

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

VALENCIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO 	PROVES D'ACCÉS A FACULTATS, ESCOLES TÈCNIQUES SUPERIORS I COL·LEGIS UNIVERSITARIS PRUEBAS DE ACCESO A FACULTADES, ESCUELAS TÉCNICAS SUPERIORES Y COLEGIOS UNIVERSITARIO FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
Barem: / Baremo: Se elegirá el EJERCICIO A o el EJERCICIO B, del que sólo se harán TRES de los problemas propuestos. Cada problema se puntuará de 0 a 3,3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones de cada problema más 0,1 será la calificación de la prueba. Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria)		

EJERCICIO A

Problema 1:

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Pregunta 2: Algebra (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$ Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Pregunta 3: Geometría (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$ se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.2 Consideramos la recta S del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a S .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta S que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta S con el eje Z .

Pregunta 4: Análisis (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Solución:

Se trata de un problema de probabilidad. Vamos a definir los siguientes sucesos:

X – persona que padece la enfermedad.

$\bar{X}$ – persona que NO padece la enfermedad.

(+) - El test da positivo.

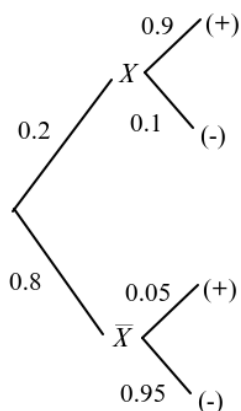
(-) - El test da negativo.

Si la enfermedad la padece el 20% de la población podemos deducir que el 80% no la padece por lo que tenemos que: $P(X) = 0.2$ y $P(\bar{X}) = 0.8$

Si la persona está enferma el test da positivo en el 90% de los casos por lo que: $P(+/X) = 0.9$ en el resto de casos (10%) da negativo por lo que $P(-/X) = 0.1$

Si la persona NO está enferma el test da positivo en el 5% de los casos por lo que: $P(+/\bar{X}) = 0.05$ en el resto de casos (95%) da negativo por lo que $P(-/\bar{X}) = 0.95$

Con estos datos podemos construir el árbol de probabilidad siguiente:



Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

Nos preguntan por $P(+)$ que será la suma de todos los caminos que en el árbol nos llevan a ese resultado por lo que es una cuestión de **probabilidad total**:

$$P(+) = P(X) \cdot P(+/X) + P(\bar{X}) \cdot P(+/\bar{X}) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.05 = 0.22 = 22\%$$

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

Como sabemos que ha dado positivo se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizaremos la fórmula de Bayes:

$$P(\bar{X}/+) = \frac{P(\bar{X} \cap +)}{P(+)}$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$$P(\bar{X} \cap +) = P(\bar{X}) \cdot P(+/\bar{X}) = 0.8 \cdot 0.05 = 0.04$$

$$P(+) = 0.22 \text{ (del apartado anterior)}$$

$$P(\bar{X}/+) = \frac{P(\bar{X} \cap +)}{P(+)} = \frac{0.04}{0.22} = 0.\overline{18} \approx 0.1818$$

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Ahora no tenemos en cuenta el test y el problema se transforma en un problema de distribución binomial. Para no confundir en las fórmulas podemos definir la variable de la binomial como:

Y - "estar enfermo" con probabilidad $P(Y) = 0.2$

Por lo que estamos trabajando con una binomial de características: $B(8, 0.2)$

Para hallar lo que nos piden podemos hacerlo utilizando la fórmula o la tabla.

Por la fórmula:

Como nos dicen que como máximo 2 tengan la enfermedad tendremos que calcular y sumar las probabilidades de 0, 1 y 2:

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0.8^8 \approx 0.1678$$

$$P(Y = 1) = \binom{8}{1} 0.2^1 \cdot 0.8^7 = 8 \cdot 0.2 \cdot 0.8^7 \approx 0.3355$$

$$P(Y = 2) = \binom{8}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^6 = 28 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^6 \approx 0.2936 \text{ (Recordemos que } \binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = 28 \text{)}$$

Sumando lo tres resultados tenemos la probabilidad pedida:

$$P(Y \leq 2) = 0.1678 + 0.3355 + 0.2936 = 0.7969$$

Con la tabla:

Vamos a la columna n y buscamos el valor 8. En la columna k buscamos el valor 2. Y ahora vamos en horizontal a la columna de probabilidad 0.2.

El valor que muestra la tabla es el que hemos hallado: $P(Y \leq 2) = 0.7969$

Pregunta 2.1:

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$ Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

Solución:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Si nos fijamos se trata de una discusión de un sistema de ecuaciones donde T es la matriz de los coeficientes, v la de incógnitas y u la de los términos independientes.

Vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius para la discusión tomando como matrices de coeficientes y ampliada las siguientes:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes. Para ello calculamos el valor del determinante de orden 3:

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - m^2 - 0 = 4 - m^2$$

Igualando a cero sabremos los valores que lo anulan:

$$4 - m^2 = 0 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow m = \pm 2$$

Por lo que tenemos tres posibles casos: $m = 2$, $m = -2$ y $m \neq \pm 2$

Estudiamos los tres casos:

Caso $m \neq \pm 2$

Como el determinante de orden 3 no es cero tenemos que $RgT = 3$ y como la matriz ampliada no puede tener rango 4 se puede afirmar por el Teorema que: $RgT = RgT^* = 3 = n^{\circ} \text{incógnitas}$ por lo que el sistema será compatible determinado (SCD)

Caso $m = 2$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Como el determinante de orden 3 de la matriz de los coeficientes es cero (las dos primeras filas y columnas son iguales) tenemos que el rango será inferior a 3 probamos un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ por lo que tenemos que } RgT = 2$$

Ahora tenemos que estudiar el rango de la ampliada pero nos podemos dar cuenta que las dos primeras filas vuelven a ser iguales por lo que cualquier menor de orden 3 será cero (podemos comprobarlo pero sería una pérdida de tiempo) por lo que $RgT^* = 2$

