np = 200 \cdot 0.05 = 10$ y la desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = \frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3.0822$ la variable binomial X se

BY NC SA

aproxima por una variable normal $Y = N\left(10, \frac{\sqrt{38}}{2}\right)$. Esta aproximación es buena pues $np = 10 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.95 = 190 > 5$.

$$P(X \geq 10) = \{Corrección\ de\ Yates\} = P(Y \geq 9.5) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{Y - 10}{\sqrt{38}/2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{9.5 - 10}{\sqrt{38}/2}\right) = P(Z \geq -0.162) = P(Z \leq 0.162) = \left\{\begin{matrix} Miramos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = \boxed{0.5636}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	
0.1							0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA**

IMPORTANTE: En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 1:

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo de B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

a) **[1 pto.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.

b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k.

Problema 2:

PREGUNTA 2: Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+1}$.

a) **[0,5 ptos.]** Demuestre que la distancia de $P(x, y)$ al punto $A(2, 0)$ viene dada por la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$.

b) **[1 pto.]** Determine el valor de x para que la distancia a A sea mínima.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule esa distancia mínima.

Problema 3:

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2,2,-2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Problema 4:

PREGUNTA 4 ***(a elegir entre 4.1 y 4.2)*:**

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada la función $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1, 2)$.

4.2) Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

a) **[0,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.

b) **[1,5 ptos.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

BY NC SA

Problema 5:

PREGUNTA 5 (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En la urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.

a) **[1 pto.]** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[1 pto.]** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1.

5.2) **[2 ptos.]** La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo de B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

a) **[1 pto.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.

b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k.

Solución:

a) En las x cajas de tipo A habrá x manzanas, x peras y x naranjas. En las y cajas de tipo B habrá $2y$ manzanas, y peras e y naranjas. En las z cajas de tipo C habrá z manzanas, $2z$ peras y z naranjas. En total, habrá $x+2y+z$ manzanas, $x+y+2z$ peras, y $x+y+z$ naranjas, así es que el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x+2y+z=400 \\ x+y+2z=500 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

así es que el rango es 3 y, por el teorema de Roché – Frobenius, el sistema es compatible determinado. Para calcular la única solución podemos usar la regla de Cramer:

$$x = \begin{vmatrix} 400 & 2 & 1 \\ 500 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3k-900,\ y = \begin{vmatrix} 1 & 400 & 1 \\ 1 & 500 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 400-k,\ z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 400 \\ 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 500-k.$$

BY NC SA

Problema 2:

PREGUNTA 2: Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+1}$.

a) **[0,5 ptos.]** Demuestre que la distancia de $P(x, y)$ al punto $A(2, 0)$ viene dada por la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$.

b) **[1 pto.]** Determine el valor de x para que la distancia a A sea mínima.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule esa distancia mínima.

Solución:

Solución: a) El punto P se puede escribir como $P(x, \sqrt{x+1})$. La distancia entre $A(2, 0)$ y P es

$$d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x+1})^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 5} = f(x).$$

b) La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}},$$

que se anula si, y solo si, $x = \frac{3}{2}$. Como $f'(x) < 0$ en $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ (tómese, por ejemplo, $f'(1)$) y $f'(x) > 0$ en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (tómese, por ejemplo, $f'(2)$), entonces $x = \frac{3}{2}$ minimiza la distancia.

c) La distancia es

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

BY NC SA

Problema 3:

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2,2,-2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos:

$$r:\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Solución: El vector director de r se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -i + 3j + k = (-1, 3, 1).$$

Es fácil ver que $R(1, 2, 0)$ satisface la ecuación de los dos planos, de modo que $R \in r$. Podemos usar el punto $R(1, 2, 0)$, el vector vector $\vec{v}_r = (-1, 3, 1)$ y el vector $\overrightarrow{PR} = (3, 0, 2)$ para calcular la ecuación del plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x + 5y - 9z - 16 = 0.$$

BY NC SA

Problema 4:

PREGUNTA 4 (*a elegir entre 4.1 y 4.2*):

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada la función $f(x) = x\ln(x^2+1)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1,2)$.

4.2) Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

a) **[0,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.

b) **[1,5 ptos.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución 4.1:

Solución: $f(x)$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$ de modo que, por el teorema de Lagrange, existe un punto $c \in (1,2)$ tal que

$$f'(c) = f(2) - f(1) = 2\ln(5) - \ln(2) = \ln(25) - \ln(2) = \ln\left(\frac{25}{2}\right).$$

Opción 4.2 (2 ptos.): Considere la función $f(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, donde la variable x está expresada en radianes.

a) **(0,5 ptos.)** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.

b) **(1,5 ptos.)** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución 4.2:

a) La integral es inmediata:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) dx = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}(x) + C.$$

b) Observemos que $f(0) = \frac{3}{2} > 0$ y $f(\pi) = -\frac{1}{2} < 0$, y que $x = \frac{2\pi}{3}$ es solución de $f(x) = 0$, de modo que el área pedida es:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen}(x)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen}(x)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{6} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}.$$

BY NC SA

Problema 5:

PREGUNTA 5 (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En la urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.

a) **[1 pto.]** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[1 pto.]** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1.

5.2) **[2 ptos.]** La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

Solución 5.1:

Llamamos:

a) U_1 al suceso correspondiente a extraer la bola de U_1,

b) U_2 al suceso correspondiente a extraer la bola de U_2,

c) N al suceso correspondiente a extraer una bola negra,

d) B al suceso correspondiente a extraer una bola blanca.

Tenemos entonces que $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$, $P(N|U_1) = \frac{5}{8}$, $P(B|U_1) = \frac{3}{8}$, $P(N|U_2) = \frac{6}{8}$ y $P(B|U_2) = \frac{2}{8}$.

a) Usando el Teorema de la Probabilidad Total, se tiene que

$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3+2}{16} = \frac{5}{16}.$$

b) Usando el Teorema de Bayes, se tiene que

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5}.$$

BY NC SA

Solución 5.2:

Solución: Llamamos X a la variable aleatoria correspondiente a la edad. Llamamos Z a una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(0,1)$. Entonces, tenemos que

$$0,9452 = P(X < 32) = P\left(Z < \frac{32-\mu}{\sigma}\right),$$

y la tabla nos dice que $\frac{32-\mu}{\sigma} = 1,6$, es decir, $\mu + 1,6 \cdot \sigma = 32$. Por otro lado, como $P(X < 20) = 0,2119$, tenemos que

$$0,7881 = 1 - 0,2119 = P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\mu-20}{\sigma}\right),$$

y la tabla nos dice que $\frac{\mu-20}{\sigma} = 0,8$, es decir, $\mu - 0,8 \cdot \sigma = 20$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mu + 1,6 \cdot \sigma = 32 \\ \mu - 0,8 \cdot \sigma = 20 \end{cases}$$

tenemos $\mu = 24$ y $\sigma = 5$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1) Dada una hoja de papel de dimensiones $20cm \times 30cm$, calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.

Problema 2:

P2) Calcula los valores posibles de r y t para que $|A| + |B| = 4$, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}$$

Problema 3:

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2} \qquad \text{y} \qquad s = \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Problema 4.1:

P4.1) En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar:

(i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?

(iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

Problema 4.2:

BY NC SA

P4.2) Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como *el Tributo de las Tres Vacas* o *Iror Beien Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

(i) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?

(ii) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?

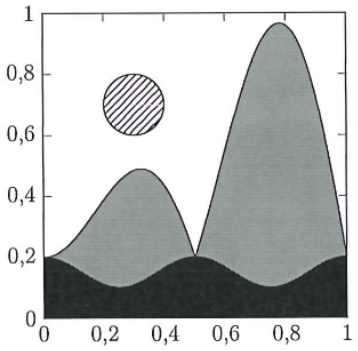
(iii) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

Problema 5.1:

P5.1) El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cos(4\pi x); \qquad (x-0{,}3)^2+(y-0{,}7)^2 = \frac{1}{100}; \qquad y = 0{,}2 + x\cdot|\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?



Problema 5.2:

P5.2) Sea $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$. Demuestra que existe un punto c en $[2, 4]$ tal que $f'(c) = \frac{1}{2}$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1) Dada una hoja de papel de dimensiones $20cm \times 30cm$, calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.

Solución:

$$V(x) = x \cdot (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) = 4x \cdot (10 - x) \cdot (15 - x) =$$

$$= 4x \cdot (150 - 10x - 15x + x^2) \Rightarrow V(x) = 4 \cdot (x^3 - 25x^2 + 150x).$$

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$V'(x) = 4 \cdot (3x^2 - 50x + 150).$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (3x^2 - 50x + 150) = 0;\ \ 3x^2 - 50x + 150 = 0;$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 1.800}}{6} = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{6} = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{6} = \frac{25 \pm 5\sqrt{7}}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}(5 - \sqrt{7}) \cong 3{,}92 \\ x_2 = \frac{5}{3}(5 + \sqrt{7}) \cong 12{,}74 \end{cases}.$$

Nótese que la solución $x_2 = \frac{5}{3}(5 + \sqrt{7})$ no es posible materialmente.

La solución es $x = \frac{5}{3}(5 - \sqrt{7})$.

BY NC SA

Se comprueba la condición de máximo a continuación:

$$V''(x) = 4 \cdot (6x - 50) = 8 \cdot (3x - 25).$$

$$V''\left[\frac{5}{3}(5-\sqrt{7})\right] = 8 \cdot \left[3 \cdot \frac{5}{3}(5-\sqrt{7}) - 25\right] = 8 \cdot (25 - 5\sqrt{7} - 25) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V''\left[\frac{5}{3}(5-\sqrt{7})\right] = -40\sqrt{7} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo, c.q.c.}$$

$$\underline{Volumen\ máximo\ cortando\ un\ \frac{5}{3}(5-\sqrt{7})\ cm \cong 3{,}92\ cm\ de\ cada\ esqı}$$

.

BY NC SA

Problema 2:

P2) Calcula los valores posibles de r y t para que $|A| + |B| = 4$, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & t+3 & t-3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= t \cdot [5(t+3) - t + 2(t-3) - 2(t+3) + (t-3) - 5t] =$$

$$= t \cdot [3(t+3) - 6t + 3(t-3)] = 3t \cdot [(t+3) - 2t + (t-3)] =$$

$$= 3t \cdot (t + 3 - 2t + t - 3) = 3t \cdot 0 = 0 \Rightarrow |A| = 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot [-3(r+1) + 6r + r + 3r - (r+1) - 6r] = r \cdot [-4(r+1) + 4r] =$$

BY NC SA

Problema 3:

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in R.$

Solución:

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, -3, 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-4, 1, -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, 1, 2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-4, 1, -1) - (0, -3, 2)] = (-4, 4, -3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

BY NC SA

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 8 - 8 - 8 + 9 = -42 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 1, -2) \cdot (3, 1, 2) = 3 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan perpendicularmente.

Un vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 6j + k - 3k + 2i - 2j = 4i - 8j - 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (2, -4, -1).$$

BY NC SA

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.

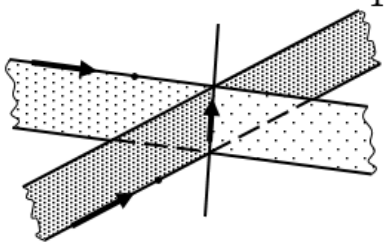
Se determinan, a continuación, los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-x - 4(y+3) - 4(z-2) - 2(z-2) - 8x + (y+3) = 0;$$

$$-9x - 3(y+3) - 6(z-2) = 0;\ \ 3x + (y+3) + 2(z-2) = 0;$$

$$3x + y + 3 + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0.$$



BY NC SA

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-(x+4)+4(y-1)-12(z+1)-2(z+1)+8(x+4)+3(y-1)=0;$

$7(x+4)+7(y-1)-14(z+1)=0;\ \ (x+4)+(y-1)-2(z+1)=0;$

$x+4+y-1-2z-2=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y-2z+1=0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2:

$$t \equiv \begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 3x+y=1-2\lambda \\ x+y=-1+2\lambda \end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix} 3x+y=1-2\lambda \\ -x-y=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x=2-4\lambda;\ \ x=1-2\lambda. \qquad y=-1+2\lambda-x=-1+2\lambda-1+2\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-2+4\lambda. \qquad t \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2+4\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$

$$t \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}.$$

BY NC SA

Problema 4.1:

P4.1) En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar:

i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?

iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

Problema 4.2:

P4.2) Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como *el Tributo de las Tres Vacas* o *Iror Beien Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

(*i*) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?

(*ii*) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?

(*iii*) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

Solución 4.1:

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10;\ p = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ q = \frac{3}{4} = 0{,}75. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

BY NC SA

$i)$

$$P = P(0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0563 = \underline{0{,}0563}.$$

$ii)$

$$P = P(7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^3 = \frac{10!}{(10-7)!\cdot 7!} \cdot 0{,}000061 \cdot 0{,}421875 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\cdot 7!} \cdot 0{,}000026 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} \cdot 0{,}000026 = 120 \cdot 0{,}000026 = 0{,}003090$$

$iii)$

$$P = P(7) + P(8) + P(9) + P(10) =$$

$$= P(7) + \binom{10}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^0 =$$

$$= P(7) + \frac{10!}{2!\cdot 8!} \cdot 0{,}000015 \cdot 0{,}5625 + 10 \cdot 0{,}000004 \cdot 0{,}75 + 1 \cdot 0{,}000 \cdot 1 =$$

$$= P(7) + 45 \cdot 0{,}000009 + 0{,}000029 + 0{,}000001 =$$

$$= 0{,}003090 + 0{,}000386 + 0{,}000029 + 0{,}000001 \Rightarrow \underline{P = 0{,}003506}.$$

BY NC SA

Solución 4.2:

$i)$

$$\left.\begin{array}{c} 5\ bearneses \rightarrow no\ hablan\ eusquera \\ 5\ roncaleses \rightarrow hablan\ eusquera \\ 2\ suletinos \rightarrow hablan\ eusquera \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} =$$

$$= \frac{p\{2\ roncaleses\}+p\{2\ suletinos\}+p\{un\ roncalés\ y\ un\ suletino\}}{C_{12,2}} =$$

$$\frac{C_{5,2}+C_{2,2}+C_{5,1}C_{2,1}}{C_{12,2}} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}+1+5\cdot 2}{\frac{12!}{(12-2)!\cdot 2!}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}+1+10}{\frac{12!}{10!\cdot 2}} = \frac{10+11}{\frac{12\cdot 11}{2}} = \frac{21}{66} \Rightarrow \underline{p = \frac{7}{22} \cong 0{,}318.}$$

$ii)$

$$\left.\begin{array}{c} 5\ bearneses \rightarrow hablan\ bearnés \\ 5\ roncaleses \rightarrow no\ hablan\ bearnés \\ 2\ suletinos \rightarrow hablan\ bearnés\ sólo\ con\ los\ bearneses \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{P\{2\ bearneses\}+P\{un\ bearnés\ y\ un\ suletino\}}{C_{12,2}} =$$

BY NC SA

$\frac{C_{5,2}+C_{5,1}C_{2,1}}{C_{12,2}} =$

$= \frac{\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}+5\cdot 2}{66} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}+10}{66} = \frac{10+10}{66} = \frac{20}{66} \Rightarrow \underline{p = \frac{10}{33} \cong 0{,}303.}$

iii)

Este apartado es más sencillo resolverlo por el suceso contrario, es decir, que la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma es la unidad menos la probabilidad de que hablen los tres el mismo idioma.

