

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de EXTREMADURA



www.apuntesmareaverde.org.es

**Autores: Javier Rodrigo Hitos y Juan
Antonio Martínez García**



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
--	---	--

Ejercicio 1A, (2,5 puntos):

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.
- Para $a=1$, calcula la inversa de la matriz $A-3I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
- Para $a=1$ resuelve la ecuación matricial $A X - B = 3 X$

Ejercicio 1B, (2,5 puntos):

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$ donde a es un número real.

- Encuentra los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.
- Resuelve el sistema anterior para el caso $a = 0$, si es posible.
- ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2A, (2,5 puntos):

Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

- Determina sus máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Calcula $g(x)$ sabiendo que $g'(x) = f(x)$ y que $g(0) = 1$.

Ejercicio 2B, (2,5 puntos):

Sean las funciones: $f(x) = -3x - 5$ y $g(x) = (x+1)^2 - 2$.

- Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto (0,2) y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa $x=1$ es paralela a la recta $f(x)$
- Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$

Ejercicio 3A, (2,5 puntos):

Sean el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$. Obtén de forma razonada:

- a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π .
- b) La ecuación de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.

c) La distancia entre el punto B y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Ejercicio 3B, (2,5 puntos):

Dada la recta $r: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases}$ y dado el plano $\pi: mx + 3y - 4z + 6 = 0$,

- a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro m.
- b) Para $m = 2$, calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .
- c) Para $m = 0$, halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

Ejercicio 4 (2,5 puntos):

Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
- c) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
- d) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

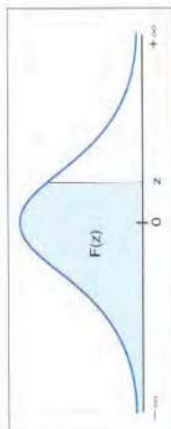


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$

$$F(z) = P(Z \leq z)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1A:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.
 b) Para $a=1$, calcula la inversa de la matriz $A-3I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
 c) Para $a=1$ resuelve la ecuación matricial $AX - B = 3X$

Solución:

a) Se cumple que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = -1.$

Entonces A tiene inversa si y sólo si $a \neq 0, -1$

- b) Se cumple que

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} 0-3 & 1 & 1 \\ 1 & 0-3 & 1 \\ 1 & 1 & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 2 + 3 + 3 + 3 = -16.$$

Entonces

$$(A-3I)^{-1} = \frac{1}{|A-3I|} \text{adj}(A-3I)^t = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Se cumple que:

$$A X - B = 3 X \Leftrightarrow A X - 3 X = (A - 3 I) X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = (A - 3 I)^{-1} B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(En la antepenúltima igualdad hemos utilizado el valor de la inversa hallado en el apartado a)

Ejercicio 1B:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$ donde a es un número real.

- a) Encuentra los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = 0$, si es posible.
- c) ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Al ser un sistema cuadrado y homogéneo, tiene infinitas soluciones si y sólo si:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 10 - 3a(a+4) + 10a - 2(a+4) - 6 = -3a^2 - 4a = -a(3a+4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ o } 3a+4=0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = -\frac{4}{3}$$

$$a = 0 \text{ o } a = -4/3$$

b) Para $a = 0$, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -3x+2y+2z \\ -5x+4y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ -3x+2y+2z=0 \\ -5x+4y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ -3x+2x+2z=0 \\ -5x+4x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ -x+2z=0 \\ -x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=2z \end{cases}$$

Dando el parámetro $z = \alpha$, nos queda que las soluciones son

$$x = 2\alpha, y = 2\alpha, z = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

c) El sistema es homogéneo por lo que siempre al menos tiene la solución trivial $x = y = z = 0$

Ejercicio 2A:

Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

- Determina sus máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Calcula $g(x)$ sabiendo que $g'(x) = f(x)$ y que $g(0) = 1$.

Solución:

a) Se cumple que $f'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{-x}{e^x} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f'(x) = \frac{-x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

por lo que si $x < 0$, $f'(x) > 0$ y f es estrictamente creciente, si $x > 0$, $f'(x) < 0$ y f es estrictamente decreciente, teniendo f un máximo relativo en 0.

Si $x < 0$, f es estrictamente creciente, si $x > 0$, f es estrictamente decreciente, teniendo f un máximo relativo en 0 con $f(0) = 1$.