Así que, en este caso tenemos que: $RgT = RgT^* = 2 < n^{\circ} \text{incógnitas}$ por lo que, según el teorema, tendremos que se trata de un sistema compatible (rangos iguales) pero indeterminado (menor rango que n.º de incógnitas) (SCI)

Caso $m = -2$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Como el determinante de orden 3 de la matriz de los coeficientes es cero (las dos primeras filas y columnas son proporcionales) tenemos que el rango será inferior a 3 probamos un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ por lo que tenemos que } RgT = 2$$

Ahora tenemos que estudiar el rango de la ampliada. Descartamos tomar la primera columna que vemos que es proporcional a la segunda y tomamos un menor con las tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 8 - 0 - 0 + 8 = 16 \neq 0 \text{ al existir un menor de orden 3 diferente de cero}$$

tenemos que:

$$RgT^* = 3$$

Así que, en este caso tenemos que: $RgT = 2 \neq RgT^* = 3$ por lo que, según el teorema, tendremos que se trata de un sistema incompatible (rangos distintos) y no tendrá solución (SI)

En resumen:

Si $m \neq \pm 2 \rightarrow RgT = RgT^* = 3 = n^{\circ} \text{incógnitas}$ SCD

Si $m = 2 \rightarrow RgT = RgT^* = 2 < n^{\circ} \text{incógnitas}$ SCI

Si $m = -2 \rightarrow RgT = 2 \neq RgT^* = 3$ SI

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$

Según la discusión desarrollada en el punto anterior como $m \neq \pm 2$ tenemos que el sistema será SCD

Queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Podríamos resolver por Cramer o por Gauss pero, si lo observamos, una de las incógnitas ya está despejada ($z = -2$) por lo que queda reducido a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que voy a resolver por reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases} \rightarrow (\text{sumamos ambas ecuaciones}): 3y = 12 \rightarrow y = 4$$

Con ese valor podemos ir a la primera ecuación y tenemos que: $2x - 4 = 4 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

Por lo que la solución es: $(x, y, z) = (4, 4, -2)$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$ siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$

Primero calculamos como queda la matriz T : $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Planteamos la matriz de la que tenemos que calcular el determinante:

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de esa matriz podemos hacerlo por Sarrus directamente o bien aprovechar el desarrollo por menores de los elementos de la última fila:

$$\begin{aligned} |T - \alpha I| &= \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 2 \\ 2 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) \cdot ((2 - \alpha)^2 - 4) \\ &= (1 - \alpha) \cdot (4 - 4\alpha + \alpha^2 - 4) \end{aligned}$$

Por lo que: $|T - \alpha I| = (1 - \alpha) \cdot (-4\alpha + \alpha^2) = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot (-4 + \alpha)$

Igualando a cero tenemos las soluciones:

$$|T - \alpha I| = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot (-4 + \alpha) = 0$$

Soluciones: $1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

$\alpha = 0$ y $-4 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 4$

En resumen $\alpha = 0, 1, 4$

Pregunta 2.2:

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Solución:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

Para hacer este apartado podemos calcular la matriz inversa y la transpuesta y comprobar que son iguales o bien aprovechar la definición de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Si la matriz es ortogonal $A^{-1} = A^t$ por lo que se tendrá que cumplir que: $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$

Calculamos la transpuesta de la matriz dada:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Hacemos el producto:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que la matriz es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

Aplicamos lo mismo que antes, si es ortogonal cumplirá que: $B \cdot B^t = B^t \cdot B = I$

Calculamos la transpuesta: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hacemos el producto:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Igualamos la matriz resultante a la identidad:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que se cumpla tenemos que: $a^2 = 1$ y $b^2 = 1$ por lo que $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$

Como podemos combinar los valores habrá 4 matrices de ese tipo.

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Resolvemos con las letras teniendo en cuenta que la matriz es ortogonal $B^{-1} = B^t$

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow BX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \cdot BX = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = B^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la operación:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

Hemos de tener en cuenta que $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$ por lo que las matrices son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3.1:

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$ se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

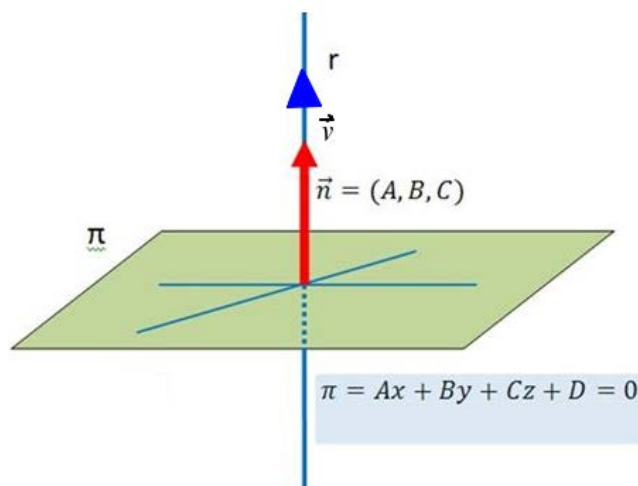
3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

Solución:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

Para que una recta y un plano sean perpendiculares el vector normal del plano y el director de la recta han de ser paralelos:



Como dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales tenemos que:

$$\vec{n} = (2, m, 1) \quad \vec{v} = (2, -1, 1)$$

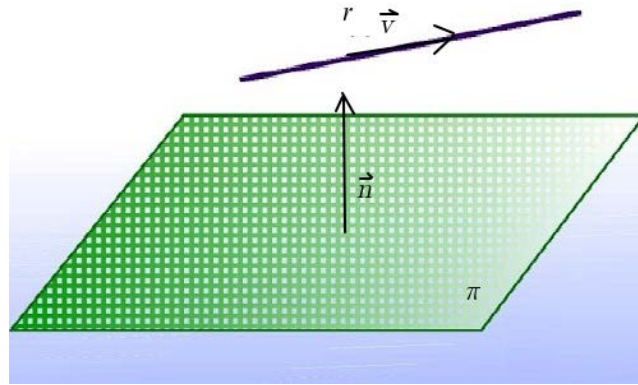
Establecemos la proporcionalidad: $\frac{2}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{1}{1}$ de donde se deduce que, para que sean perpendiculares:

$$m = -1$$

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

Para que una recta y un plano sean paralelos los vectores normal del plano y director de la recta **han de ser perpendiculares**.

Recordemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.



$$\vec{n} = (2, m, 1) \quad \vec{v} = (2, -1, 1)$$

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, m, 1) \cdot (2, -1, 1) = 4 - m + 1 = 5 - m = 0 \rightarrow m = 5$$

Hay que comprobar que no son **coincidentes**. Tomamos un punto de la recta y comprobamos que no está en el plano. $P_r = (0, -1, 1)$ $\pi: 2x + 5y + z - 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 1 - 3 = -7 \neq 0$ por lo que son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

Para hallar el punto que tienen en común dos elementos en el espacio podemos resolver el sistema formado por sus ecuaciones. Cuando se trata de una recta y un plano podemos expresar la recta en forma paramétrica, sustituir las ecuaciones en el plano y despejar el parámetro que hace que se cumplan las ecuaciones del plano:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{pasamos a paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano las ecuaciones de la recta:

$$\pi: 2x + my + z - 3 = 0 \rightarrow 2(2\lambda) + m(-1 - \lambda) + (1 + \lambda) - 3 = 0 \rightarrow (5 - m)\lambda - 2 - m = 0 \rightarrow \lambda = \frac{m+2}{-m+5}$$

Sustituyendo el valor hallado en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+4}{-m+5} \\ y = -1 - \frac{m+2}{-m+5} = \frac{-7}{-m+5} \\ z = 1 + \frac{m+2}{-m+5} = \frac{7}{-m+5} \end{cases}$$

Por lo que el punto es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2m+4}{-m+5}, \frac{-7}{-m+5}, \frac{7}{-m+5} \right)$$

Pregunta 3.2:

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

Solución:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

Tenemos que encontrar una ecuación de un plano. Como sabemos que es perpendicular a la recta su vector normal debe coincidir con el director de la recta, por lo que tenemos que:

$$\vec{v} = (0,1,-1) \rightarrow \pi: 0x + y - z + D = 0 \rightarrow y - z + D = 0$$

Como tiene que pasar por el punto $(1,1,1)$ sustituimos ese punto en la ecuación del plano y hallamos el término D :

$$y - z + D = 0 \rightarrow 1 - 1 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Por lo que una ecuación del plano buscado es: $y - z = 0$

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

Pasamos la recta de continua a paramétrica:

$$s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Por lo que un punto cualquiera de la recta tendrá la expresión: $((1, 1 + \lambda, 1 - \lambda))$

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une:

Vector que une ese punto y el origen: $\overrightarrow{OP} = (1 - 0, 1 + \lambda - 0, 1 - \lambda - 0) = (1, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$

Módulo del vector (distancia): $\sqrt{1^2 + (1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2}$

Igualemos a 4 y resolvemos la ecuación:

$$\sqrt{1^2 + (1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2} = 4 \rightarrow 1^2 + (1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 16 \rightarrow 1 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\lambda^2 = 13 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tenemos los puntos buscados:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}} \\ z = 1 - \sqrt{\frac{13}{2}} \end{cases} \rightarrow \left(1, 1 + \sqrt{\frac{13}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \sqrt{\frac{13}{2}} \\ z = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}} \end{cases} \rightarrow \left(1, 1 - \sqrt{\frac{13}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$$

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z.

El eje Z es una recta que tiene como vector director unitario el $\vec{k} = (0,0,1)$

El ángulo que forman dos rectas es el formado por sus vectores directores:

$$\vec{k} = (0,0,1) \text{ y } \vec{v} = (0,1,-1)$$

Utilizamos la fórmula (basada en el producto escalar) de ángulo entre dos vectores:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|}$$

Sustituyendo valores:

$$\cos \alpha = \frac{(0,1,-1) \cdot (0,0,1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

Como el ángulo formado por dos rectas ha de ser menor o igual que 90° tenemos que tomar el suplementario: $180 - 135 = 45^\circ$

Por lo que forman 45°

Pregunta 4.1:

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

Solución:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

Se trata de una función racional polinómica donde el denominador nunca es cero en los reales $x^2 + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ por lo que su dominio serán todos los reales:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R}$$

Además se trata de un cociente de dos funciones continuas donde el denominador no se anula en todos los reales por lo que será continua también en todo su dominio.

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Asíntotas verticales NO tiene puesto que no existen puntos de discontinuidad.

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor del límite, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \text{ (porque el grado del polinomio denominador es mayor)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \text{ (porque el grado del polinomio denominador es mayor)}$$

Por lo que tenemos una asíntota horizontal en: $y = 0$

Asíntotas oblicuas NO tiene puesto que tiene horizontales.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento tenemos que calcular la derivada e igualar a cero:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 0$$

Como se trata de un cociente sólo vale cero cuando lo vale el numerador:

$$x^2 + 1 - 2x(x+1) = 0 \rightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$$

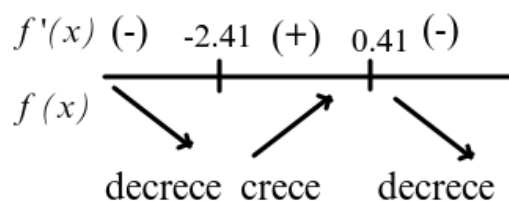
$$\text{Resolvemos la ecuación de segundo grado: } x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo que tenemos dos puntos críticos: $x_1 = -1 + \sqrt{2} \simeq 0.41$, $x_2 = -1 - \sqrt{2} \simeq -2.41$

Dividimos ahora el dominio (que son todos los reales) en tres partes (recordemos que no tiene discontinuidades) y estudiamos el signo de la derivada en cada región:

$$f'(-3) < 0 \quad f'(0) > 0 \quad f'(1) < 0$$

Por lo que tenemos gráficamente la siguiente situación:



Por lo que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento quedan:

Crece en $] - 2.41, 0.41[$

Decrece en $] - \infty, -2.41[\cup] 0.41, +\infty[$ (todos los intervalos son abiertos)

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

Por lo visto en el apartado anterior tenemos un mínimo relativo en el valor $x_m = -2.41$ y un máximo relativo en $x_M = 0.41$

Obteniendo la segunda coordenada ya tenemos los puntos:

$$f(-2.41) \simeq -0.21 \quad f(0.41) \simeq 1.21$$

Por lo cual tenemos un mínimo relativo en $P_m = (-2.41, -0.21)$ y un máximo relativo en $P_m = (0.41, 1.21)$

Como la función es continua y tiende a cero tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ esos extremos relativos son **absolutos**.