La única posibilidad de que hablen el mismo idioma es que los tres sean roncaleses o que los tres sean bearneses, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguientes:

$$p = 1 - \frac{casos\ favorables\ (hablen\ mismo\ idioma)}{casos\ posibles} =$$

$$= 1 - \frac{p\{3\ roncaleses\}+p\{tres\ bearneses\}}{C_{10,3}} = 1 - \frac{C_{5,3}+C_{5,3}}{C_{10,3}} = 1 - \frac{2\cdot\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}}{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}} =$$

$$1 - \frac{2\cdot\frac{5\cdot 4}{2!}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2!}} =$$

$$= 1 - \frac{40}{10\cdot 3\cdot 8} = 1 - \frac{4}{24} = 1 - \frac{1}{6} \Rightarrow \underline{p = \frac{5}{6} \cong 0{,}833.}$$

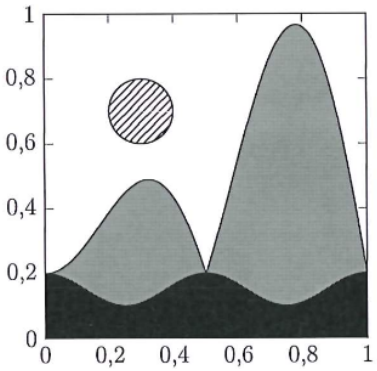
BY NC SA

Problema 5.1:

P5.1) El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cos(4\pi x); \qquad (x-0{,}3)^2 + (y-0{,}7)^2 = \frac{1}{100}; \qquad y = 0{,}2 + x\cdot|\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?



Solución:

El sol (circunferencia) está asociado a: $(x-0{,}3)^2 + (y-0{,}7)^2 = \frac{1}{100}$, que es la circunferencia de centro

BY NC SA

$O'(0{,}3;\,0{,}7)$ y radio $r = \frac{1}{10}$.

El mar azul está asociado a: $y = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cos(4\pi x)$, por ser:

$$y(0) = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot \cos 0 = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot 1 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2.$$

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot \cos(2\pi) = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot 1 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$$

$$y(1) = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot \cos(4\pi) = 0{,}15 + \frac{1}{20}\cdot 1 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2.$$

Las montañas, está asociado a: $y = 0{,}2 + x|sin\,(2\pi x)|$, por ser:

$$y = 0{,}2 + x\cdot |sin\,(2\pi x)| =$$
$$\begin{cases} 0{,}2 + x\cdot sen\,(2\pi x) \;\; si \;\; 0 \le x \le 0{,}5 \\ 0{,}2 - x\cdot sen\,(2\pi x) \;\; si \;\; 0{,}5 < x \le 1 \end{cases}.$$

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot sen\,\frac{\pi}{2} = 0{,}2 + 0{,}25\cdot 1 = 0{,}45 \\ x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 0{,}2 - \frac{3}{4}\cdot sen\,\frac{3\pi}{2} = 0{,}2 - 0{,}75\cdot(-1) = 0{,}95 \end{cases}.$$

La superficie a calcular es la siguiente:

BY NC SA

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[0{,}2 + x \cdot sen\,(2\pi x) - 0{,}15 - \frac{1}{20}\cos(4\pi x)\right] \cdot dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[0{,}2 - x \cdot sen\,(2\pi x) - 0{,}15 - \frac{1}{20}\cos(4\pi x)\right] \cdot dx \Rightarrow S = A + B.$$

(*)

Se hace previamente la integral indefinida con alguna dificultad:

$$I = \int x \cdot sen\,(2\pi x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = sen\,(2\pi x) \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{2\pi} \cdot cos\,(2\pi x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left[-\frac{1}{2\pi} \cdot cos\,(2\pi x)\right] + \frac{1}{2\pi} \cdot \int cos\,(2\pi x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{x}{2\pi} cos\,(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} sen\,(2\pi x) \Rightarrow I = \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi x) - 2\pi x \cdot cos\,(2\pi x)].$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[0{,}2 + x \cdot sen\,(2\pi x) - 0{,}15 - \frac{1}{20}\cos(4\pi x)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[0{,}05 + x \cdot sen\,(2\pi x) - \frac{1}{20}\cos(4\pi x)\right] \cdot dx =$$

BY NC SA

$$= \left\{0{,}05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi x) - 2\pi x \cdot cos\,(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,(2\pi x)\right\}_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{0{,}05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi x) - 2\pi x \cdot cos\,(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,(2\pi x)\right\} -$$

$$- \left\{0{,}05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi x) - 2\pi x \cdot cos\,(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,(2\pi x)\right\} =$$

$$= \left[0{,}025 + \frac{1}{4\pi^2} \cdot (sen\,\pi - \pi \cdot \cos\pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot sen\,\pi\right] -$$

$$- \left[0 + \frac{1}{4\pi^2} \cdot (sen\,0 - 0 \cdot cos\,0) - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,0\right] = 0{,}025 + \frac{1}{4\pi} - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{0{,}1\pi+1}{4\pi}.$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[0{,}05 - x \cdot sen\,(2\pi x) - \frac{1}{20}\cos(4\pi x)\right] \cdot dx =$$

BY NC SA

$$= \left\{0{,}05x - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi x) - 2\pi x \cdot cos\,(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,(2\pi x)\right\}_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left\{0{,}05 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,(2\pi) - 2\pi \cdot cos\,(2\pi)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,(2\pi)\right\} -$$

$$- \left\{0{,}025 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [sen\,\pi - \pi \cdot cos\,\pi] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot sen\,\pi\right\} =$$

$$= \left[0{,}05 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot (0 - 2\pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot 0\right] - \left[0{,}025 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot (0 + \pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot 0\right] =$$

$$= \left(0{,}05 + \frac{1}{2\pi}\right) - \left(0{,}025 - \frac{1}{4\pi}\right) = 0{,}025 + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} = \frac{0{,}025 \cdot 4\pi + 2 + 1}{4\pi} \Rightarrow B = \frac{0{,}1\pi + 3}{4\pi}.$$

Sustituyendo en la expresión (*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = \frac{0{,}1\pi + 1}{4\pi} + \frac{0{,}1\pi + 3}{4\pi} = \frac{0{,}2\pi + 4}{4\pi} \Rightarrow S = \frac{0{,}1\pi + 2}{2\pi}\ u^2 \cong 0{,}3684\ u^2.$$

Es monte visible el 36,84 % del cuadro.

BY NC SA

Problema 5.2:

P5.2) Sea $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$. Demuestra que existe un punto c en $[2, 4]$ tal que $f'(c) = \frac{1}{2}$.

Solución:

Teniendo en cuenta que $sen\,(\pi x) + 2 > 0, \forall x \in R$, la función $f(x)$ es continua en $[2, 4]$ y derivable en $(2, 4)$ por ser una función logarítmica de una expresión positiva, por lo cual, le es aplicable el teorema de Lagrange.

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que "si una función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Aplicado el teorema a la función $f(x)$ en el intervalo $(2, 4)$ con $f'(c) = \frac{1}{2}$:

$$f'(c) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{\log_2\{4\cdot[sen\,(4\pi)+2]\}-\log_2\{2\cdot[sen\,(2\pi)+2]\}}{2} =$$

$$= \frac{\log_2\{4\cdot[0+2]\}-\log_2\{2\cdot[0+2]\}}{2} = \frac{\log_2 8-\log_2 4}{2} = \frac{\log_2 2^3-\log_2 2^2}{2} =$$

$$\frac{3\cdot\log_2 2-2\cdot\log_2 2}{2} =$$

$$= \frac{3\cdot 1-2\cdot 1}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Queda\ probado\ que\ \exists c \in (4, 2)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{1}{2}.}$$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1) En Navarra, aproximadamente un $1{,}4\,\%$ de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del $97\,\%$ (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del $96\,\%$ (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?

Problema 2:

P2) Sea $y = f(x)$ la función positiva que cumple la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(i) Expresa y en función de x y demuestra que existe un punto c en su dominio tal que $f'(c) = -1$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.

(ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX?

Problema 3:

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $A(2, 4, -2)$ y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \qquad \text{y} \qquad r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

BY NC SA
Autores: Antonio Menguiano y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 4:

P4.1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2-4)x+(a+2)y+2z=4 \\ (4-a^2)x+z=2 \\ (a^2-4)x+(a+2)y+az=-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

P4.2) Dadas las siguientes matrices A y B, calcula $|A\cdot B^{-1}|$ en función del parámetro t. ¿Para qué valores de t no existe $|A\cdot B^{-1}|$?

$$A=\begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

Problema 5:

P5.1) Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2\cdot e^{\tan(x)}}{4\cdot\cos^2(x)}\,dx \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}}-1}$$

P5.2) Estudia las asíntotas y simetrías de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x-2}$.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) En Navarra, aproximadamente un $1{,}4\,\%$ de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del $97\,\%$ (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del $96\,\%$ (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?

Solución:

Llamamos I al suceso "la persona es intolerante al gluten", T+ a "el test da positivo" y T– a "el test da negativo".
Por la información proporcionada tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(I)=0.014;\ P(T+/I)=0.97;\ P(T-/I)=0.03;\quad P\left(T-/\overline{I}\right)=0.96;\ P\left(T+/\overline{I}\right)=0.04.$$

(i) Debemos calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+)=P(I)P(T+/I)+P\left(\overline{I}\right)P\left(T+/\overline{I}\right)=0.014\cdot 0.97+0.986\cdot 0.04=\boxed{\frac{2651}{50000}=0.05302}$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé positivo vale 0.05302.

(ii) Debemos calcular $P(T-)$. Utilizamos la probabilidad del suceso contrario $T+$ que ya hemos calculado.

$$P(T-)=1-P(T+)=1-0.05302=\boxed{0.94698}$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé negativo vale 0.94698

(iii) Debemos calcular $P(I/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/T+)=\frac{P(I\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(I)P(T+/I)}{P(T+)}=\frac{0.014\cdot 0.97}{0.05302}=\boxed{\frac{679}{2651}\simeq 0.2561}$$

La probabilidad de que una persona que ha dado positivo en el test sea intolerante al gluten es de 0.2561.

BY NC SA

Problema 2:

P2) Sea $y = f(x)$ la función positiva que cumple la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(i) Expresa y en función de x y demuestra que existe un punto c en su dominio tal que $f'(c) = -1$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.

(ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX?

Solución:

(i) Despejamos y de la expresión.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-(x-1)^2 = 1-(x^2-2x+1) = 2x-x^2 \Rightarrow \boxed{y = +\sqrt{2x-x^2}}$$

La función es $y = +\sqrt{2x-x^2}$.

El dominio de la función es $[0,2]$.

$$2x-x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1 \in [0,2] \Rightarrow 2\cdot 1 - 1^2 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Existe } \sqrt{2x-x^2}$$

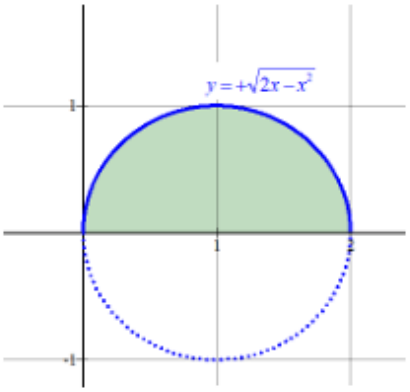
La función $y = +\sqrt{2x-x^2}$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Aplicando el teorema del valor medio tenemos que existe $c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$.

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Rightarrow f'(c) = \frac{\sqrt{2\cdot 2-2^2}-\sqrt{2\cdot 1-1^2}}{1} = \sqrt{0}-\sqrt{1} = -1$$

(ii) La ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia de radio 1 y centro en $C(1,0)$. La función $y = +\sqrt{2x-x^2}$ es la parte positiva de la circunferencia.

El área contenida en la circunferencia es $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ unidades cuadradas.

El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX es la mitad del área del círculo y vale $\dfrac{\pi}{2}$ unidades cuadradas.



BY NC SA

Problema 3:

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $A(2,4,-2)$ y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \qquad \text{y} \qquad r = \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Solución:

Determinamos la posición relativa de ambas rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(2,-1,0) \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} = (1,0,3) \\ Q_r(-1,-2,1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_s} = (-1,2,1) \\ \vec{v_r} = (1,0,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_s}, \vec{v_r}, \overrightarrow{P_sQ_r}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} P_s(2,-1,0) \\ Q_r(-1,-2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_sQ_r} = (-1,-2,1) - (2,-1,0) = (-3,-1,1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_s} = (-1,2,1) \\ \vec{v_r} = (1,0,3) \\ \overrightarrow{P_sQ_r} = (-3,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_s}, \vec{v_r}, \overrightarrow{P_sQ_r}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-18-1-0-2-3 = -24 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan.
Hallamos las coordenadas de un punto genérico de cada recta.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = -1+2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow B(2-\alpha, -1+2\alpha, \alpha)$$

$$r = \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow C(-1+\lambda, -2, 1+3\lambda)$$

BY NC SA

La recta t debe contener los puntos A, B y C. Para ello los puntos deben estar alineados y para ello los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales. Hallamos los valores de α y λ para que esto ocurra.

$$\left.\begin{matrix} A(2,4,-2) \\ B(2-\alpha,-1+2\alpha,\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2-\alpha,-1+2\alpha,\alpha)-(2,4,-2) = (-\alpha,-5+2\alpha,\alpha+2)$$

$$\left.\begin{matrix} A(2,4,-2) \\ C(-1+\lambda,-2,1+3\lambda) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1+\lambda,-2,1+3\lambda)-(2,4,-2) = (-3+\lambda,-6,3+3\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{-\alpha}{-3+\lambda} = \frac{-5+2\alpha}{-6} = \frac{\alpha+2}{3+3\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-\alpha}{-3+\lambda} = \dfrac{-5+2\alpha}{-6} \rightarrow 6\alpha = 15-6\alpha-5\lambda+2\lambda\alpha \rightarrow 12\alpha+5\lambda-2\alpha\lambda = 15 \\ \\ \dfrac{-5+2\alpha}{-6} = \dfrac{\alpha+2}{3+3\lambda} \Rightarrow -15+6\alpha-15\lambda+6\alpha\lambda = -6\alpha-12 \rightarrow 12\alpha-15\lambda+6\alpha\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12\alpha+5\lambda-2\alpha\lambda = 15 \rightarrow (\times 3) \\ 12\alpha-15\lambda+6\alpha\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36\alpha+15\lambda-6\alpha\lambda = 45 \\ 12\alpha-15\lambda+6\alpha\lambda = 3 \end{cases}$$

$$\overline{48\alpha = 48} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (-1,-3,3)}$$

La recta t buscada es la recta que pasa por el punto A y que tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (-1,-3,3)$.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{AB} = (-1,-3,3) \\ A(2,4,-2) \in t \end{matrix}\right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{3}$$

BY NC SA

Problema 4:

P4.1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2-4)x+(a+2)y+2z=4 \\ (4-a^2)x+z=2 \\ (a^2-4)x+(a+2)y+az=-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a^2-4 & a+2 & 2 \\ 4-a^2 & 0 & 1 \\ a^2-4 & a+2 & a \end{pmatrix}$

y como matriz ampliada $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-4 & a+2 & 2 & 4 \\ 4-a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2-4 & a+2 & a & -4 \end{array}\right)$.

Usamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado pero más fácil de estudiar.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-4 & a+2 & 2 & 4 \\ 4-a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2-4 & a+2 & a & -4 \end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a+\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 4-a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2-4 & a+2 & 2 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & a+2 & 3 & 6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a-\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} a^2-4 & a+2 & a & -4 \\ -a^2+4 & -a-2 & -2 & -4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & a-2 & -8 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{a^2-4}^{A} & a+2 & 2 & 4 \\ 0 & a+2 & 3 & 6 \\ \underbrace{0}_{A/B} & 0 & a-2 & -8 \end{array}\right)$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2-4 & a+2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}=(a^2-4)(a+2)(a-2)=(a+2)^2(a-2)^2$$

$$|A|=0\Rightarrow(a+2)^2(a-2)^2=0\Rightarrow\begin{cases} \boxed{a=-2} \\ \boxed{a=2} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq -2$ y $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=-2$

BY NC SA

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda $\left(\overbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{matrix}}^{A} \quad \underbrace{\begin{matrix}4\\ 6\\ -8\end{matrix}}_{A/B}\right)$. La columna tercera es el doble de la columna segunda. El rango de la matriz A y A/B es 1, menor que el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene infinitas soluciones. Determinamos la expresión de estas soluciones.

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{matrix}}^{A} \quad \underbrace{\begin{matrix}4\\ 6\\ -8\end{matrix}}_{A/B}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2z=4 \\ 3z=6 \\ -4z=-8 \end{cases} \Rightarrow z=2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ y=\lambda;\ \alpha,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}}$$

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada queda $\left(\overbrace{\begin{matrix}0 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}^{A} \quad \underbrace{\begin{matrix}4\\ 6\\ -8\end{matrix}}_{A/B}\right)$.

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema no tiene solución.

BY NC SA

Problema 4.2:

P4.2) Dadas las siguientes matrices A y B, calcula $|A \cdot B^{-1}|$ en función del parámetro t. ¿Para qué valores de t no existe $|A \cdot B^{-1}|$?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que exista la inversa de B su determinante debe ser distinto de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ t & 4t & t^2 \\ -t & -3t & -t^2+1 \\ \hline 0 & t & 1 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} Fila\,3ª - Fila\,2ª \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -t & t-2 \\ \hline 0 & 0 & t-1 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2(t-1)$$

El determinante de B se anula para $t=0$ y para $t=1$.

La expresión $|A \cdot B^{-1}|$ solo existe para valores de t distintos de 0 y de 1.

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} Fila\,2ª - Fila\,1ª \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ -t+1 & -t^2 & -2 \\ \hline 0 & t-2 & -t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ t+1 & t^2 & 4 \\ -t+1 & -t^2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ 0 & t-2 & -t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(t+1)(t-2)$$

Sabemos que $|A| = 2(t+1)(t-2)$ y $|B| = t^2(t-1)$. También sabemos que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$.

Calculamos la expresión de $|A \cdot B^{-1}|$ para valores de t distintos de 0 y 1.

$$|A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2(t+1)(t-2)}{t^2(t-1)}$$

BY NC SA

Problema 5.1:

P5.1) Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)}\, dx \qquad ; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1}$$

Solución:

Calculamos la integral indefinida usando un cambio de variable.

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)}\, dx = \frac{e^2}{4} \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \tan(x) = t \to \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx = dt \to \\ \to dx = \cos^2(x)\, dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^2}{4} \int \frac{e^t}{\cos^2(x)} \cos^2(x)\, dt = \frac{e^2}{4} \int e^t\, dt = \frac{e^2}{4} e^t = \boxed{\frac{e^2}{4} e^{\tan(x)} + K}$$

Calculamos el límite.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - 2}{\left(2^2\right)^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x - 2}{2^{\frac{2x-4}{2x+1}} - 1} = \ldots$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-4}{2x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{4}{-\infty}}{2 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{2+0}{2+0} = 1}$$

$$\ldots = \frac{2^{-\infty} - 2}{2^1 - 1} = \frac{\frac{1}{2^{+\infty}} - 2}{1} = \frac{1}{+\infty} - 2 = 0 - 2 = \boxed{-2}$$

BY NC SA

Problema 5:

P5.2) Estudia las asíntotas y simetrías de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x-2}$.

Solución:

Estudiamos la simetría de la función.

$$f(x)=\frac{3x^2+2}{x-2}$$

$$f(-x)=\frac{3(-x)^2+2}{-x-2}=\frac{3x^2+2}{-x-2}$$

$$-f(x)=-\frac{3x^2+2}{x-2}=\frac{3x^2+2}{-x+2}$$

La función no presenta ningún tipo de simetría, ni par ni impar.

El dominio de la función son todos los números reales menos los valores que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2}{x-2}=\frac{3\cdot 2^2+2}{2-2}=\frac{14}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3+\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{3+0}{0-0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

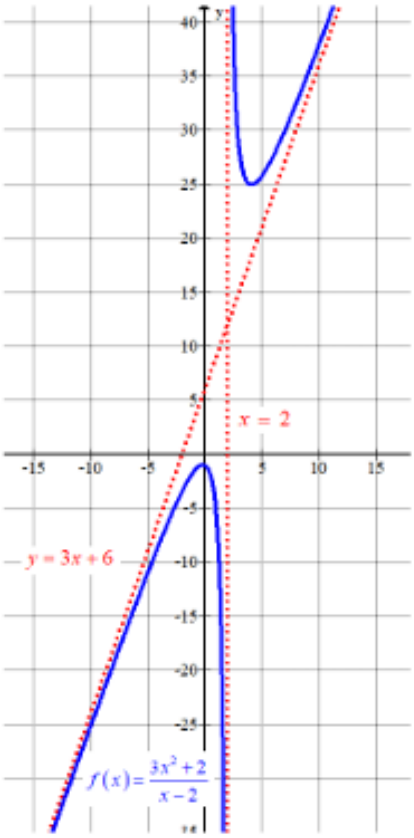
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{3+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x-2}-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2-3x^2+6x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{6+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{6+0}{1-0}=6$$

BY NC SA

La recta $y=3x+6$ es asíntota oblicua de la función.



La gráfica es simétrica respecto del punto (2, 12).

Para $x=2-1=1$ tenemos que $f(1)=\dfrac{3\cdot 1^2+2}{1-2}=-5$.

Para $x=2+1=3$ tenemos que $f(3)=\dfrac{3\cdot 3^2+2}{3-2}=29$.

Se cumple que $\dfrac{-5+24}{2}=12$.

Para $x=2-2=0$ tenemos que $f(0)=\dfrac{3\cdot 0^2+2}{0-2}=-1$.

Para $x=2+2=4$ tenemos que $f(3)=\dfrac{3\cdot 4^2+2}{4-2}=25$.

Se cumple que $\dfrac{-1+25}{2}=12$.

Y así se cumple para cualquier par de valores simétricos respecto de $x=2$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1:

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas considerado. En el caso del nitrógeno a $T = 300$ K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298$ m/s.

(a) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) **(0,5 puntos)** Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

Problema 2:

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución.

(b) **(1 punto)** Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x - 3)$ e $y = x(2 - x)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

Problema 4:

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

(a) **(1,5 puntos)** Discute la posición relativa de la recta r y el plano π en función de los valores del parámetro A.

(b) **(0,5 puntos)** Calcula la distancia de la recta r al plano π en función de los valores del parámetro A.

(4B) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

(a) **(1,5 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π.

(b) **(0,5 puntos)** ¿Cuál es la distancia de A a π?

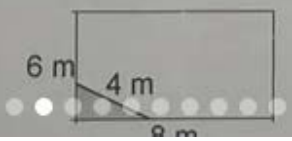
Problema 5:

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?



BY NC SA

Textos Marea Verde

EHU

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko EKAINA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026
MATEMÁTICAS II

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu).

(a) **(1 puntu)** Marraztu $y = x(2x - 1)$ eta $y = x(2 - x)$ ekuazioetako parabolek mugatzen duten eremua.

(b) **(1 puntu)** Kalkulatu (a) ataleko eremuaren azalera, eta eman emaitza zatiki baten bidez.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietarako **bati bakarrik** erantzun.

(4A) Izan bitez $r \equiv x = y - 1 = -z$ zuzena eta $\pi \equiv -x + 2y + z + \lambda = 0$ planoa.

(a) **(1,5 puntu)** Aztertu r zuzenaren eta π planoaren arteko posizio erlatiboa λ parametroaren balioen arabera.

(b) **(0,5 puntu)** Kalkulatu r zuzenetik π planorako distantzia λ parametroaren balioen arabera.

(4B) Izan bitez $A = (1, 1, 2)$ eta $B = (-1, 0, 3)$ puntuak.

(a) **(1,5 puntu)** Aurkitu π planoaren ekuazioa, zeinerako A eta B puntuak π planoarekiko simetrikoak diren.

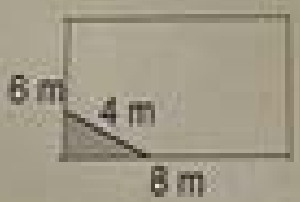
(b) **(0,5 puntu)** Zein da A-tik π-rako distantzia?

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietarako **bati bakarrik** erantzun.

(5A) Hormigozko muino batek forma parabolikoa du. Haren altuera 12 m eta oinarria 6 m izanik, irudian ikusten den bezala. Eskalera bat kokatu nahi da, muinoaren kontra jarrita eta haren goiko mutur muinoaren gailurraren gainetik 3 m-ra geratzeko moduan. Muinoaren oinarriaren zer distantziatara kokatu behar da eskaleraren beheko mutur?



(5B) Gela ortogonaleko batean hormen luzerak 6 m eta 8 m izanik, zoruan gune triangeluar bat mugatu nahi da 4 m-ko luzera duen barra zuzen bat kokatuz, irudian ikusten den bezala. Non kokatu behar da barra mugatutako gunearen azalera maximoa izan dadin?



BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas considerado. En el caso del nitrógeno a $T = 300$ K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298$ m/s.

(a) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) **(0,5 puntos)** Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

Solución:

Sea X la primera componente de la velocidad. Según el enunciado:

$$X \sim N(0, 298).$$

Por tanto, la media es 0 y la desviación típica es

$$\sigma = 298.$$

a) Probabilidad de que $|X| < 300$

Queremos:

$$P(|X| < 300) = P(-300 < X < 300).$$

Tipificamos:

$$Z = \frac{X - 0}{298}.$$

Entonces:

$$P(-300 < X < 300) = P\left(\frac{-300}{298} < Z < \frac{300}{298}\right).$$

$$\frac{300}{298} \approx 1{,}01.$$

Luego:

$$P(-300 < X < 300) = P(-1{,}01 < Z < 1{,}01).$$

Usando la tabla:

$$P(Z < 1{,}01) = 0{,}8438.$$

Por simetría:

$$P(-1{,}01 < Z < 1{,}01) = 2 \cdot 0{,}8438 - 1 = 0{,}6876.$$

BY NC SA

b) Probabilidad de que $-600 < X < -300$

Tipificamos:

$$\frac{-600}{298} \approx -2{,}01, \qquad \frac{-300}{298} \approx -1{,}01.$$

Así:

$$P(-600 < X < -300) = P(-2{,}01 < Z < -1{,}01).$$

Por simetría:

$$P(-2{,}01 < Z < -1{,}01) = P(1{,}01 < Z < 2{,}01).$$

De la tabla:

$$P(Z < 2{,}01) = 0{,}9778, \qquad P(Z < 1{,}01) = 0{,}8438.$$

Por tanto:

$$P(1{,}01 < Z < 2{,}01) = 0{,}9778 - 0{,}8438 = 0{,}1340.$$

c) Comparación con el argón

La desviación típica disminuye cuando aumenta la masa molecular. Como el argón tiene mayor masa que el nitrógeno, su desviación típica es menor.

Eso significa que la distribución está más concentrada alrededor de 0. Por tanto, es más probable que la velocidad esté cerca de 0, y en concreto es más probable que:

$$|X| < 300.$$

$$\boxed{P(|X| < 300) \approx 0{,}6876}$$

$$\boxed{P(-600 < X < -300) \approx 0{,}1340}$$

$$\boxed{\text{Para el argón, } P(|X| < 300) \text{ será mayor}}$$

BY NC SA

Problema 2:

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución.

(b) **(1 punto)** Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior.