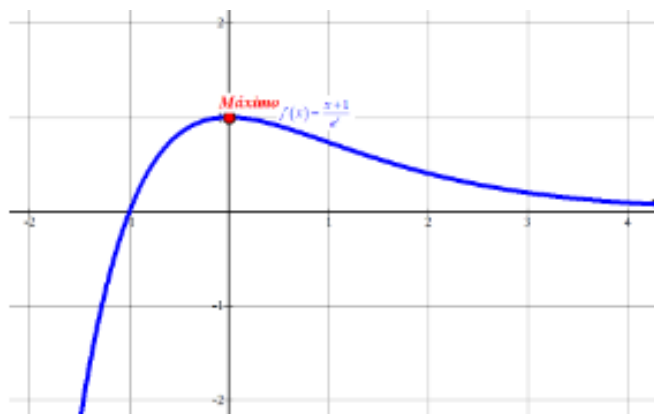
b) Como $g'(x) = f(x)$, se cumple que $g(x) = \int f(x) dx = \int (x+1) e^{-x} dx$. Si llamamos:

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-x} \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$, se cumple que:

$$\int (x+1) e^{-x} dx = -(x+1) e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -(x+1) e^{-x} - e^{-x} = -(x+2) e^{-x} + C. \text{ Entonces:}$$

$g(x) = \int (x+1) e^{-x} dx = -(x+2) e^{-x} + C$. Tenemos que $g(0) = -(0+2) e^{-0} + C = -2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$, por lo que

$$g(x) = -(x+2) e^{-x} + 3$$



Ejercicio 2B:

Sean las funciones: $f(x) = -3x - 5$ y $g(x) = (x + 1)^2 - 2$.

- Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto (0,2) y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa $x=1$ es paralela a la recta $f(x)$
- Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$

Solución:

a) Se cumple que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en (0,2), por lo que:

$$P(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + 0 + d = 2 \Rightarrow d = 2, P'(0) = 0.$$

Se tiene que:

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow P'(0) = c = 0$$

Como la recta tangente a P en 1 es paralela a f, tenemos que $P'(1) = -3$.

Se tiene que:

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow P'(1) = 3a + 2b = -3.$$

Como $x = 1$ es un punto de inflexión de P, $P''(1) = 0$. Se tiene que:

$$P''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow P''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{6a}{2} = -3a.$$

Sustituyéndolo en la ecuación anterior, tenemos que $3a + 2b = 3a - 6a = -3a = -3 \Rightarrow a = 1$, por lo que $b = -3a = -3$ y el polinomio pedido es $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 3x^2 + 2$

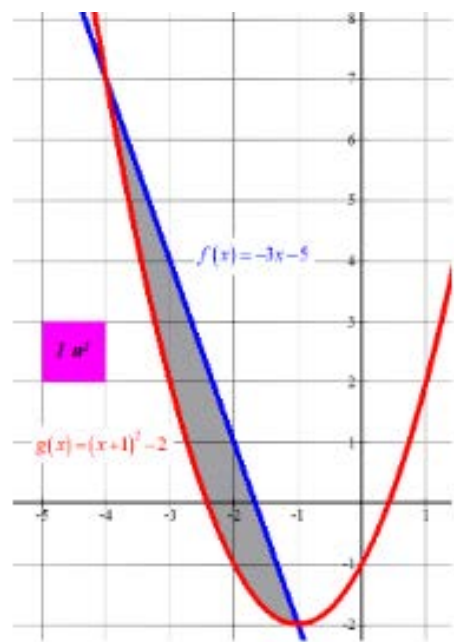
El polinomio es $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

b) Se cumple que los puntos de corte son:

$$f(x) = -3x - 5 = g(x) = (x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -4, x = -1$$

Como $g(x)$ es una parábola con las ramas hacia arriba y $f(x)$ es una recta, se cumple que $f(x) \geq g(x)$ entre los puntos de corte. Por tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-4}^{-1} (-3x - 5 - ((x + 1)^2 - 2)) dx = \\ &= \int_{-4}^{-1} (-3x - 5 - (x^2 + 2x - 1)) dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} = \\ &= -\frac{(-1)^3}{3} - 5\frac{(-1)^2}{2} - 4(-1) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 5\frac{(-4)^2}{2} - 4(-4) \right] \\ &= -21 - 12 + \frac{75}{2} = \frac{9}{2} = 4.5 \end{aligned}$$



El área del recinto es $4.5 u^2$.

Ejercicio 3A:

Sean el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$. Obtén de forma razonada:

- a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y es perpendicular a π .
 b) La ecuación de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A .

c) La distancia entre el punto B y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Solución:

a) Como pasa por los puntos A y B , un vector director es $B - A = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$.