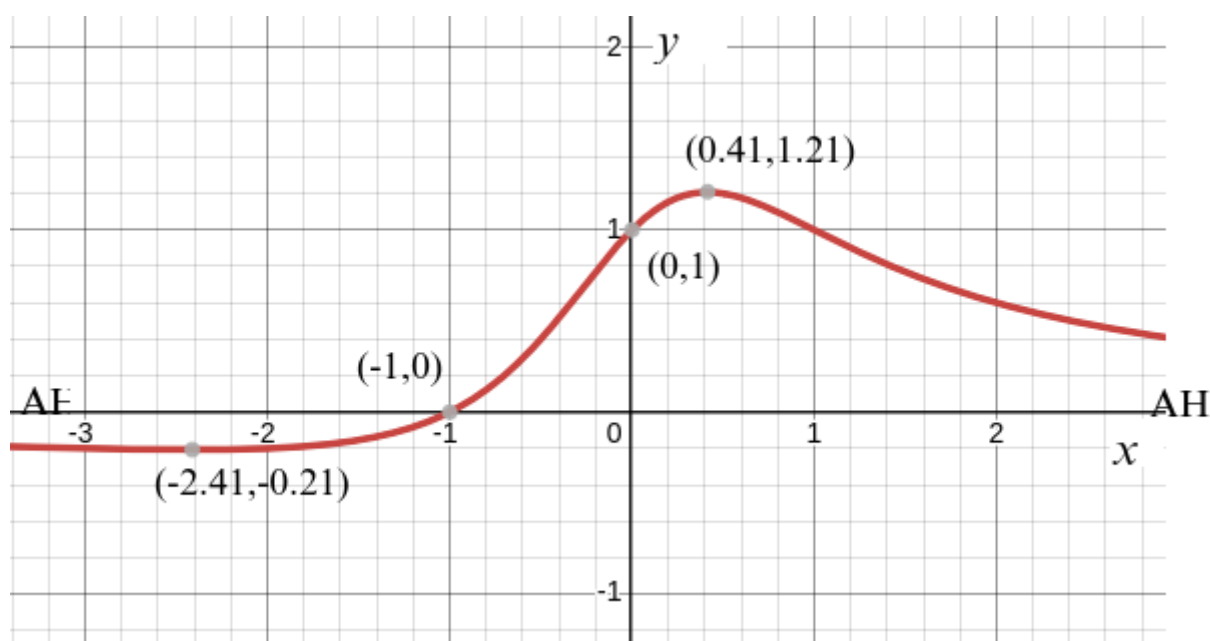
4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

Para representarla vamos a utilizar la monotonía, el máximo y mínimo hallados y la asíntota. Adicionalmente vamos a calcular los puntos de corte con los ejes:

Eje OX: $f(0) = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$ luego tenemos el punto $(0,1)$

Eje OY: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$ por lo que tenemos el punto $(-1,0)$

Lo trasladamos a un eje de coordenadas y tenemos:



Pregunta 4.2

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

Solución:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$

La función que tenemos que dibujar es una función coseno que es continua y derivable para todos los reales. Será una función periódica el estudio lo vamos a limitar al intervalo considerado.

Puntos de corte con los ejes:

Eje OY: Se da cuando $x = 0$: $f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$ luego corta en el punto $(0,3)$

Eje OX: Se hallan igualando la función a cero. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función coseno oscila entre los valores -1 y +1 y si despejamos tenemos que:

$\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2$ lo cual es absurdo puesto que no puede valer menos que -1. NO corta al eje OX.

Hallamos los puntos críticos derivando e igualando a cero la derivada:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \rightarrow f'(x) = \frac{-\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$$

Resolvemos la ecuación: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$

Los ángulos que hacen cero el seno son $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \dots$

$\frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow x = 0$ $\frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow x = 9$ $\frac{\pi x}{9} = 2\pi \rightarrow x = 18$ como $18 \notin [0,12]$ sólo hay dos soluciones: $x = 0, x = 9$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos obtenidos:

$$f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$$

$$f(9) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 9}{9}\right) + 2 = 1$$

$$f(12) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) + 2 = 1.5$$

Tenemos un máximo en (0,3) y un mínimo en (9,1)

Como se trata de una función continua y acotada en un intervalo cerrado sabemos que alcanza sus valores mínimo y máximo absoluto en los relativos o en los extremos del intervalo (Weierstarss)

Máximo absoluto: (0,3)

Mínimo absoluto: (9,1)

Como la pared tiene 3 m de alto (que corresponde con el máximo absoluto) podemos concluir que queda dentro de la pared.