Solución:

El sistema es:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2, \end{cases} \qquad a \neq 0.$$

Restamos la primera ecuación a la segunda:

$$(x + ay + z) - (x + ay) = a - 1.$$

Por tanto:

$$z = a - 1.$$

De la primera ecuación:

$$x + ay = 1.$$

Ahora sustituimos $z = a - 1$ en la tercera:

$$(a-2)x + ay + (a-1)(a-1) = a + 2.$$

Como $x + ay = 1$, conviene escribir $ay = 1 - x$. Entonces:

$$(a-2)x + (1-x) + (a-1)^2 = a + 2.$$

Simplificamos:

$$(a-3)x + 1 + (a-1)^2 = a + 2.$$
$$(a-3)x + 1 + a^2 - 2a + 1 = a + 2.$$
$$(a-3)x + a^2 - 3a = 0.$$

Sacamos factor común:

$$(a-3)(x + a) = 0.$$

a) Valor de a para que haya más de una solución

Para que haya más de una solución, necesitamos que desaparezca la restricción sobre x. Eso ocurre si:

$$a - 3 = 0.$$

Luego:

$$a = 3.$$

Además, cumple la condición $a \neq 0$.

b) Soluciones para $a = 3$

Sustituimos $a = 3$ en el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ x + 3y + z = 3, \\ x + 3y + 2z = 5. \end{cases}$$

De la segunda menos la primera:

$$z = 2.$$

La primera queda:

$$x + 3y = 1.$$

Textos Marea Verde

Tomamos:

$$y = t.$$

Entonces:

$$x = 1 - 3t.$$

Por tanto:

$$(x, y, z) = (1 - 3t, t, 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{a = 3}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (1 - 3t, t, 2), \qquad t \in \mathbb{R}}$$

BY NC SA

Problema 3:

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x-3)$ e $y = x(2-x)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

Solución:

Las parábolas son:

$$y = x(2x-3) = 2x^2 - 3x,$$
$$y = x(2-x) = 2x - x^2.$$

a) Recinto limitado

Buscamos los puntos de corte:

$$2x^2 - 3x = 2x - x^2.$$
$$3x^2 - 5x = 0.$$
$$x(3x-5) = 0.$$

Por tanto:

$$x = 0, \qquad x = \frac{5}{3}.$$

Para saber cuál está arriba, probamos por ejemplo $x = 1$:

$$2x - x^2 = 1,$$
$$2x^2 - 3x = -1.$$

Luego, entre 0 y $\frac{5}{3}$, la parábola superior es:

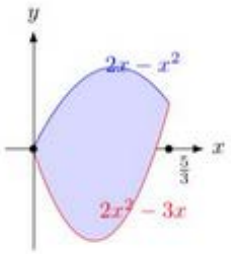
$$y = 2x - x^2,$$

y la inferior es:

$$y = 2x^2 - 3x.$$

BY NC SA

Textos Marea Verde



b) Área del recinto

El área es:

$$A = \int_0^{5/3} \left[(2x - x^2) - (2x^2 - 3x)\right] dx.$$

Simplificamos:

$$A = \int_0^{5/3} (5x - 3x^2)\, dx.$$

Integramos:

$$A = \left[\frac{5}{2}x^2 - x^3\right]_0^{5/3}.$$

Sustituimos:

$$A = \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{9} - \frac{125}{27}.$$

$$A = \frac{125}{18} - \frac{125}{27}.$$

Mínimo común múltiplo 54:

$$A = \frac{375}{54} - \frac{250}{54} = \frac{125}{54}.$$

$$\boxed{x = 0, \qquad x = \frac{5}{3}}$$

$$\boxed{A = \frac{125}{54}}$$

BY NC SA

Problema 4:

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

(a) **(1,5 puntos)** Discute la posición relativa de la recta r y el plano π en función de los valores del parámetro A.

(b) **(0,5 puntos)** Calcula la distancia de la recta r al plano π en función de los valores del parámetro A.

Solución 4A:

a) Posición relativa

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1,1,-1) \cdot (-1,2,1).$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Por tanto, la recta es paralela al plano o está contenida en él.

Para distinguir, sustituimos el punto $P_0 = (0,1,0)$ en el plano:

$$-0 + 2 \cdot 1 + 0 + A = A + 2.$$

Si:

$$A + 2 = 0,$$

entonces:

$$A = -2.$$

En ese caso, el punto pertenece al plano y la recta está contenida en el plano.

Si:

$$A \neq -2,$$

la recta es paralela al plano y no lo corta.

b) Distancia

Si $A = -2$, la recta está contenida en el plano, luego:

$$d(r,\pi) = 0.$$

Si $A \neq -2$, la recta es paralela al plano. La distancia es la distancia de P_0 al plano:

$$d(r,\pi) = \frac{|-0 + 2 \cdot 1 + 0 + A|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}}.$$

$$d(r,\pi) = \frac{|A+2|}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{A = -2 \Rightarrow r \subset \pi}$$

$$\boxed{A \neq -2 \Rightarrow r \parallel \pi}$$

$$\boxed{d(r,\pi) = \begin{cases} 0, & A = -2, \\ \dfrac{|A+2|}{\sqrt{6}}, & A \neq -2. \end{cases}}$$

La recta es:

$$r: \ x = y - 1 = -z.$$

Tomamos:

$$x = t, \qquad y - 1 = t, \qquad -z = t.$$

Entonces:

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = t + 1, \\ z = -t. \end{cases}$$

Un punto de la recta es:

$$P_0 = (0,1,0),$$

y un vector director es:

$$\vec{v} = (1,1,-1).$$

El plano es:

$$\pi: \ -x + 2y + z + A = 0.$$

Su vector normal es:

$$\vec{n} = (-1,2,1).$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

(4B) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

(a) **(1,5 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π.

(b) **(0,5 puntos)** ¿Cuál es la distancia de A a π?

Solución 4B:

Los puntos son:

$$A = (1, 1, 2), \qquad B = (-1, 0, 3).$$

Si A y B son simétricos respecto de un plano π, entonces ese plano es el plano mediador del segmento AB.
Por tanto:

- pasa por el punto medio de AB;
- es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

Calculamos el punto medio:

$$M = \left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{2+3}{2}\right).$$

$$M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Calculamos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1-1, 0-1, 3-2) = (-2, -1, 1).$$

Este vector es normal al plano:

$$\vec{n} = (-2, -1, 1).$$

La ecuación del plano es:

$$-2(x-0) - (y - \tfrac{1}{2}) + (z - \tfrac{5}{2}) = 0.$$

Simplificamos:

$$-2x - y + \frac{1}{2} + z - \frac{5}{2} = 0.$$

$$-2x - y + z - 2 = 0.$$

Multiplicando por -1:

$$2x + y - z + 2 = 0.$$

Distancia de A al plano

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 - 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}.$$

$$d(A, \pi) = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Racionalizando:

$$d(A, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\boxed{\pi: \ 2x + y - z + 2 = 0}$$

$$\boxed{d(A, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

BY NC SA

Problema 5:

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



Solución 5A:

Colocamos el montículo con el eje Y pasando por la cúspide. Entonces:

$$\text{cúspide } (0,12), \qquad \text{base } x=-3 \text{ y } x=3.$$

La parábola tiene forma:

$$y = 12 - ax^2.$$

Como pasa por $(3,0)$:

$$0 = 12 - a \cdot 9.$$

$$a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

Luego:

$$y = 12 - \frac{4}{3}x^2.$$

El extremo superior de la escalera queda 3 metros por encima de la cúspide:

$$(0,15).$$

La escalera será una recta tangente a la parábola y que pasa por $(0,15)$. Escribimos:

$$y = mx + 15.$$

Para que sea tangente, el sistema

$$12 - \frac{4}{3}x^2 = mx + 15$$

debe tener una única solución.

Pasamos todo a un lado:

$$-\frac{4}{3}x^2 - mx - 3 = 0.$$

Multiplicamos por -1:

$$\frac{4}{3}x^2 + mx + 3 = 0.$$

Para que haya tangencia, el discriminante debe ser cero:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = 0.$$

$$m^2 - 16 = 0.$$

$$m = \pm 4.$$

Textos Marea Verde

Tomamos $m = -4$ para la recta que baja hacia la derecha:

$$y = -4x + 15.$$

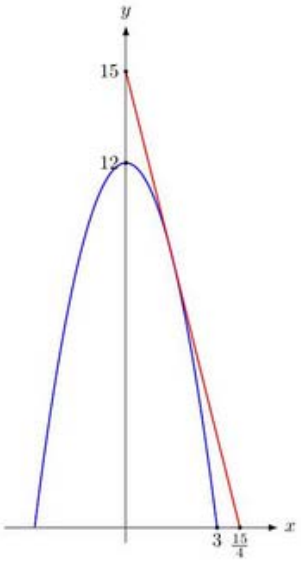
El extremo inferior está en el suelo, es decir, $y = 0$:

$$0 = -4x + 15.$$

$$x = \frac{15}{4}.$$

La base derecha del montículo está en $x = 3$. Por tanto, la distancia desde la base del montículo hasta el extremo inferior de la escalera es:

$$\frac{15}{4} - 3 = \frac{15}{4} - \frac{12}{4} = \frac{3}{4}.$$

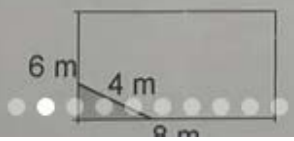


El extremo inferior debe colocarse a $\frac{3}{4}$ m de la base del montículo

Equivale a $\frac{15}{4}$ m desde el eje central

Textos Marea Verde

(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?



Solución 5B:

La barra mide 4 m y forma un triángulo rectángulo en una esquina de la sala.

Llamamos:

$$x = \text{distancia sobre la pared horizontal},$$
$$y = \text{distancia sobre la pared vertical}.$$

Como la barra mide 4 m:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

El área del triángulo acotado es:

$$A = \frac{1}{2}xy.$$

Queremos maximizar A, es decir, maximizar xy, con la condición:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Usamos:

$$(x - y)^2 \geq 0.$$

Entonces:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0.$$
$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Como $x^2 + y^2 = 16$:

$$16 \geq 2xy.$$
$$xy \leq 8.$$

El máximo se alcanza cuando:

$$x = y.$$

Entonces:

$$x^2 + x^2 = 16.$$
$$2x^2 = 16.$$
$$x^2 = 8.$$
$$x = 2\sqrt{2}.$$

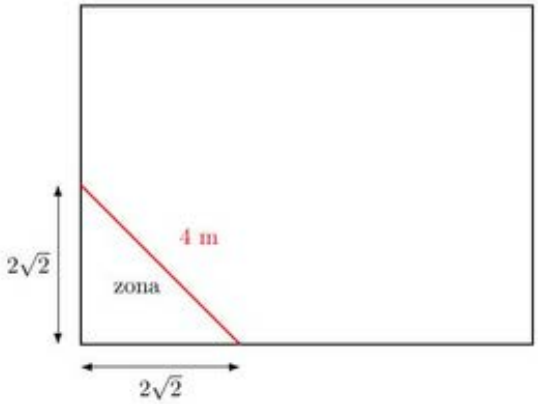
BY NC SA

Por tanto:

$$y = 2\sqrt{2}.$$

El área máxima es:

$$A_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 4.$$



$$\boxed{x = y = 2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A_{\text{máx}} = 4 \text{ m}^2}$$

La barra debe colocarse cortando ambas paredes a la misma distancia de la esquina.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA**

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1:

Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.

(a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.

(b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

Problema 2:

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

(a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea la recta $y = 3 - 3x$ y f tenga un extremo relativo en $x = 1$.

(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de f en el punto $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

Problema 3:

Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.

(a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.

(b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

Problema 4.A

BY NC SA

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + s, \\ z = 0. \end{cases}$$

Calcula el punto P´ simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x + y - z = 3$.

Problema 4.B:

(4B) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,7,4)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (6,3,-5)$ y sea $\pi \equiv 2x + y - 3z = -13$.

(a) (1 punto) Calcula el punto de corte de la recta r y el plano π.

(b) (1 punto) Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

Problema 5.A:

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}\, dx$$

explicando los pasos realizados.

Problema 5.B:

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.

(a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.

(b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

Solución:

Sea x la cantidad de recipientes que ha llevado el productor A, y la correspondiente a la productora B y z la cantidad aportada por la productora C. El sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación descrita es:

$$\begin{cases} 10x + 15y + 12z = 612, \\ x + y + z = 48, \\ 5x + 9y + 4z = 304. \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 12$, $y = 20$, $z = 16$.

Multiplicando cada uno de estos valores por el importe que recibe cada productor por recipiente entregado, se tiene que el productor A recibe 60€, la productora B, 180€ y la productora C, 64€.

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 2:

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

(a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea la recta $y = 3 - 3x$ y f tenga un extremo relativo en $x = 1$.

(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de f en el punto $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

Solución:

(a) Para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea $y = 3 - 3x$ debe ser $f(0) = 3$ y $f'(0) = -3$, es decir, $C = 3$ y $B = -3$.
Para que f tenga un extremo relativo en el punto $x = 1$ debe ser $f'(1) = 0$, o sea, $A = 0$.

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ y $f''(x) = 6x$. Por tanto, $f''(1) > 0$ y f tiene un mínimo relativo en el punto $x = 1$.

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 3:

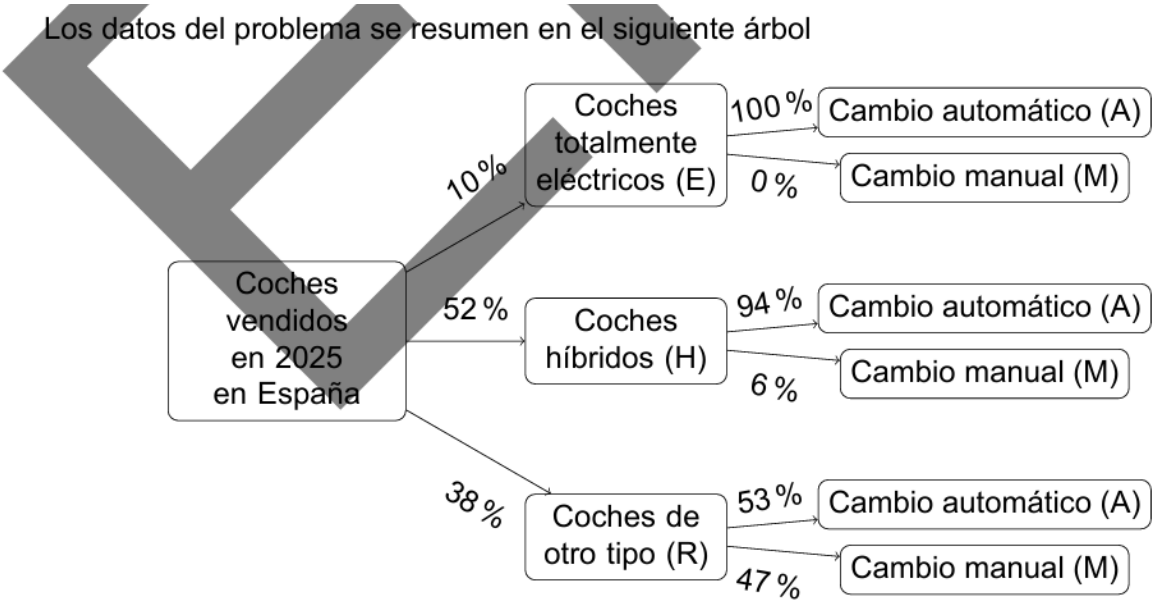
Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.

(a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.

(b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

Solución:

Los datos del problema se resumen en el siguiente árbol



(a) $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|H)P(H) + P(A|R)P(R) = 1 \times 0,1 + 0,94 \times 0,52 + 0,53 \times 0,38 = 0,7902$. Multiplicando esta probabilidad por el total de coches, se deduce que se vendieron 907.663 coches con cambio automático.

(b) $P(H|A) = \dfrac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \dfrac{0,94 \times 0,52}{0,7902} = 0,6186.$

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 4,A:

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + s, \\ z = 0. \end{cases}$$

Calcula el punto P´ simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x + y - z = 3$.