Como es perpendicular a π , otro vector director es el vector característico de π , es decir $(2, 1, -1)$.

Por tanto, una ecuación paramétrica del plano pedido es:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= A + \alpha (1, -1, 1) + \beta (2, 1, -1) = (1, 2, -1) + \alpha (1, -1, 1) + \beta (2, 1, -1) = \\ &= (1 + \alpha + 2\beta, 2 - \alpha + \beta, -1 + \alpha - \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = -1 + \alpha - \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación implícita sumamos las dos últimas ecuaciones: $y + z = 1 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$

(Se puede hallar también con el determinante cuyas filas son $(x, y, z) - A$ y los dos vectores directores)

El plano pedido es $y + z - 1 = 0$.

b) Como r es perpendicular a π , el vector característico de π es un vector director de r , por lo que:

$\vec{v} = (2, 1, -1)$ es un vector director de r , y entonces una ecuación paramétrica de r es:

$$(x, y, z) = A + \alpha (2, 1, -1) = (1, 2, -1) + \alpha (2, 1, -1) = (1 + 2\alpha, 2 + \alpha, -1 - \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

La recta pedida es $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

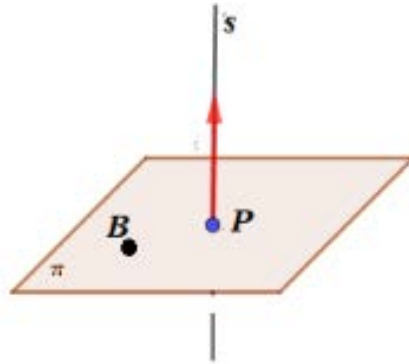
c) Hallamos el plano p que pasa por B y es perpendicular a s . Como es perpendicular a s , el vector director de s , $(2, 1, -1)$, es un vector característico del plano, luego p es $2x + y - z = C$. Para que pase por B : $2 \times 2 + 1 - 0 = C \Leftrightarrow C = 5$, luego p es $2x + y - z = 5$. Lo intersecamos con s :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ y &= \frac{x-1}{2} + 2 = \frac{x+3}{2} \\ z &= \frac{1-x}{2} - 1 = \frac{-1-x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x + y - z = 2x + \frac{x+3}{2} - \frac{-1-x}{2} = 3x + 2 = 5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1, y = \frac{1+3}{2} = 2, z = \frac{-1-1}{2} = -1: (1, 2, -1)$. Entonces:

$$d(B, s) = d((2, 1, 0), (1, 2, -1)) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{3}$$

La distancia pedida es $\sqrt{3}$.



Ejercicio 3B:

Dada la recta $r: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases}$ y dado el plano $\pi: mx + 3y - 4z + 6 = 0$,

- Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro m .
- Para $m = 2$, calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .
- Para $m = 0$, halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

Solución:

a) Intersecamos la recta con el plano:

$$m(2+t) + 3(1-2t) - 4(-t) + 6 = 2m + mt + 3 - 6t + 4t + 6 = \\ = 2m + 9 + (m-2)t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3-2m}{m-2} \text{ (si } m \neq 2)$$

Entonces si $m \neq 2$, hay una única solución por lo que r y π se cortan en un punto.

Si $m = 2$, queda $2(2+t) + 3(1-2t) - 4(-t) + 6 = 4 + 2t + 3 - 6t + 4t + 6 = 13 \neq 0$, luego no hay intersección y la recta es paralela al plano.

Si $m \neq 2$ r y π se cortan en un punto, si $m = 2$ r y π son paralelos.

b) Como el plano contiene a r , ha de contener a un punto por el que pasa, $P = (2, 1, 0)$, y a su vector director $(1, -2, -1)$ (coeficientes de t).