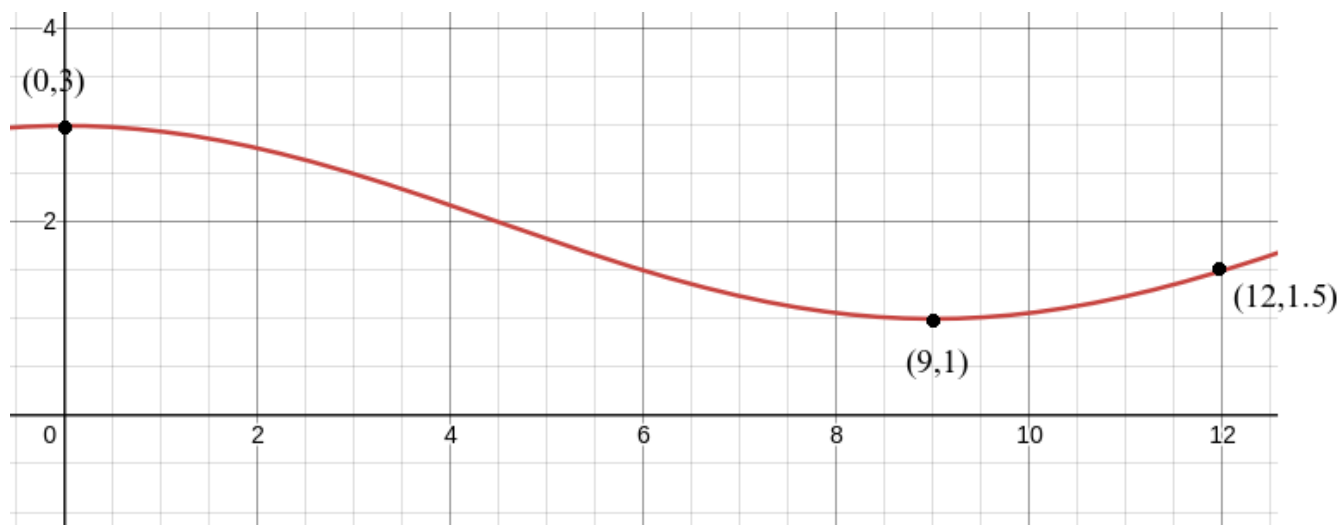
Monotonía. Estudiamos el signo antes y después de los puntos críticos:

$$f'(3) = \frac{-\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi 3}{9}\right) < 0 \text{ Decrece}$$

$$f'(10) = \frac{-\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi 10}{9}\right) > 0 \text{ Crece}$$

Decrece en $]0,9[$ y crece en $]9,12[$

El dibujo de la pared queda:



4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

El color verde es el área por debajo de la curva. Eso corresponde con la integral definida de la misma en el intervalo $[0,12]$

Hacemos primero la indefinida:

$$\int \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx = \int \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) \right) dx + \int 2 dx = \frac{9}{\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) \right] + 2x + C$$

Con ese resultado calculamos la definida:

$$\int \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx = \left[\frac{9}{\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) \right] + 2x \right]_0^{12} = \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 \simeq -2.48 + 24 = 21.52 m^2$$

La parte de color rojo se puede sacar como la diferencia con la superficie total de la pared:

$$S_t = 3 \cdot 12 = 36 m^2$$

Por lo que la superficie pintada de rojo será: $S_r = 36 - 21.52 = 14.48 m^2$. Y la de verde: $21.52 m^2$

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la pared verde?

Como la superficie es de $21.52 m^2$ y cada bote sirve para $3 m^2$ tenemos que el número de botes será:

$$\frac{21.52}{3} \simeq 7.17$$

Por lo que necesitaremos 8 botes de pintura ya que con 7 no tendríamos suficiente.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA D
BAREMO DEL EXAMEN: <i>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</i> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.		

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de superficie dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por su parte, Rafa ganó el 25% de los partidos en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados.

- 1.1 (0.75 puntos)** Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?
- 1.2 (0.75 puntos)** Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger gane al menos 6 partidos?

Pregunta 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o 2.2**

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres productos con unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones:

- Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z debe ser igual a 1.
- Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse.
- Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio. ¿Existen, los valores x , y , z , en función del valor α ?

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $AX = BX + b$

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$ siendo I la matriz identidad.

Pregunta 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3,1 Se consideran los puntos del espacio $A(0, -1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, y el vector $v = (2, -1, 1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

3,2 Dado el plano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, -20)$, $C(0, 15, -30)$ y $D(1, 2, -1)$. Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC .

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Pregunta 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4,1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10 - t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4,2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1: Probabilidad y estadística (2.5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por su parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados.

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

Solución:

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

Vamos a recopilar la información del enunciado como si fuese un problema de probabilidad. Definimos los sucesos siguientes:

H – Partido jugado en hierba.

T – Partido jugado en tierra batida.

D – Partido jugado en pista dura.

Ra – Partido ganado por Rafa.

Ro – Partido ganado por Roger.

Como el 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida podemos obtener que:

$100 - 10 - 40 = 50 \rightarrow$ el 50% se jugaron en pista dura.

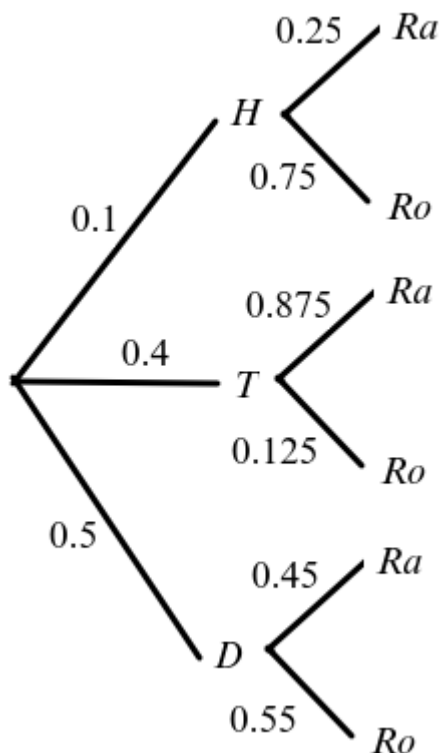
Por lo que tenemos que: $P(H) = 0.1$, $P(T) = 0.4$ y $P(D) = 0.5$

Por su parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, lo cual quiere decir que: $P(Ra/H) = 0.25$ y podemos deducir que el 75% fueron ganados por Roger: $P(Ro/H) = 0.75$

Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida, lo cual quiere decir que: $P(Ro/T) = 0.125$ y podemos deducir que el 87.5% los ganó Rafa $P(Ra/T) = 0.875$

Roger también ganó el 55% en pista dura, lo cual quiere decir que: $P(Ro/D) = 0.55$ y podemos deducir que el 45% los ganó Rafa $P(Ra/D) = 0.45$

Estos datos los podemos llevar a un diagrama de árbol como el siguiente:



Vamos a utilizar el teorema de **probabilidad total** para calcular el tanto por ciento de partidos ganados por Roger calculando:

$$P(Ro) = P(H) \cdot P(Ro/H) + P(T) \cdot P(Ro/T) + P(D) \cdot P(Ro/D) = 0.1 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.125 + 0.5 \cdot 0.55 = 0.4$$

$$P(Ro) = 0.4 \rightarrow$$

Roger ha ganado el 40% de los partidos jugados.