Solución:

(4A) En primer lugar, el punto de corte de las rectas r_1 y r_2 es $P = (1, 0, 0)$. La recta perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ y que pasa por el punto P tiene ecuación paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Para calcular el simétrico de P con respecto al plano dado, se puede calcular el punto de corte de la recta r con el plano π, que es el punto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. El punto P' cumple que M es el punto medio entre P y P', por tanto, $P' = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Otra posibilidad es tener en cuenta que $d(P, \pi) = d(P', \pi)$.

BY NC SA

Problema 4.B:

(4B) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,7,4)$ y cuyo vector director es $\vec{v}=(6,3,-5)$ y sea $\pi \equiv 2x+y-3z=-13$.

(a) (1 punto) Calcula el punto de corte de la recta r y el plano π.

(b) (1 punto) Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

Solución:

(4B) La ecuación paramétrica de la recta r es

$$\begin{cases} x = 1 + 6t, \\ y = 7 + 3t, \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$$

(a) El punto de corte de esa recta con el plano, que corresponde a $t = -1/3$. Es decir, $Q = (-1, 6, 17/3)$.

(b) Si denotamos por α el ángulo buscado y por β el ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal al plano, entonces $\alpha + \beta = 90°$.

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{||\vec{v}||\,||\vec{n}||} = \frac{(6,3,-5)\cdot(2,1,-3)}{\sqrt{6^2+3^2+(-5)^2}\,\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}} = 0,9583.$$

Por tanto, $\beta = 16,60°$ y $\alpha = 73,4°$.

BY NC SA

Problema 5.A:

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2}\,dx$$

explicando los pasos realizados.

Solución:

(5A) Comenzamos descomponiendo el integrando como suma de un polinomio y una fracción propia:

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2} = 1 + \frac{-x+5}{x^2-x-2}.$$

En segundo lugar, descomponemos la fracción propia en suma de dos fracciones simples:

$$\frac{-x+5}{x^2-x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2}\,dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}\right) dx \\ &= x + \ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C \\ &= x + \ln\frac{|x-2|}{(x+1)^2} + C.\end{aligned}$$

BY NC SA

Problema 5.B:

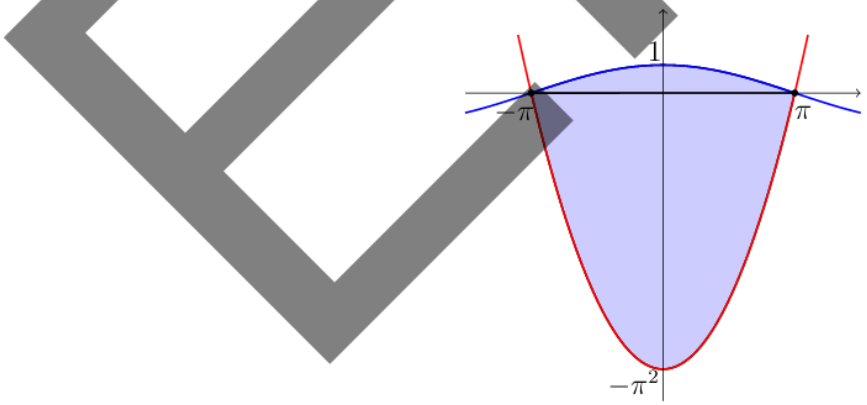
(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π.

Solución:

(5B) La parábola corta al eje horizontal cuando $x = -\pi$ y cuando $x = \pi$ y tiene el vértice en el punto $(0, -\pi^2)$. $f(x) = \cos(x/2)$ se hace cero cuando $x = -\pi$ y $x = \pi$ y su gráfica tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

(a) El recinto solicitado es:



(b) El área se calcula mediante la siguiente integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - (x^2 - \pi^2) \right) dx = \left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + \pi^2 x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 4 + \frac{4\pi^3}{3}.$$

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO	PROVES D'ACCÉS A FACULTATS, ESCOLES TÈCNIQUES SUPERIORS I COL· LEGIS UNIVERSITARIS PRUEBAS DE ACCESO A FACULTADES, ESCUELAS TÉCNICAS SUPERIORES Y COLEGIOS UNIVERSITARIOFASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO**

Barem: / Baremo: Se elegirá el EJERCICIO A o el EJERCICIO B, del que sólo se harán TRES de los problemas propuestos.

Cada problema se puntuará de 0 a 3,3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado.

La suma de las puntuaciones de cada problema más 0,1 será la calificación de la prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria)

EJERCICIO A

Problema 1:

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Pregunta 2: Algebra (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$ Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m.

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

BY NC SA

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Pregunta 3: Geometría (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$ se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m.

3.2 Consideramos la recta S del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y - 1 = \frac{z-1}{-1}$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a S.

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta S que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta S con el eje Z.

Pregunta 4: Análisis (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f.

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f.

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f.

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad *X* transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Solución:

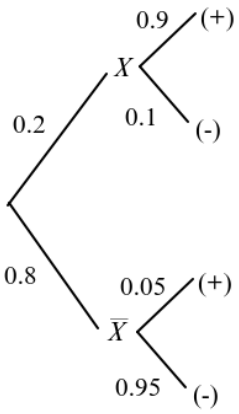
Se trata de un problema de probabilidad. Vamos a definir los siguientes sucesos:

X – persona que padece la enfermedad.
X – persona que NO padece la enfermedad.
(+) - El test da positivo.
(-) - El test da negativo.
Si la enfermedad la padece el 20% de la población podemos deducir que el 80% no la padece por lo que tenemos que: $P(X) = 0.2$ y $P(\overline{X}) = 0.8$

Si la persona está enferma el test da positivo en el 90% de los casos por lo que: $P(+/X) = 0.9$ en el resto de casos (10%) da negativo por lo que $P(-/X) = 0.1$

Si la persona NO está enferma el test da positivo en el 5% de los casos por lo que: $P(+/\overline{X}) = 0.05$ en el resto de casos (95%) da negativo por lo que $P(-/\overline{X}) = 0.95$

Con estos datos podemos construir el árbol de probabilidad siguiente:



Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

Nos preguntan por $P(+)$ que será la suma de todos los caminos que en el árbol nos llevan a ese resultado por lo que es una cuestión de **probabilidad total**:

$$P(+) = P(X) \cdot P(+/X) + P(\overline{X}) \cdot P(+/\overline{X}) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.05 = 0.22 = 22\%$$

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

Como sabemos que ha dado positivo se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizaremos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{X}/+) = \frac{P(\overline{X} \cap +)}{P(+)}$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$P(\overline{X} \cap +) = P(\overline{X}) \cdot P(+/\overline{X}) = 0.8 \cdot 0.05 = 0.04$

$P(+) = 0.22$ (del apartado anterior)

$$P(\overline{X}/+) = \frac{P(\overline{X} \cap +)}{P(+)} = \frac{0.04}{0.22} = 0.\overline{18} \simeq 0.1818$$

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Ahora no tenemos en cuenta el test y el problema se transforma en un problema de distribución binomial. Para no confundir en las fórmulas podemos definir la variable de la binomial como:

Y -"estar enfermo" con probabilidad $P(Y) = 0.2$

Por lo que estamos trabajando con una binomial de características: $B(8,0.2)$

Para hallar lo que nos piden podemos hacerlo utilizando la fórmula o la tabla.

Por la fórmula:

Como nos dicen que como máximo 2 tengan la enfermedad tendremos que calcular y sumar las probabilidades de 0, 1 y 2:

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0.8^8 \simeq 0.1678$$

$$P(Y = 1) = \binom{8}{1} 0.2^1 \cdot 0.8^7 = 8 \cdot 0.2 \cdot 0.8^7 \simeq 0.3355$$

$P(Y = 2) = \binom{8}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^6 = 28 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^6 \simeq 0.2936$ (Recordemos que $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = 28$)

Sumando lo tres resultados tenemos la probabilidad pedida:

$P(Y \leq 2) = 0.1678 + 0.3355 + 0.2936 = 0.7969$

Con la tabla:

Vamos a la columna n y buscamos el valor 8. En la columna k buscamos el valor 2. Y ahora vamos en horizontal a la columna de probabilidad 0.2.

El valor que muestra la tabla es el que hemos hallado: $P(Y \leq 2) = 0.7969$

BY NC SA

Pregunta 2.1:

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$ Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m.

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

Solución:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m.

Si nos fijamos se trata de una discusión de un sistema de ecuaciones donde T es la matriz de los coeficientes, v la de incógnitas y u la de los términos independientes.

Vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius para la discusión tomando como matrices de coeficientes y ampliada las siguientes:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes. Para ello calculamos el valor del determinante de orden 3:

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - m^2 - 0 = 4 - m^2$$

Igualando a cero sabremos los valores que lo anulan:

$4 - m^2 = 0 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow m = \pm 2$

Por lo que tenemos tres posibles casos: $m = 2$, $m = -2$ y $m \neq \pm 2$

Estudiamos los tres casos:

Caso $m \neq \pm 2$

Como el determinante de orden 3 no es cero tenemos que $RgT = 3$ y como la matriz ampliada no puede tener rango 4 se puede afirmar por el Teorema que: $RgT = RgT^* = 3 = nº incógnitas$ por lo que el sistema será compatible determinado (SCD)

Caso $m = 2$:

$$T=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad T^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Como el determinante de orden 3 de la matriz de los coeficientes es cero (las dos primeras filas y columnas son iguales) tenemos que el rango será inferior a 3 probamos un menor de orden 2:

$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ por lo que tenemos que $RgT=2$

Ahora tenemos que estudiar el rango de la ampliada pero nos podemos dar cuenta que las dos primeras filas vuelven a ser iguales por lo que cualquier menor de orden 3 será cero (podemos comprobarlo pero sería una pérdida de tiempo) por lo que $RgT^*=2$

Así que, en este caso tenemos que: $RgT=RgT^*=2<n^{\underline{o}}incógnitas$ por lo que, según el teorema, tendremos que se trata de un sistema compatible (rangos iguales) pero indeterminado (menor rango que n.º de incógnitas) (SCI)

Caso $m=-2$:

$$T=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad T^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 0 & 4\\ -2 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Como el determinante de orden 3 de la matriz de los coeficientes es cero (las dos primeras filas y columnas son proporcionales) tenemos que el rango será inferior a 3 probamos un menor de orden 2:

$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ por lo que tenemos que $RgT=2$

Ahora tenemos que estudiar el rango de la ampliada. Descartamos tomar la primera columna que vemos que es proporcional a la segunda y tomamos un menor con las tres últimas columnas:

$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=0+0+8-0-0+8=16\neq 0$ al existir un menor de orden 3 diferente de cero

tenemos que:

$RgT^*=3$

Así que, en este caso tenemos que: $RgT=2\neq RgT^*=3$ por lo que, según el teorema, tendremos que se trata de un sistema incompatible (rangos distintos) y no tendrá solución (SI)

En resumen:

$\boldsymbol{Si\ \ m\neq\pm 2\rightarrow RgT=RgT^*=3=n^{\underline{o}}incógnitas\ \ SCD}$

$\boldsymbol{Si\ \ m=2\rightarrow RgT=RgT^*=2<n^{\underline{o}}incógnitas\ \ SCI}$

$\boldsymbol{Si\ \ m=-2\rightarrow RgT=2\neq RgT^*=3\ SI}$

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv=u$ para $m=-1$

Según la discusión desarrollada en el punto anterior como $m\neq\pm 2$ tenemos que el sistema será SCD

Queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Podríamos resolver por Cramer o por Gauss pero, si lo observamos, una de las incógnitas ya está despejada ($z = -2$) por lo que queda reducido a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que voy a resolver por reducción:

$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases} \rightarrow$ (sumamos ambas ecuaciones): $3y = 12 \rightarrow y = 4$

Con ese valor podemos ir a la primera ecuación y tenemos que: $2x - 4 = 4 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

Por lo que la solución es: $(x, y, z) = (4, 4, -2)$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

Primero calculamos como queda la matriz T: $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Planteamos la matriz de la que tenemos que calcular el determinante:

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de esa matriz podemos hacerlo por Sarrus directamente o bien aprovechar el desarrollo por menores de los elementos de la última fila:

$$|T - \alpha I| = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 \\ 2 & 2-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot ((2-\alpha)^2 - 4)$$
$$= (1-\alpha) \cdot (4 - 4\alpha + \alpha^2 - 4)$$

Por lo que: $|T - \alpha I| = (1-\alpha) \cdot (-4\alpha + \alpha^2) = (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot (-4 + \alpha)$
Igualando a cero tenemos las soluciones:

$$|T - \alpha I| = (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot (-4 + \alpha) = 0$$

Soluciones: $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$ $\alpha = 0$ y $-4 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 4$

En resumen $\alpha = 0, 1, 4$

Pregunta 2.2:

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Solución:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

Para hacer este apartado podemos calcular la matriz inversa y la transpuesta y comprobar que son iguales o bien aprovechar la definición de matriz inversa:$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Si la matriz es ortogonal $A^{-1} = A^t$ por lo que se tendrá que cumplir que: $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$

Calculamos la transpuesta de la matriz dada:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Hacemos el producto:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos^2(x) + sin^2(x) & 0 \\ 0 & sin^2(x) + cos^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz es ortogonal.

BY NC SA

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

Aplicamos lo mismo que antes, si es ortogonal cumplirá que: $B \cdot B^t = B^t \cdot B = I$

Calculamos la transpuesta: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hacemos el producto:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Igualamos la matriz resultante a la identidad:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que se cumpla tenemos que: $a^2 = 1$ y $b^2 = 1$ por lo que $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$

Como podemos combinar los valores habrá 4 matrices de ese tipo.

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Resolvemos con las letras teniendo en cuenta que la matriz es ortogonal $B^{-1} = B^t$

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow BX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \cdot BX = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = B^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la operación:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

Hemos de tener en cuenta que $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$ por lo que las matrices son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 3.1:

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$ se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

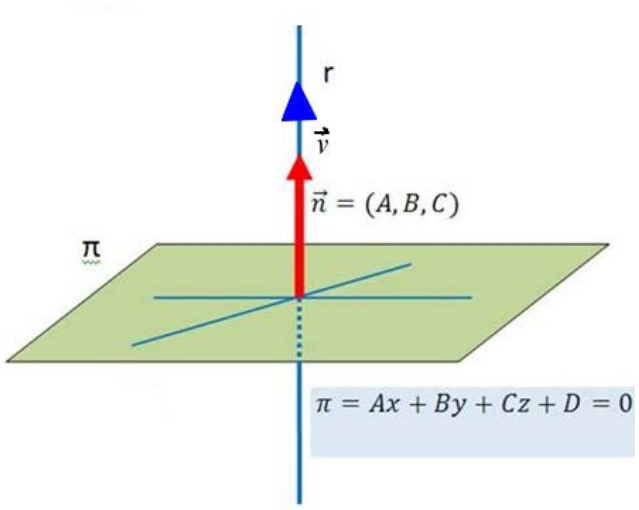
3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m.