Como es perpendicular a π , el vector característico de π , $(2, 3, -4)$, es otro vector director del plano, luego una ecuación paramétrica del plano pedido es:

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + \alpha(1, -2, -1) + \beta(2, 3, -4) = (2 + \alpha + 2\beta, 1 - 2\alpha + 3\beta, -\alpha - 4\beta)$$

La ecuación implícita sería:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8(x-2) - 2(y-1) + 3z + 4z + 3(x-2) + 4(y-1) = \\ = 11x + 2y + 7z - 24 = 0$$

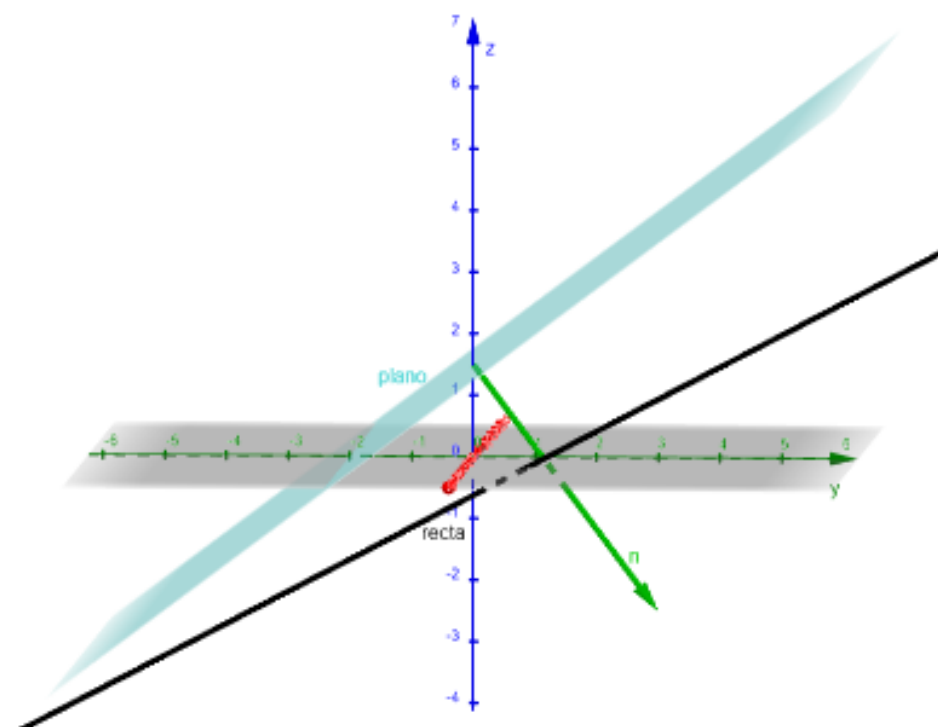
La ecuación del plano pedido es $11x + 2y + 7z - 24 = 0$.

- c) Para $m=0$ el plano tiene ecuación $\pi: 3y - 4z + 6 = 0$ y por lo estudiado en el apartado a) sabemos que la recta r es secante con el plano.
Hallamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ \vec{n} = (0, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} = \frac{(1, -2, -1)(0, 3, -4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{0 - 6 + 4}{\sqrt{6} \sqrt{25}} = \frac{-2}{5\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{(\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{5\sqrt{6}}\right) = 99.4^\circ}$$

Para $m=0$ el ángulo que determinan la recta y el plano tiene un valor aproximado de $99.4^\circ - 90^\circ = 9.4^\circ$.



Ejercicio 4:

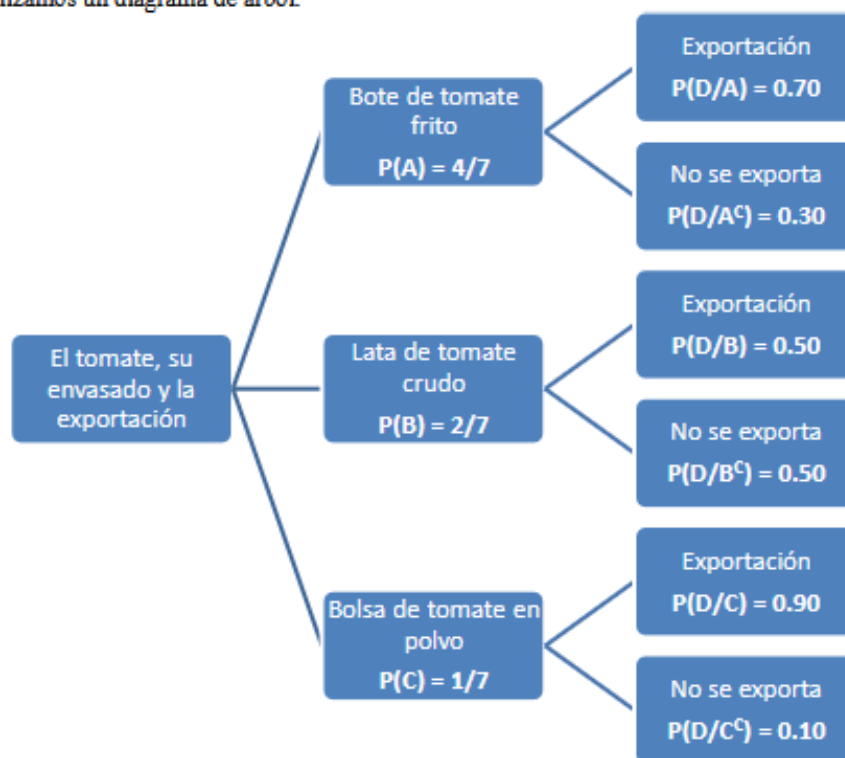
Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