Podemos además deducir que: $P(Ra) = 0.6 \rightarrow$ Rafa ha ganado el 60% de los partidos jugados.

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

Como conocemos que fue ganado por Rafa debemos utilizar la fórmula de Bayes y calcular:

$$P(D/Ra) = \frac{P(D \cap Ra)}{P(Ra)}$$

$$\text{Del árbol tenemos que: } P(D/Ra) = P(D) \cdot P(Ra/D) = 0.5 \cdot 0.45 = 0.225$$

$$\text{Del punto anterior sabemos que: } P(Ra) = 0.6$$

Sustituyendo valores: $P(D/Ra) = \frac{P(D \cap Ra)}{P(Ra)} = \frac{0.225}{0.6} = 0.375 = 37.5\%$

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

El problema se transforma en un problema de binomial donde tenemos que hay 10 casos y la probabilidad de victoria para Roger es de 0.55. $B(10, 0.55)$

Recordamos la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial: $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$

Como queremos saber la probabilidad de ganar 5 ó 6 vamos a calcular ambas y sumaremos:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.55^5 0.45^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} 0.55^5 0.45^5 = 252 \cdot 0.55^5 0.45^5 = 0.2340 = 23.4\%$$

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.55^6 0.45^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} 0.55^6 0.45^4 = 210 \cdot 0.55^6 0.45^4 = 0.2384 = 23.84\%$$

La probabilidad pedida será la suma:

$$P(5 \vee 6) = 0.234 + 0.2384 = 0.4724 = 47.24\%$$

Pregunta 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o 2.2**

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En ese caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones donde las incógnitas son los valores reales de las pseudodensidades:

x – Valor de la pseudodensidad del compuesto X.

y – Valor de la pseudodensidad del compuesto Y.

z – Valor de la pseudodensidad del compuesto Z.

Ahora volvemos al enunciado para establecer las ecuaciones.

Tenemos (tanque 1) que la suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5:

$$x + 3y + z = 5$$

La segunda ecuación (tanque 2) es: la suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador:

$$\alpha x + 2z = 0$$

La tercera ecuación (tanque 3) es: la pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

$$z = \alpha y$$

Podemos escribir el sistema como:
$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases}$$

Como podemos observar se trata de un sistema de ecuaciones.

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones

de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

Nos están pidiendo que discutamos el sistema en función del parámetro. Vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Matriz de los coeficientes y ampliada del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos. Comenzamos con la matriz de los coeficientes. Calculamos el determinante de orden 3 de la misma:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \alpha^2 - 0 - 3\alpha + 2\alpha = -\alpha^2 - \alpha$$

Igualamos a cero el resultado y obtenemos los valores que nos dan rango inferior a 3:

$$-\alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow -\alpha(\alpha + 1) = 0$$

Lo que nos da dos soluciones: $\alpha = 0$ y $\alpha = -1$

Tenemos que estudiar tres casos:

Caso $\alpha \neq 0, -1$ en este caso $RgM = 3$ y como el de la ampliada no puede ser mayor (es 3x3) tenemos que:

$RgM = RgM^* = 3 = n^{\circ} \text{de incógnitas}$ por el Teorema de Rouché se trata de un SCD (sistema compatible determinado).

Caso $\alpha = 0$ en este caso la matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que no es de rango 3 por lo que buscamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$ por lo que tenemos que el rango es 2.

Estudiamos el rango de la ampliada: $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ podemos calcular los menores de orden 3 pero se puede observar que la primera y cuarta columna son proporcionales por lo que todos los menores que las incluyan valdrán cero. Por tanto tendremos, según el teorema de Rouché, que:

$RgM = RgM^* = 2 < n^{\circ} \text{de incógnitas}$ será un SCI (Sistema Compatible Indeterminado)

Caso $\alpha = -1$ en este caso la matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que no es de rango 3 por lo que buscamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$ por lo que tenemos que el rango es 2.

Estudiamos el rango de la ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$ Calculamos un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 10 - 0 - 0 \neq 0 \text{ por lo que la ampliada tiene rango 3. Según el teorema de}$$

Rouché tenemos que: $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ por lo que se trata de un sistema incompatible (SI)

Resumimos en un cuadro:

Si $\alpha \neq 0, -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas $\rightarrow$ SCD (Solución única)

Si $\alpha = 0 \rightarrow RgM = RgM^* = 2 < n^{\circ}$ de incógnitas $\rightarrow$ SCI (Infinitas soluciones)

Si $\alpha = -1 \rightarrow RgM = 2 \neq RgM^* = 3 \rightarrow$ SI (Sin soluciones)

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En ese caso, calcular, si existen, los valores x, y, z , en función del valor α

Según la discusión del apartado anterior tenemos que en ese caso el sistema es SCD por lo que tendrá solución única.

Podemos resolver con cualquier método (en el examen nos bastará con uno).