Solución:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

Para que una recta y un plano sean perpendiculares el vector normal del plano y el director de la recta han de ser paralelos:



Como dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales tenemos que:

$\vec{n} = (2, m, 1)$ $\vec{v} = (2, -1, 1)$

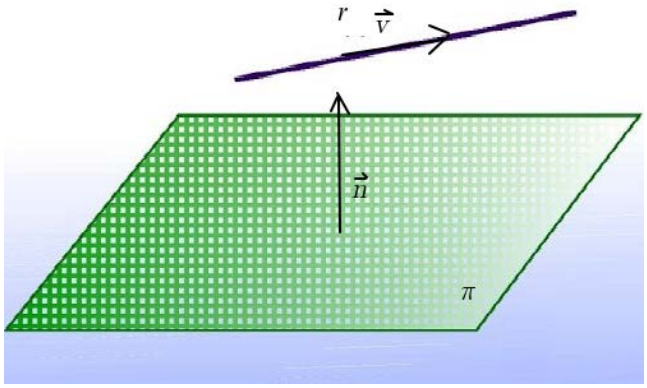
Establecemos la proporcionalidad: $\frac{2}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{1}{1}$ de donde se deduce que, para que sean perpendiculares:

$$\boldsymbol{m = -1}$$

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

Para que una recta y un plano sean paralelos los vectores normal del plano y director de la recta **han de ser perpendiculares.**

Recordemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.



$\vec{n} = (2, m, 1)$ $\vec{v} = (2, -1, 1)$

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero:

$\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, m, 1) \cdot (2, -1, 1) = 4 - m + 1 = 5 - m = 0 \rightarrow m = 5$

Hay que comprobar que no son **coincidentes**. Tomamos un punto de la recta y comprobamos que no está en el plano. $P_r = (0, -1, 1)$ $\pi: 2x + 5y + z - 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 1 - 3 = -7 \neq 0$ por lo que son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m.

Para hallar el punto que tienen en común dos elementos en el espacio podemos resolver el sistema formado por sus ecuaciones. Cuando se trata de una recta y un plano podemos expresar la recta en forma paramétrica, sustituir las ecuaciones en el plano y despejar el parámetro que hace que se cumplan las ecuaciones del plano:

$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ pasamos a paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

Sustituimos en la ecuación del plano las ecuaciones de la recta:

$\pi: 2x + my + z - 3 = 0 \rightarrow 2(2\lambda) + m(-1 - \lambda) + (1 + \lambda) - 3 = 0 \rightarrow (5 - m)\lambda - 2 - m = 0 \rightarrow \lambda = \frac{m+2}{-m+5}$

Sustituyendo el valor hallado en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+4}{-m+5} \\ y = -1 - \frac{m+2}{-m+5} = \frac{-7}{-m+5} \\ z = 1 + \frac{m+2}{-m+5} = \frac{7}{-m+5} \end{cases}$$

Por lo que el punto es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2m+4}{-m+5}, \frac{-7}{-m+5}, \frac{7}{-m+5}\right)$$

Pregunta 3.2:

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$s: \frac{x-1}{0} = y - 1 = \frac{z-1}{-1}$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s.

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z.

Solución:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s.

Tenemos que encontrar una ecuación de un plano. Como sabemos que es perpendicular a la recta su vector normal debe coincidir con el director de la recta, por lo que tenemos que:

$$\vec{v} = (0,1,-1) \rightarrow \pi: 0x + y - z + D = 0 \rightarrow y - z + D = 0$$

Como tiene que pasar por el punto $(1,1,1)$ sustituimos ese punto en la ecuación del plano y hallamos el término D:

$y - z + D = 0 \rightarrow 1 - 1 + D = 0 \rightarrow D = 0$

Por lo que una ecuación del plano buscado es: $y - z = 0$

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

Pasamos la recta de continua a paramétrica:

$$s: \frac{x-1}{0} = y - 1 = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Por lo que un punto cualquiera de la recta tendrá la expresión: $(1,1+\lambda,1-\lambda)$

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une:

Vector que une ese punto y el origen: $\overrightarrow{OP} = (1-0,1+\lambda-0,1-\lambda-0) = (1,1+\lambda,1-\lambda)$

Módulo del vector (distancia): $\sqrt{1^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2}$

Igualamos a 4 y resolvemos la ecuación:

$\sqrt{1^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = 4 \rightarrow 1^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = 16 \rightarrow 1 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 16 \rightarrow$

$\rightarrow 2\lambda^2 = 13 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tenemos los puntos buscados:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}} \\ z = 1 - \sqrt{\frac{13}{2}} \end{cases} \rightarrow \left(1{,}1 + \sqrt{\frac{13}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \sqrt{\frac{13}{2}} \\ z = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}} \end{cases} \rightarrow \left(1{,}1 - \sqrt{\frac{13}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$$

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z.

El eje Z es una recta que tiene como vector director unitario el $\vec{k} = (0,0,1)$

El ángulo que forman dos rectas es el formado por sus vectores directores:

$\vec{k} = (0,0,1)$ y $\vec{v} = (0,1,-1)$

Utilizamos la fórmula (basada en el producto escalar) de ángulo entre dos vectores:

$$cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|}$$

Sustituyendo valores:

$$cos\alpha = \frac{(0,1,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135º$$

Como el ángulo formado por dos rectas ha de ser menor o igual que 90º tenemos que tomar el suplementario: $180 - 135 = 45º$

Por lo que forman 45^a

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 4.1:

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f.

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f.

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f.

Solución:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f.

Se trata de una función racional polinómica donde el denominador nunca es cero en los reales $x^2+1\neq 0 \forall x\in\mathbb{R}$ por lo que su dominio serán todos los reales:

$$\boldsymbol{Dom f(x)=\mathbb{R}}$$

Además se trata de un cociente de dos funciones continuas donde el denominador no se anula en todos los reales por lo que será continua también en todo su dominio.

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

Asíntotas verticales NO tiene puesto que no existen puntos de discontinuidad.

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor del límite, si existe:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=0$ (porque el grado del polinomio denominador es mayor)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=0$ (porque el grado del polinomio denominador es mayor)

Por lo que tenemos una asíntota horizontal en: $y=0$

Asíntotas oblicuas NO tiene puesto que tiene horizontales.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento tenemos que calcular la derivada e igualar a cero:

$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}\rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=0$

Como se trata de un cociente sólo vale cero cuando lo vale el numerador:

$x^2+1-2x(x+1)=0\rightarrow -x^2-2x+1=0$

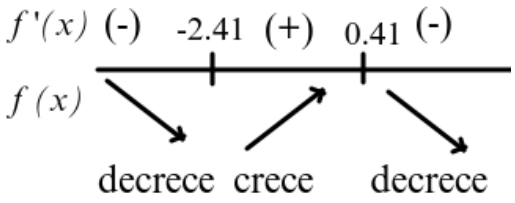
Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{-2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{-2}=-1\pm\sqrt{2}$

Por lo que tenemos dos puntos críticos: $x_1=-1+\sqrt{2}\simeq 0.41 x_2=-1-\sqrt{2}\simeq -2.41$

Dividimos ahora el dominio (que son todos los reales) en tres partes (recordemos que no tiene discontinuidades) y estudiamos el signo de la derivada en cada región:

$f'(-3)<0 \qquad f'(0)>0 \qquad f'(1)<0$

Por lo que tenemos gráficamente la siguiente situación:



Por lo que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento quedan:

Crece en $]-2.41, 0.41[$

Decrece en $]-\infty, -2.41[\cup]0.41, +\infty[$ (todos los intervalos son abiertos)

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f.

Por lo visto en el apartado anterior tenemos un mínimo relativo en el valor $x_m = -2.41$ y un máximo relativo en $x_M = 0.41$

Obteniendo la segunda coordenada ya tenemos los puntos:

$f(-2.41) \simeq -0.21$ $\qquad$ $f(0.41) \simeq 1.21$

Por lo cual tenemos un mínimo relativo en $P_m = (-2.41, -0.21)$ y un máximo relativo en $P_m = (0.41, 1.21)$

Como la función es continua y tiende a cero tanto en +∞ como en -∞ esos extremos relativos son **absolutos**.

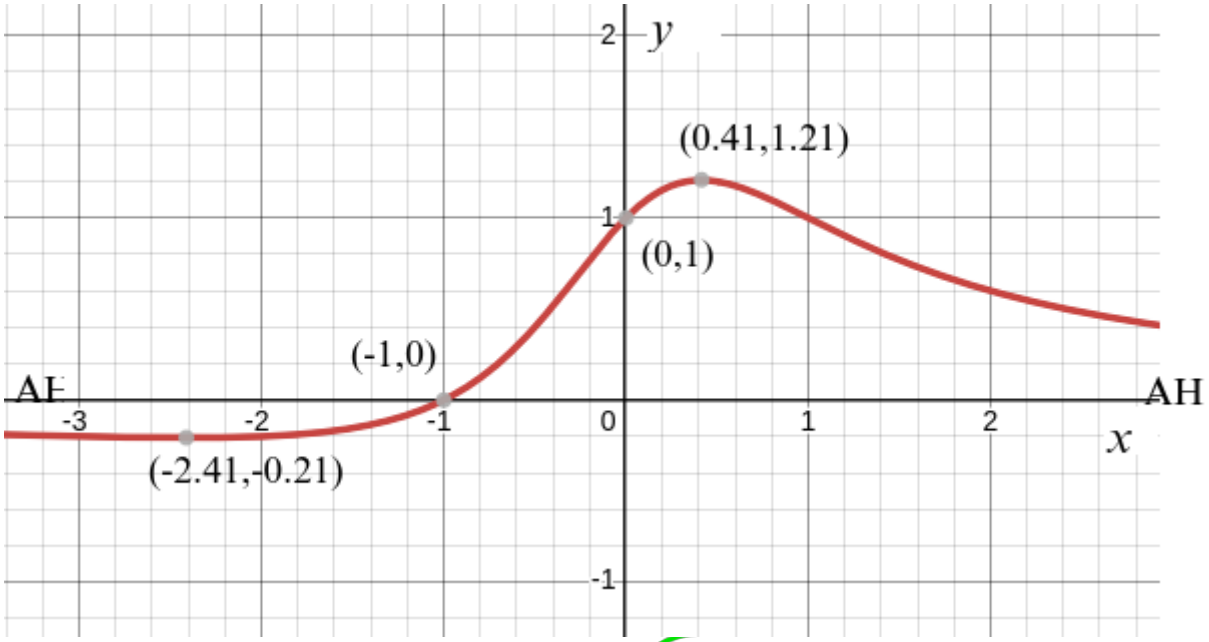
4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f.

Para representarla vamos a utilizar la monotonía, el máximo y mínimo hallados y la asíntota. Adicionalmente vamos a calcular los puntos de corte con los ejes:

Eje OX: $f(0) = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$ luego tenemos el punto $(0,1)$

Eje OY: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ por lo que tenemos el punto$(-1,0)$

Lo trasladamos a un eje de coordenadas y tenemos:



Pregunta 4.2

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

Solución:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

La función que tenemos que dibujar es una función coseno que es continua y derivable para todos los reales. Será una función periódica el estudio lo vamos a limitar al intervalo considerado.

Puntos de corte con los ejes:

Eje OY: Se da cuando $x = 0$: $f(0) = cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$ luego corta en el punto $(0,3)$

Eje OX: Se hallan igualando la función a cero. $f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función coseno oscila entre los valores -1 y +1 y si despejamos tenemos que:

$cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2$ lo cual es absurdo puesto que no puede valer menos que -1. NO corta al eje OX.

Hallamos los puntos críticos derivando e igualando a cero la derivada:

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \rightarrow f'(x) = \frac{-\pi}{9} sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$$

Resolvemos la ecuación: $sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$

Los ángulos que hacen cero el seno son $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \ldots$

$\frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow x = 0$ $\quad \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow x = 9$ $\quad \frac{\pi x}{9} = 2\pi \rightarrow x = 18$ como $18 \notin [0,12]$ sólo hay dos soluciones: $x = 0, x = 9$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos obtenidos:

$$f(0) = cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$$

BY NC SA

$f(9) = cos\left(\frac{\pi \cdot 9}{9}\right) + 2 = 1$

$f(12) = cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) + 2 = 1.5$

Tenemos un máximo en (0,3) y un mínimo en (9,1)

Como se trata de una función continua y acotada en un intervalo cerrado sabemos que alcanza sus valores mínimo y máximo absoluto en los relativos o en los extremos del intervalo (Weierstarss)

Máximo absoluto: (0,3)

Mínimo absoluto: (9,1)

Como la pared tiene 3 m de alto (que corresponde con el máximo absoluto) podemos concluir que queda dentro de la pared.

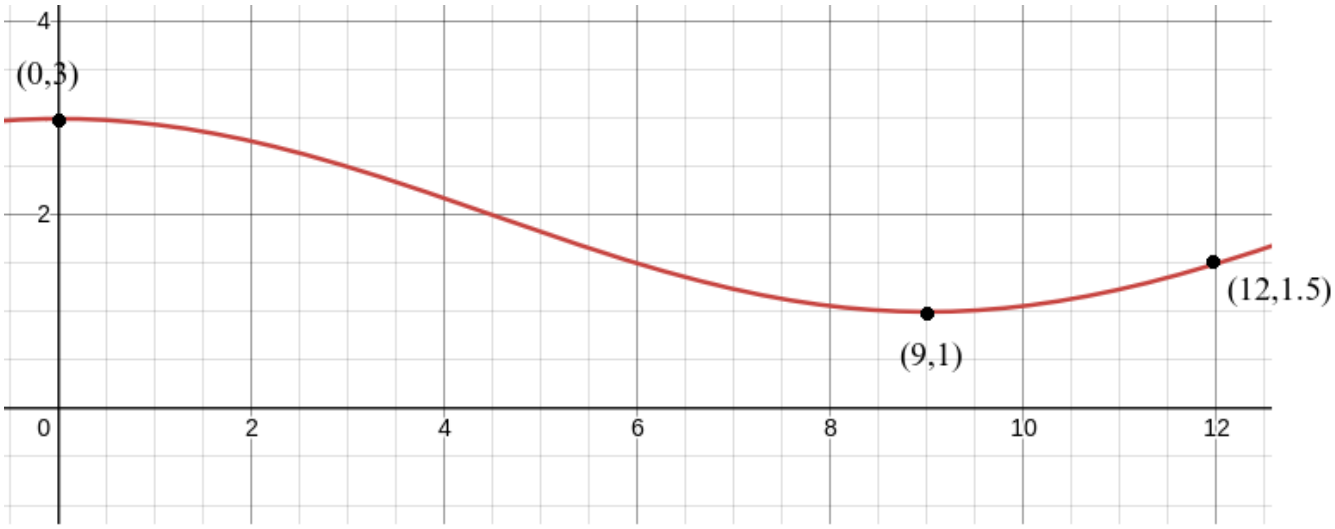
Monotonía. Estudiamos el signo antes y después de los puntos críticos:

$f'(3) = \frac{-\pi}{9} sen\left(\frac{\pi 3}{9}\right) < 0$ Decrece

$f'(10) = \frac{-\pi}{9} sen\left(\frac{\pi 10}{9}\right) > 0$ Crece

Decrece en]0,9[y crece en]9,12[

El dibujo de la pared queda:



4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

El color verde es el área por debajo de la curva. Eso corresponde con la integral definida de la misma en el intervalo [0,12]

Hacemos primero la indefinida:

$$\int \left(cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\right) dx = \int \left(cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)\right) dx + \int 2\, dx = \frac{9}{\pi}\left[sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)\right] + 2x + C$$

Con ese resultado calculamos la definida:

$$\int \left(cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2\right)dx = \left[\frac{9}{\pi}\left[sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)\right]+2x\right]_0^{12} = \frac{9}{\pi}sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)+24 \simeq -2.48+24 = 21.52m^2$$

La parte de color rojo se puede sacar como la diferencia con la superficie total de la pared:

$S_t = 3 \cdot 12 = 36m^2$

Por lo que la superficie pintada de rojo será: $S_r = 36 - 21.52 = 14.48m^2$. Y la de verde: $21.52m^2$

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

Como la superficie es de 21.52 m² y cada bote sirve para 3 m² tenemos que el número de botes será:

$\frac{21.52}{3} \simeq 7.17$

Por lo que necesitaremos 8 botes de pintura ya que con 7 no tendríamos suficiente.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

GENERALITAT VALENCIANA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA** D

BAREMO DEL EXAMEN: *Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.*
La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto.
Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

Pregunta 1: **Probabilidad y estadística (2.5 puntos)**

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de su dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por su parte, Rafa ganó el 25% mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados.