Solución:

Llamamos A al suceso “el producto es un bote de tomate frito”, B a “el producto es una lata de tomate crudo”, C a “el producto es una bolsa de tomate en polvo” y D a “el producto se dedica a la exportación”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot 0.7 + \frac{2}{7} \cdot 0.5 + \frac{1}{7} \cdot 0.9 = \frac{47}{70} = 0.6714$$

b) Nos piden calcular $P(B/D^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D^c) = \frac{P(B \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(B)P(D^c/B)}{1-P(D)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.5}{1 - \frac{47}{70}} = \frac{10}{23} = 0.4348$$

c) Nos piden calcular $P(A \cap D)$.

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = \frac{4}{7} \cdot 0.7 = \frac{2}{5} = 0.40$$

d) Debemos calcular $P(A \cup D)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{4}{7} + \frac{47}{70} - \frac{2}{5} = \frac{59}{70} = 0.8429$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos.

Suponemos que hay 700 productos. Cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito., por lo que $\frac{4}{7} \cdot 700 = 400$ productos son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas

de tomate crudo, por lo que $\frac{2}{7} \cdot 700 = 200$ productos son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo, es decir $700 - 400 - 200 = 100$ bolsas de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito ($0.70 \cdot 400 = 280$ botes de tomate frito se exportan), el 50% del tomate crudo ($0.50 \cdot 200 = 100$ latas de tomate crudo se exportan) y el 90% del concentrado de tomate en polvo ($0.90 \cdot 100 = 90$ bolsas de tomate en polvo se exportan).

Colocamos todos estos datos en una tabla para tenerlos más organizados.

	Tomate frito	Tomate crudo	Tomate polvo	TOTALES
Se exportan	280	100	90	
No se exportan				
TOTALES	400	200	100	700

Completamos la tabla.

	Tomate frito	Tomate crudo	Tomate polvo	TOTALES
Se exportan	280	100	90	470
No se exportan	120	100	10	230
TOTALES	400	200	100	700

Aplicamos la regla de Laplace para responder a las preguntas planteadas.

- a) De los 700 productos se exportan un total de 470, por lo que la probabilidad de que al elegir un producto al azar este sea destinado a la exportación vale $\frac{470}{700} = \frac{47}{70}$.
- b) De los 230 productos que no se exportan 100 son latas de tomate crudo, por lo que la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación vale $\frac{100}{230} = \frac{10}{23}$.
- c) De los 700 productos solo 280 son botes de tomate frito destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte vale $\frac{280}{700} = \frac{2}{5}$.
- d) De los 700 productos hay 400 que son tomate frito, 100 son latas de tomate crudo destinadas a la exportación y 90 son bolsas de tomate en polvo destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte vale $\frac{400+100+90}{700} = \frac{590}{700} = \frac{59}{70}$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
--	--	---------------------------------

Problema 1:

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 1 punto c) 0,75 puntos

Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^t B = C$
- Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A \cdot C$ y calcular la inversa de $A \cdot C$ para el caso $k = 0$.
- Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2 = B - I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Dado el sistema
$$\begin{cases} kx + 2y - z = 3k \\ 2x + ky - 2z = 6 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

- Discute dicho sistema según los valores del parámetro k .
- Resuelve el sistema para el valor $k = 3$.

Problema 2:

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

- Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Calcula una primitiva de la función $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pase por el punto $P(0,1)$.

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

- Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.
- Dada la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

Problema 3:

EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0.75 puntos

Dados los puntos $A(4, 3, 3)$, $B(3, 3, 4)$, $C(1, 0, 4)$ y $D(4,0,1)$,

- Justifica de forma razonada que los puntos A , B , C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.
- Calcula el valor de k para que el punto $P(7, k, 2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C .
- Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C .