Por **sustitución**. El sistema es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que: $x = \frac{-2z}{\alpha}$

De la tercera ecuación tenemos que: $y = \frac{z}{\alpha}$

Sustituyendo en la primera ecuación ambos resultados:

$$\frac{-2z}{\alpha} + \frac{3z}{\alpha} + z = 5 \rightarrow \frac{z}{\alpha} + z = 5 \rightarrow z + \alpha z = 5\alpha \rightarrow z = \frac{5\alpha}{\alpha+1}$$

Hallamos las otras incógnitas: $x = \frac{-2z}{\alpha} \rightarrow x = \frac{-10}{\alpha+1}$ $y = \frac{z}{\alpha} \rightarrow y = \frac{5}{\alpha+1}$

Por lo que la solución es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-10}{\alpha+1}, \frac{5}{\alpha+1}, \frac{5\alpha}{\alpha+1} \right)$$

También podemos resolver por **Cramer** ya que el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero.

$$|M| = -\alpha(\alpha + 1)$$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha + 1)} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 10\alpha}{-\alpha(\alpha + 1)} = \frac{-10}{\alpha + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{0+0+0-0-5\alpha-0}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{5}{\alpha+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{0+0-5\alpha^2-0-0-0}{-\alpha(\alpha+1)} = \frac{5\alpha}{\alpha+1}$$

El resultado es el mismo.

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $AX = BX + b$

Se trata de una ecuación matricial primero vamos a resolver con las letras:

$$AX = BX + b$$

Pasamos las X al miembro de la izquierda

$$AX - BX = b$$

Sacamos factor común **por la derecha** de la X

$$(A - B)X = b$$

Premultiplicamos por la inversa en los dos miembros

$$(A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1} \cdot b \quad \text{Aplicamos que una matriz por su inversa es la identidad}$$

$$I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot b$$

Aplicamos que la identidad por una matriz es la misma matriz

$$X = (A - B)^{-1} \cdot b$$

Ahora hacemos las operaciones representadas:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos el determinante: } \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0 \exists (A - B)^{-1}$$

Calculamos la inversa (por determinantes o por Gauss).

Por **determinantes**: Aplicamos la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}A)^t$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$(A - B)^{-1} \cdot (A - B) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego es correcto}$$

Obtenemos el valor buscado:

$$X = (A - B)^{-1} \cdot b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es el vector: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$

Vamos a aplicar las propiedades de los determinantes para calcularlo.

Aplicamos que el valor del determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \cdot \det((2B)^{-1})$$

Aplicamos que el determinante de la potencia de una matriz es la potencia del determinante:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det A)^5 \cdot \det((2B)^{-1})$$

Aplicamos que el determinante de la inversa de una matriz es el inverso del valor del determinante:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det A)^5 \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det A)^5 \cdot \frac{1}{\det(2B)}$$

Por último aplicando que el determinante del producto de un número (escalar) por una matriz de orden n es el número elevado al orden de la matriz:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det A)^5 \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det A)^5 \cdot \frac{1}{\det(2B)} = \frac{(\det A)^5}{2^2 \cdot \det B}$$

Obtenemos ahora los valores de los determinantes de ambas matrices:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3, \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

El valor buscado es:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \frac{(\det A)^5}{2^2 \cdot \det B} = \frac{3^5}{4 \cdot 19} = \frac{243}{76}$$

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$ siendo I la matriz identidad.

Escribimos la ecuación planteada:

$$\alpha A + \beta B = I \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la operación del miembro de la izquierda tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Salen las siguientes relaciones:

1. $2\alpha + 5\beta = 1$
2. $-\alpha - 2\beta = 0$
3. $\alpha + 2\beta = 0$
4. $\alpha + 3\beta = 1$

Las relaciones 2 y 3 son iguales y se puede deducir que: $\alpha = -2\beta$

Si sustituimos ese resultado en las relaciones 1 y 4 tenemos:

$$2(-2\beta) + 5\beta = 1 \rightarrow \beta = 1$$

$$-2\beta + 3\beta = 1 \rightarrow \beta = 1$$

Como ambos resultados no son contradictorios podemos llegar a la conclusión que son solución por lo que los valores buscados serán

$$\beta = 1 \text{ y } \alpha = -2$$

Pregunta 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3,1 Se consideran los puntos del espacio $A(0, -1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, y el vector $v = (2, -1, 1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

Solución:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

Como el plano es perpendicular al vector ese vector es paralelo al vector normal del plano. Recordemos que el vector normal del plano son los coeficientes A , B y C de la ecuación del mismo. Por lo que la ecuación del plano será (salvo el coeficiente D):

$$2x - y + z + D = 0$$

Como el plano tiene que pasar por el punto $A(0, -1, 0)$ sustituimos en la ecuación del plano para determinar el coeficiente D :

$$2 \cdot 0 - (-1) + 0 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

Por lo que la ecuación es:

$$2x - y + z - 1 = 0$$

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

Como tenemos que determinar la ecuación de una recta necesitamos un vector y un punto. El punto nos lo dan puesto que pasa por B y el vector será el vector normal del plano, es decir, $v = (2, -1, 1)$

La recta pedida será en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

El punto más cercano será **la proyección del punto sobre el plano**. Para ello hallamos la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto. Esa recta la tenemos en el apartado anterior. Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la misma en la ecuación del plano:

$$2x - y + z - 1 = 0 \rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0 \rightarrow 6\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos el punto de intersección:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ y = -\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ z = 1 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ el punto será:}$$

$$C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

Lo podemos hacer con la fórmula de distancia punto-plano o bien calculando el módulo del vector que une los puntos C y B.

- Por la fórmula: $d(B, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d(B, \pi) = \frac{2 \cdot 1 - 0 + 1 - 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow d = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- Distancia entre los puntos C y D:

$$\overrightarrow{CB} = \left(1 - \frac{1}{3}, 0 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

El módulo del vector será: $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$. Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC .

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Solución:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

Para que el triángulo esté contenido en el plano lo han de estar los tres vértices del mismo. Hay que comprobar que todos los vértices verifican la ecuación del plano (nada más que uno no la verifique el triángulo no estará contenido)

Vértice $A(0,0,0) \rightarrow \pi: 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$ luego $A \in \pi$

Vértice $B(10,0,-20) \rightarrow \pi: 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 40 \neq 0$ luego $B \notin \pi$ por lo que el triángulo NO ESTÁ CONTENIDO EN EL PLANO

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos ABC .