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Ro

Pregunta 2: **ÁLGEBRA (2.5 puntos)**

Responda al apartado 2.1 o 2.2

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produ unos valores reales x, y, z, respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tan mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x, más el triple de la pseudodensidad y, más la pseudodensida
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x, más el doble de la pseudodensidad z debe anularse
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y.

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones de eq factor catalizador α.

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibr existen, los valores x, y, z, en función del valor α

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $AX = BX + b$

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $det(A^5(2B)^{-1})$

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$ siendo I la matriz identidad.

Pregunta 3: **GEOMETRÍA (2.5 puntos)**

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3,1 Se consideran los puntos del espacio $A(0,-1,0)$ y $B(1,0,1)$, y el vector $v = (2,-1,1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A.

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B.

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B.

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

3,2 Dado el plano$\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$. Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC.

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Pregunta 4: **ANÁLISIS (2.5 puntos)**

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4,1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $\boldsymbol{F(t)}$ cuya derivada es $\boldsymbol{F'(t) = t^2(10 - t)}$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1: **Probabilidad y estadística (2.5 puntos)**

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por su parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados.

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

Solución:

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

Vamos a recopilar la información del enunciado como si fuese un problema de probabilidad. Definimos los sucesos siguientes:

H – Partido jugado en hierba.

T – Partido jugado en tierra batida.

D – Partido jugado en pista dura.

Ra – Partido ganado por Rafa.

Ro – Partido ganado por Roger.

Como el 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida podemos obtener que:

100-10-40=50 → el 50% se jugaron en pista dura.

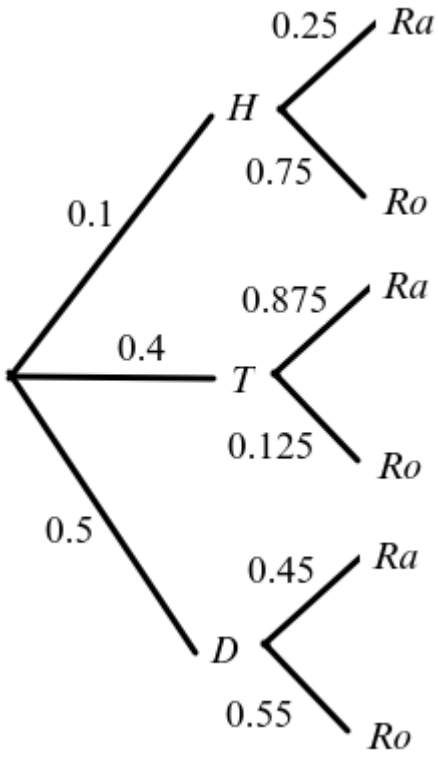
Por lo que tenemos que: $P(H) = 0.1$, $P(T) = 0.4$ y $P(D) = 0.5$

Por su parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, lo cual quiere decir que: $P(Ra/H) = 0.25$ y podemos deducir que el 75% fueron ganados por Roger: $P(Ro/H) = 0.75$

Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida, lo cual quiere decir que: $P(Ro/T) = 0.125$ y podemos deducir que el 87.5% los ganó Rafa $P(Ra/T) = 0.875$

Roger también ganó el 55% en pista dura, lo cual quiere decir que: $P(Ro/D) = 0.55$ y podemos deducir que el 45% los ganó Rafa $P(Ra/D) = 0.45$

Estos datos los podemos llevar a un diagrama de árbol como el siguiente:



Vamos a utilizar el teorema de **probabilidad total** para calcular el tanto por ciento de partidos ganados por Roger calculando:

$P(Ro) = P(H) \cdot P(Ro/H) + P(T) \cdot P(Ro/T) + P(D) \cdot P(Ro/D) = 0.1 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.125 + 0.5 \cdot 0.55 = 0.4$

$P(Ro) = 0.4 \rightarrow$

Roger ha ganado el 40% de los partidos jugados.

Podemos además deducir que: $\mathrm{P(Ra)} = 0.6 \rightarrow$ Rafa ha ganado el 60% de los partidos jugados.

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

Como conocemos que fue ganado por Rafa debemos utilizar la fórmula de Bayes y calcular:

$$P(D/Ra) = \frac{P(D \cap Ra)}{P(Ra)}$$

Del árbol tenemos que: $P(D/Ra) = P(D) \cdot P(Ra/D) = 0.5 \cdot 0.45 = 0.225$

Del punto anterior sabemos que: $P(Ra) = 0.6$

Sustituyendo valores: $P(D/Ra) = \frac{P(D \cap Ra)}{P(Ra)} = \frac{0.225}{0.6} = 0.375 = 37.5\%$

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

El problema se transforma en un problema de binomial donde tenemos que hay 10 casos y la probabilidad de victoria para Roger es de 0.55.$B(10,0.55)$

Recordamos la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial: $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

Como queremos saber la probabilidad de ganar 5 ó 6 vamos a calcular ambas y sumaremos:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.55^5 0.45^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} 0.55^5 0.45^5 = 252 \cdot 0.55^5 0.45^5 = 0.2340 = 23.4\%$$

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.55^6 0.45^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} 0.55^6 0.45^4 = 210 \cdot 0.55^6 0.45^4 = 0.2384 = 23.84\%$$

La probabilidad pedida será la suma:

$P(5 \vee 6) = 0.234 + 0.2384 = 0.4724 = 47.24\%$

Pregunta 2: **ÁLGEBRA (2.5 puntos)**

Responda al apartado 2.1 o 2.2

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x, y, z, respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x, más el triple de la pseudodensidad y, más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x, más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y.

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α.

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En ese caso, calcular, si existen, los valores x, y, z, en función del valor α

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones donde las incógnitas son los valores reales de las pseudodensidades:

x – Valor de la pseudensidad del compuesto X.

y – Valor de la pseudensidad del compuesto Y.

z – Valor de la pseudensidad del compuesto Z.

Ahora volvemos al enunciado para establecer las ecuaciones.

Tenemos (tanque 1) que la suma de la pseudodensidad x, más el triple de la pseudodensidad y, más la pseudodensidad z ha de valer 5:

$$x + 3y + z = 5$$

La segunda ecuación (tanque 2) es: la suma de α veces la pseudodensidad x, más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador:

$$\alpha x + 2z = 0$$

La tercera ecuación (tanque 3) es: la pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y.

$z = \alpha y$

Podemos escribir el sistema como: $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases}$

Como podemos observar se trata de un sistema de ecuaciones.

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones

de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α.

Nos están pidiendo que discutamos el sistema en función del parámetro. Vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Matriz de los coeficientes y ampliada del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \; M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Estudiamos los rangos. Comenzamos con la matriz de los coeficientes. Calculamos el determinante de orden 3 de la misma:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \alpha^2 - 0 - 3\alpha + 2\alpha = -\alpha^2 - \alpha$$

Igualamos a cero el resultado y obtenemos los valores que nos dan rango inferior a 3:

$$-\alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow -\alpha(\alpha + 1) = 0$$

Lo que nos da dos soluciones: $\alpha = 0$ y $\alpha = -1$

Tenemos que estudiar tres casos:

Caso $\alpha \neq 0, -1$ en este caso $RgM = 3$ y como el de la ampliada no puede ser mayor (es 3x3) tenemos que:

$RgM = RgM^* = 3 = nºdeincógnitas$ por el Teorema de Rouché se trata de un SCD (sistema compatible determinado).

Caso $\alpha = 0$ en este caso la matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que no es de rango 3 por lo que buscamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$ por lo que tenemos que el rango es 2.

Estudiamos el rango de la ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ podemos calcular los menores de orden 3 pero se puede observar que la primera y cuarta columna son proporcionales por lo que todos los menores que las incluyan valdrán cero. Por tanto tendremos, según el teorema de Rouché, que:

$RgM = RgM^* = 2 < nºdeincógnitas$ será un SCI (Sistema Compatible Indeterminado)

Caso $\alpha = -1$ en este caso la matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que no es de rango 3 por lo que buscamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$ por lo que tenemos que el rango es 2.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Estudiamos el rango de la ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Calculamos un menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 10 - 0 - 0 \neq 0$ por lo que la ampliada tiene rango 3. Según el teorema de Rouché tenemos que: $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ por lo que se trata de un sistema incompatible (SI)

Resumimos en un cuadro:

Si $\alpha \neq 0, -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 3 = nº$deincógnitas $\rightarrow$ SCD (Solución única)

Si $\alpha = 0 \rightarrow RgM = RgM^* = 2 <$ nºdeincógnitas $\rightarrow$ SCI (Infinitas soluciones)

Si $\alpha = -1 \rightarrow RgM = 2 \neq RgM^* = 3 \rightarrow$ SI (Sin soluciones)

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En ese caso, calcular, si existen, los valores x, y, z, en función del valor α

Según la discusión del apartado anterior tenemos que en ese caso el sistema es SCD por lo que tendrá solución única.

Podemos resolver con cualquier método (en el examen nos bastará con uno).

Por **sustitución**. El sistema es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que: $x = \frac{-2z}{\alpha}$

De la tercera ecuación tenemos que: $y = \frac{z}{\alpha}$

Sustituyendo en la primera ecuación ambos resultados:

$$\frac{-2z}{\alpha} + \frac{3z}{\alpha} + z = 5 \rightarrow \frac{z}{\alpha} + z = 5 \rightarrow z + \alpha z = 5\alpha \rightarrow z = \frac{5\alpha}{\alpha+1}$$

Hallamos las otras incógnitas: $x = \frac{-2z}{\alpha} \rightarrow x = \frac{-10}{\alpha+1}$ $y = \frac{z}{\alpha} \rightarrow y = \frac{5}{\alpha+1}$

Por lo que la solución es:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left(\frac{-10}{\alpha+1}, \frac{5}{\alpha+1}, \frac{5\alpha}{\alpha+1}\right)$$

También podemos resolver por **Cramer** ya que el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero.

$|M| = -\alpha(\alpha + 1)$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 10\alpha}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{-10}{\alpha+1}$$

BY NC SA

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ \alpha & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha+1)}=\frac{0+0+0-0-5\alpha-0}{-\alpha(\alpha+1)}=\frac{5}{\alpha+1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ \alpha & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & 0\end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha+1)}=\frac{0+0-5\alpha^2-0-0-0}{-\alpha(\alpha+1)}=\frac{5\alpha}{\alpha+1}$$

El resultado es el mismo.

2.2 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y el vector $b=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $AX=BX+b$

Se trata de una ecuación matricial primero vamos a resolver con las letras:

$AX=BX+b$	Pasamos las X al miembro de la izquierda
$AX-BX=b$	Sacamos factor común **por la derecha** de la X
$(A-B)X=b$	Premultiplicamos por la inversa en los dos miembros
$(A-B)^{-1}(A-B)X=(A-B)^{-1}\cdot b$	Aplicamos que una matriz por su inversa es la identidad
$I\cdot X=(A-B)^{-1}\cdot b$	Aplicamos que la identidad por una matriz es la misma matriz
$X=(A-B)^{-1}\cdot b$	

Ahora hacemos las operaciones representadas:

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=6+1=7\neq 0\ \exists(A-B)^{-1}$

Calculamos la inversa (por determinantes o por Gauss.

Por **determinantes:** Aplicamos la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adjA)^t$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

$(A-B)^{-1}\cdot(A-B)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ luego es correcto

Obtenemos el valor buscado:

$$X=(A-B)^{-1}\cdot b=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

BY NC SA

El resultado es el vector: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $det(A^5(2B)^{-1})$

Vamos a aplicar las propiedades de los determinantes para calcularlo.

Aplicamos que el valor del determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes:

$$det(A^5(2B)^{-1}) = det(A^5) \cdot det((2b)^{-1})$$

Aplicamos que el determinante de la potencia de una matriz es la potencia del determinante:

$$det(A^5(2B)^{-1}) = det(A^5) \cdot det((2B)^{-1}) = (detA)^5 \cdot det((2B)^{-1})$$

Aplicamos que el determinante de la inversa de una matriz es el inverso del valor del determinante:

$$det(A^5(2B)^{-1}) = det(A^5) \cdot det((2B)^{-1}) = (detA)^5 \cdot det((2B)^{-1}) = (detA)^5 \cdot \frac{1}{det(2B)}$$

Por último aplicando que el determinante del producto de un número (escalar) por una matriz de orden n es el número elevado al orden de la matriz:

$$det(A^5(2B)^{-1}) = det(A^5) \cdot det((2B)^{-1}) = (detA)^5 \cdot det((2B)^{-1}) = (detA)^5 \cdot \frac{1}{det(2B)} = \frac{(detA)^5}{2^2 \cdot detB}$$

Obtenemos ahora los valores de los determinantes de ambas matrices:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3, \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

El valor buscado es:

$$\boldsymbol{det\left(A^5(2B)^{-1}\right) = \frac{(detA)^5}{2^2 \cdot detB} = \frac{3^5}{4 \cdot 19} = \frac{243}{76}}$$

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$ siendo I la matriz identidad.