Primero hallamos la ecuación del plano formado por tres puntos. Para ello tomamos un punto como origen y los vectores que unen los otros dos y el origen.

Elegimos como punto origen del plano el $A(0,0,0)$

Trazamos dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (10 - 0, 0 - 0, -20 - 0) = (10, 0, -20)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 0, 15 - 0, -30 - 0) = (0, 15, -30)$$

Con el punto y los dos vectores utilizamos la ecuación cartesiana para hallar la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -20 \\ 15 & -30 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 10 & -20 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} z = 0 \rightarrow 300x + 300y + 150z = 0$$

Al estar igualada a cero podemos dividir toda la ecuación: $2x + 2y + z = 0$

La proyección del punto D sobre el plano la hallamos como la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

La recta perpendicular al plano es la que tiene como vector director el vector normal del plano y pasa por el punto D . El vector normal es: $\vec{n} = (2, 2, 1)$ y el punto es $D(1, 2, -1)$ La ecuación paramétrica será:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

La intersección con el plano se halla sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la del

plano:

$$2x + 2y + z = 0 \rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \rightarrow 5 + 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{5}{9}$$

Sustituyendo ahora en la recta tenemos que:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{1}{9} \\ y = 2 + 2\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{14}{9} \end{cases} \text{ por lo que el punto es:}$$

$$D' = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)$$

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Lo podemos hacer con la fórmula de distancia punto-plano.

- Por la fórmula: $d(D, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d(D, \pi) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}u$$

Pregunta 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10 - t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

Solución:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

Como conocemos la expresión de su derivada podemos calcular la integral correspondiente para hallar la función:

$$F'(t) = t^2(10 - t) \rightarrow F(t) = \int t^2(10 - t)dt = \int (10t^2 - t^3)dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$$

Para determinar la constante de integración utilizamos que en $t = 0 \rightarrow F(t) = 6$

$$F(0) = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = 6 \rightarrow C = 6$$

Por lo que la expresión queda:

$$F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6$$

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

Como nos piden un máximo tendremos que derivar la función e igualar a cero la derivada:

$$F'(t) = t^2(10 - t) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ y } t = 10$$

Las dos soluciones son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Para conocer su naturaleza calculamos la segunda derivada:

$$F''(t) = 20t - 3t^2$$

Sustituyendo valores:

$$F''(0) = 20 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0 \text{ No podemos conocer su naturaleza}$$

$$F''(10) = 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = -100 < 0 \text{ por lo que será un máximo relativo}$$

Sustituyendo ambos valores en la función original tenemos: $F(0) = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + 6 = 6$

$$F(10) = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{2518}{3} \approx 839.33$$

Comparando ambos valores llegamos a la conclusión que

El máximo se alcanza pasados 10 días y es 839.33

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

Por el enunciado podemos deducir que se trata de un triángulo isósceles. Llamamos:

x – longitud de la base.

y – longitud de los otros dos lados.

Podemos ayudarnos del dibujo de la derecha.

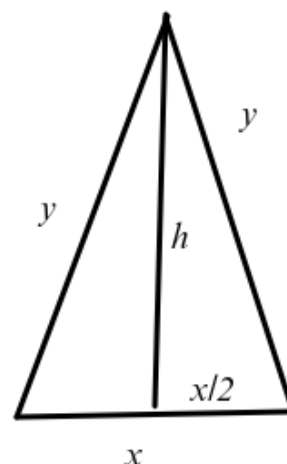
La expresión del área será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

donde: $b = x$

Para hallar la altura en función de las variables utilizamos Pitágoras:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$



La expresión del área quedará: $A(x, y) = \frac{x}{2} \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

Para expresarla en función de una única variable utilizamos que el perímetro total ha de ser de 60 metros:

$$2y + x = 60 \rightarrow y = \frac{60-x}{2}$$

Si sustituimos en la expresión y simplificamos:

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3600 - 120x + x^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3600 - 120x}{4}} \rightarrow A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{900 - 30x} \quad A(x) = \sqrt{\frac{450x^2 - 15x^3}{2}}$$

Otro método alternativo es la fórmula de Herón que nos da el área de un triángulo en función de la longitud de sus lados:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son los lados y } s \text{ el semiperímetro } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Para nuestro triángulo tenemos que: $a = x$ $b = c = y = \frac{60-x}{2}$ $s = 30$

Sustituyendo valores:

$$A(x) = \sqrt{30 \cdot (30 - x) \cdot \left(30 - \frac{60 - x}{2}\right) \cdot \left(30 - \frac{60 - x}{2}\right)} = \sqrt{30 \cdot (30 - x) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{450x^2 - 15x^3}{2}}$$

Podemos ver que es la misma expresión.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Como es el cuadrado del área basta con elevar la expresión hallada en el apartado anterior para obtenerla:

$$f(x) = (A(x))^2 = \frac{450x^2 - 15x^3}{2}$$

Para hallar un máximo de esa función bastará con calcular su derivada e igualar a cero:

$$f'(x) = \frac{900x - 45x^2}{2} = 0 \rightarrow 900x - 45x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } 900 - 45x = 0 \rightarrow x_2 = \frac{900}{45} = 20$$

Luego tenemos dos posibles máximos o mínimos: $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$

Para determinar su naturaleza calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{900 - 90x}{2}$$

Sustituyendo los valores hallados:

$$f''(0) = \frac{900 - 90 \cdot 0}{2} = 450 > 0 \text{ por lo que es mínimo.}$$

$$f''(20) = \frac{900 - 90 \cdot 20}{2} = -450 < 0 \text{ por lo que se trata de un máximo.}$$

Por lo que el valor buscado es: $x = 20$

$$\text{El área en ese caso será: } A(20) = \sqrt{\frac{450 \cdot 20^2 - 15 \cdot 20^3}{2}} = \sqrt{30000} \simeq 173.21 \text{ m}^2$$