Escribimos la ecuación planteada:

$$\alpha A + \beta B = I \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la operación del miembro de la izquierda tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Salen las siguientes relaciones:

1. $2\alpha + 5\beta = 1$
2. $-\alpha - 2\beta = 0$
3. $\alpha + 2\beta = 0$
4. $\alpha + 3\beta = 1$

Las relaciones 2 y 3 son iguales y se puede deducir que: $\alpha = -2\beta$

Si sustituimos ese resultado en las relaciones 1 y 4 tenemos:

$2(-2\beta) + 5\beta = 1 \rightarrow \beta = 1$

$-2\beta + 3\beta = 1 \rightarrow \beta = 1$

Como ambos resultados no son contradictorios podemos llegar a la conclusión que son solución por lo que los valores buscados serán

$$\boldsymbol{\beta = 1 \text{ y } \alpha = -2}$$

BY NC SA

Pregunta 3: **GEOMETRÍA (2.5 puntos)**

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3,1 Se consideran los puntos del espacio $A(0,-1,0)$ y $B(1,0,1)$, y el vector $v=(2,-1,1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A.

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B.

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B.

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

Solución:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A.

Como el plano es perpendicular al vector ese vector es paralelo al vector normal del plano. Recordemos que el vector normal del plano son los coeficientes A, B y C de la ecuación del mismo. Por lo que la ecuación del plano será (salvo el coeficiente D):

$$2x-y+z+D=0$$

Como el plano tiene que pasar por el punto $A(0,-1,0)$ sustituimos en la ecuación del plano para determinar el coeficiente D:

$2\cdot 0-(-1)+0+D=0\rightarrow D=-1$

Por lo que la ecuación es:

$$\boldsymbol{2x-y+z-1=0}$$

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B.

Como tenemos que determinar la ecuación de una recta necesitamos un vector y un punto. El punto nos lo dan puesto que pasa por B y el vector será el vector normal del plano, es decir, $v=(2,-1,1)$

La recta pedida será en paramétricas:

$$\boldsymbol{r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}}$$

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B.

El punto más cercano será **la proyección del punto sobre el plano.** Para ello hallamos la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto. Esa recta la tenemos en el apartado anterior. Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la misma en la ecuación del plano:

$2x-y+z-1=0\rightarrow 2(1+2\lambda)-(-\lambda)+(1+\lambda)-1=0\rightarrow 6\lambda+2=0\rightarrow \lambda=\frac{-1}{3}$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos el punto de intersección:

BY NC SA

$r:\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ y = -\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ z = 1 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{cases}$ el punto será:

$$\boldsymbol{C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

Lo podemos hacer con la fórmula de distancia punto-plano o bien calculando el módulo del vector que une los puntos C y B.

- Por la fórmula: $d(B,\pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d(B,\pi) = \frac{2\cdot 1 - 0 + 1 - 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow d = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- Distancia entre los puntos C y D:

$$\overrightarrow{CB} = \left(1 - \frac{1}{3}, 0 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

El módulo del vector será: $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

3,2 Dado el plano$\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$. Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC.

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Solución:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

Para que el triángulo esté contenido en el plano lo han de estar los tres vértices del mismo. Hay que comprobar que todos los vértices verifican la ecuación del plano (nada más que uno no la verifique el triángulo no estará contenido)

Vértice $A(0,0,0) \rightarrow \pi: 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$ luego $A \in \pi$

Vértice $B(10,0,-20) \rightarrow \pi: 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 40 \neq 0$ luego $B \notin \pi$ por lo que el triángulo NO ESTÁ CONTENIDO EN EL PLANO

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC.

Primero hallamos la ecuación del plano formado por tres puntos. Para ello tomamos un punto como origen y los vectores que unen los otros dos y el origen.

Elegimos como punto origen del plano el $A(0,0,0)$

Trazamos dos vectores:

$\overrightarrow{AB} = (10-0,0-0,-20-0) = (10,0,-20)$

$\overrightarrow{AC} = (0-0,15-0,-30-0) = (0,15,-30)$

Con el punto y los dos vectores utilizamos la ecuación cartesiana para hallar la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -20 \\ 15 & -30 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 10 & -20 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} z = 0 \rightarrow 300x + 300y + 150z = 0$$

Al estar igualada a cero podemos dividir toda la ecuación: $2x + 2y + z = 0$

La proyección del punto D sobre el plano la hallamos como la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

La recta perpendicular al plano es la que tiene como vector director el vector normal del plano y pasa por el punto D. El vector normal es: $\vec{n} = (2,2,1)$ y el punto es $D(1,2,-1)$ La ecuación paramétrica será:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

La intersección con el plano se halla sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la del

plano:

$2x + 2y + z = 0 \rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \rightarrow 5 + 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-5}{9}$

Sustituyendo ahora en la recta tenemos que:

$r: \begin{cases} x = 1 + 2\left(\frac{-5}{9}\right) = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2\left(\frac{-5}{9}\right) = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \left(\frac{-5}{9}\right) = \frac{-14}{9} \end{cases}$ por lo que el punto es:

$$\boldsymbol{D' = \left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)}$$

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Lo podemos hacer con la fórmula de distancia punto-plano.

- Por la fórmula: $d(D, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d(D, \pi) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} u$$

Pregunta 4: **ANÁLISIS (2.5 puntos)**

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4,1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $\boldsymbol{F(t)}$ cuya derivada es $\boldsymbol{F'(t) = t^2(10 - t)}$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

Solución:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

Como conocemos la expresión de su derivada podemos calcular la integral correspondiente para hallar la función:

$$F'(t) = t^2(10 - t) \rightarrow F(t) = \int t^2\,(10 - t)dt = \int (10t^2 - t^3)\,dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$$

Para determinar la constante de integración utilizamos que en $t = 0 \rightarrow F(t) = 6$

$$F(0) = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = 6 \rightarrow C = 6$$

Por lo que la expresión queda:

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

Como nos piden un máximo tendremos que derivar la función e igualar a cero la derivada:

$F'(t) = t^2(10 - t) = 0 \rightarrow t = 0$ y $t = 10$

Las dos soluciones son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Para conocer su naturaleza calculamos la segunda derivada:

$F''(t) = 20t - 3t^2$

Sustituyendo valores:

$F''(0) = 20 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0$ No podemos conocer su naturaleza

$F''(10) = 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = -100 < 0$ por lo que será un máximo relativo

Sustituyendo ambos valores en la función original tenemos: $F(0) = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + 6 = 6$

$$F(10) = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{2518}{3} \simeq 839.33$$

Comparando ambos valores llegamos a la conclusión que

El máximo se alcanza pasados 10 días y es 839.33

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

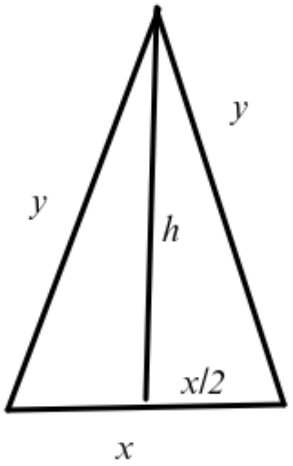
4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

Por el enunciado podemos deducir que se trata de un triángulo isósceles. Llamamos:

x – longitud de la base.

y – longitud de los otros dos lados.

Podemos ayudarnos del dibujo de la derecha.



La expresión del área será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

donde: $b = x$

Para hallar la altura en función de las variables utilizamos Pitágoras:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

La expresión del área quedará: $A(x,y) = \frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

Para expresarla en función de una única variable utilizamos que el perímetro total ha de ser de 60 metros:

$$2y + x = 60 \rightarrow y = \frac{60-x}{2}$$

Si sustituimos en la expresión y simplificamos:

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3600 - 120x + x^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3600-120x}{4}} \rightarrow A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{900 - 30x}\ A(x) = \sqrt{\frac{450x^2 - 15x^3}{2}}$$

Otro método alternativo es la fórmula de Herón que nos da el área de un triángulo en función de la longitud de sus lados:

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ donde a, b y c son los lados y s el semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$

Para nuestro triángulo tenemos que: $a = x \qquad b = c = y = \frac{60-x}{2} \quad s = 30$

Sustituyendo valores:

$$A(x) = \sqrt{30 \cdot (30-x) \cdot \left(30 - \frac{60-x}{2}\right) \cdot \left(30 - \frac{60-x}{2}\right)} = \sqrt{30 \cdot (30-x) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{450x^2 - 15x^3}{2}}$$

Podemos ver que es la misma expresión.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Como es el cuadrado del área basta con elevar la expresión hallada en el apartado anterior para obtenerla:

$$f(x) = \big(A(x)\big)^2 = \frac{450x^2 - 15x^3}{2}$$

Para hallar un máximo de esa función bastará con calcular su derivada e igualar a cero:

$f'(x) = \frac{900x - 45x^2}{2} = 0 \rightarrow 900x - 45x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $900 - 45x = 0 \rightarrow x_2 = \frac{900}{45} = 20$

Luego tenemos dos posibles máximos o mínimos: $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$

Para determinar su naturaleza calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{900 - 90x}{2}$$

Sustituyendo los valores hallados:

$f''(0) = \frac{900 - 90 \cdot 0}{2} = 450 > 0$ por lo que es mínimo.

$f''(20) = \frac{900 - 90 \cdot 20}{2} = -450 < 0$ por lo que se trata de un máximo.

Por lo que el valor buscado es: $x = 20$

El área en ese caso será: $A(20) = \sqrt{\frac{450 \cdot 20^2 - 15 \cdot 20^3}{2}} = \sqrt{30000} \simeq 173.21 m^2$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Vídeos y otras páginas webs

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Adela Garmendia Antolín:

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS: SELECTIVIDAD 2026

https://www.youtube.com/watch?v=Y8_wx3Ja2Zg

ANDALUCÍA

https://www.youtube.com/watch?v=mfIxlS95sBQ

https://www.youtube.com/watch?v=S-dRF5XYqt8

ARAGÓN:

https://www.youtube.com/watch?v=q9gx2kz5NAc

https://www.youtube.com/watch?v=Y8_wx3Ja2Zg

https://www.youtube.com/watch?v=pHT0oAt-1f0

https://www.youtube.com/watch?v=1bDbw-OzHZs

BALEARES

https://www.facebook.com/matesconandres/videos/examen-pau-resuelto-baleares-junio-2026-matem%C3%A1ticas-aplicadas-a-las-ciencias-soc/883148571484026/

https://consent.youtube.com/m?continue=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fshorts%2FN1ueBAzUdyk%3Fcbrd%3D1&gl=ES&m=0&pc=yt&cm=2&hl=es&src=1

https://www.instagram.com/reel/DZFsoGEjDWl/

https://www.youtube.com/shorts/N1ueBAzUdyk

https://www.youtube.com/watch?v=5vY94uGHThE

CANARIAS

https://www.youtube.com/watch?v=tvYpyNyEtpY

https://www.youtube.com/watch?v=jAAFDwOVjrs

CANTABRIA

https://www.youtube.com/watch?v=nGxATJo5jQg

https://www.youtube.com/watch?v=_uJ6ys3T8zU

Castilla La Mancha

https://www.youtube.com/watch?v=LycPGCkrWGg

https://www.youtube.com/watch?v=LycPGCkrWGg&t=14

https://www.youtube.com/watch?v=1mKgnwr1HtY

CASTILLA Y LEÓN

https://www.youtube.com/watch?v=8t6dBEjAKAU

CATALUÑA

https://www.youtube.com/watch?v=Y8_wx3Ja2Zg

GALICIA

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.youtube.com/shorts/E7WONiRnrWU&ved=2ahUKEwj0q4vd8_KUAxVNT6QEHdG4FBMQwqsBegQIFhAB&usg=AOvVaw0jK2EDbunlMBpL9JdQdCAs

LA RIOJA

https://www.youtube.com/watch?v=2eXOGYBrJlU

https://www.youtube.com/watch?v=D2c8gQPaIK0

MADRID

https://www.youtube.com/watch?v=4_iA1IVTsFM

MURCIA

https://www.instagram.com/reel/DZH2iB1I0BV/

https://www.tiktok.com/@laurimathteacher/video/7647152448259230998

NAVARRA

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DqvdIeEPDUng&ved=2ahUKEwja3vLo9fKUAxVHVaQEHWbsOz8QwqsBegQIFhAB&usg=AOvVaw2SBDffIHU6Yi0Kqm16xPxt

https://www.youtube.com/watch?v=qvdIeEPDUng

https://www.youtube.com/watch?v=cEAwH-HwEKM

https://www.youtube.com/watch?v=NiuCX7wibjg

PAÍS VASCO

https://www.youtube.com/watch?v=lBDnRUsWpj8

https://www.tiktok.com/@profesor10demates/video/7424447091700665633

https://www.youtube.com/watch?v=22BQE1oMmdo

VALENCIA

https://www.youtube.com/watch?v=Jcs9O43F7rs

https://www.youtube.com/watch?v=2wjHePeKE-c

https://www.youtube.com/watch?v=vPrYPxunfvk

https://www.youtube.com/watch?v=FXrlzZ0eGFE

OTROS

Vídeos con problemas de Selectividad resueltos de otros cursos:

Matemáticas II

Andalucía 2023
https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=1
Asturias 2023
https://www.youtube.com/watch?v=sEHdF8LVNI0&t=13s
Castilla La Mancha 2023

https://www.youtube.com/watch?v=rUaT_H1MiZM&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=2

Canarias 2023

https://www.youtube.com/watch?v=u8-g1UWQ_tQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=3
Cataluña 2023
https://www.youtube.com/watch?v=TusD3xYL7EQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=4
UNED 2023
https://www.youtube.com/watch?v=Gr-Q6_CPbIw
Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hsnPKI6KVTc

Sociales II

UNED 2022

https://www.youtube.com/watch?v=-7VQYaO_Awg

2023

https://www.youtube.com/watch?v=2tAZfLLFsxI

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Cg3t1PjXZm8

Comunidad Valenciana 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hLSBvJNoc5A&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq
https://www.youtube.com/watch?v=eJuxeLZai2w&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=3
https://www.youtube.com/watch?v=d2QgtZkAep8&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=4

Textos Marea Verde

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

SELECTIVIDAD 2026

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE

1. Comunidad autónoma de Andalucía 3
2. Comunidad autónoma de Aragón 25
3. Comunidad autónoma de Asturias 50
4. Comunidad autónoma de Islas Baleares 80
5. Comunidad autónoma de Islas Canarias 100
6. Comunidad autónoma de Cantabria 124
7. Comunidad autónoma de Castilla – La Mancha 157
8. Comunidad autónoma de Castilla y León 179
9. Comunidad autónoma de Cataluña 209
10. Comunidad autónoma de Extremadura 229
11. Comunidad autónoma de Galicia 262
12. Comunidad autónoma de La Rioja 289
13. Comunidad autónoma de Madrid 327
14. Comunidad autónoma de Murcia 357
15. Comunidad autónoma de Navarra 382
16. Comunidad autónoma de País Vasco 413
17. Comunidad autónoma de Valencia 438
18. Vídeos y otras páginas web con problemas resueltos 477

ÍNDICE **484**