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) a) 0,5 puntos b) 1,5 puntos c) 0,5 puntos

Dados los planos $\pi_1 : x + ky - 3z - 6 = 0$, $\pi_2 : 2x - y - 5 = 0$ y el punto $A(2, 3, -4)$:

- a) Calcula el valor de " k " para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- b) Para $k = 2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1 .
- c) Para $k = 2$, calcula la distancia del punto A al plano

Problema 4:**EJERCICIO 4. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,5 puntos c) 1 punto**

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?
- b) Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?
- c) ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1.A

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 1 punto c) 0,75 puntos

Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcular el valor de k para el cual se verifica que $A^t B = C$
- Calcular el valor o valores de k para los cuales existe la inversa de $A \cdot C$ y calcular la inversa de $A \cdot C$ para el caso $k = 0$.
- Calcular el valor de k para el cual se cumple que $B^2 = B - I$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$A^t B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k^2-1 & k \\ -k & -1 \\ k-k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 1 = 0 \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \sqrt{1} = \pm 1 \\ k = 1 \\ -k = -1 \rightarrow k = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para que se cumpla la igualdad debe ser $k=1$.

b) Hallamos la expresión de la matriz $A \cdot C$.

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & k+1+1 \\ 0+0+0 & 1+0+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa de $A \cdot C$ su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & k+2 \\ 0 & k+1 \end{vmatrix} = k+1 \quad |A \cdot C| = 0 \Rightarrow k+1 = 0 \Rightarrow \boxed{k=-1}$$

Existe la inversa de $A \cdot C$ para cualquier valor de k distinto de -1 .

Para $k=0$ la matriz queda $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$|A \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A \cdot C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot C)^T)}{|A \cdot C|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $k=0$ la matriz inversa de $A \cdot C$ es $(A \cdot C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Averiguamos cuando se cumple la igualdad $B^2 = B - I$.

$$B^2 = B - I \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k^2 - 1 & k \\ -k & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bullet k^2 - 1 = k - 1 \rightarrow k^2 - k = 0 \rightarrow \\ \quad \rightarrow k(k - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \\ \bullet k = 1 \\ \bullet -k = -1 \rightarrow k = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

La igualdad se cumple para $k=1$.

Problema 1.B

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Dado el sistema
$$\begin{cases} kx + 2y - z = 3k \\ 2x + ky - 2z = 6 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

- a) Discute dicho sistema según los valores del parámetro k .
b) Resuelve el sistema para el valor $k = 3$.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 3k \\ 2 & k & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 4 + 2 + k - 4 - 2k = k^2 - k - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = k \\ \frac{1-5}{2} = -2 = k \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq -2$ y $k \neq 3$

En este caso el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = -2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad -2 \quad 6 \\ -2 \quad 2 \quad -1 \quad -6 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad 2 \quad -4 \\ -2 \quad 2 \quad -1 \quad -6 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -10 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad -30 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -30 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & A/B \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ \hline & & & A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. $k=3$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad 9 \quad -6 \quad 18 \\ -6 \quad -4 \quad 2 \quad -18 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 3 \quad 9 \\ -3 \quad -2 \quad 1 \quad -9 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -5 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 5 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & A/B \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $k=3$ (caso 3) el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos sus infinitas soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & A/B \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & A \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 5y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 5y = 4z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 \cdot \frac{4}{5}z - z = 9 \Rightarrow 3x + \frac{8-5}{5}z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 9 - \frac{3}{5}z \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{5}z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

Problema 2.A:**EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos)****a) 1,25 puntos****b) 1,25 puntos**

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

a) Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) Calcula una primitiva de la función $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pase por el punto $P(0,1)$.

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1) - 1 \cdot e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow e^x(x-2) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x=2$ y del valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0-1)^2} = -2 < 0$.

La función decrece en $(-\infty, 1)$.

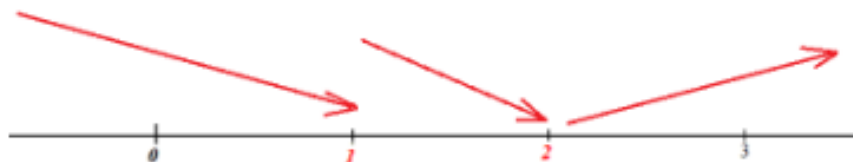
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{e^{1.5}(1.5-2)}{(1.5-1)^2} = \frac{-0.5e^{1.5}}{0.25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{e^3(3-2)}{(3-1)^2} = \frac{e^3}{4} > 0$.

La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(2, e^2)$.

c) Calculamos la integral indefinida de la función $g(x)$.

$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= \int (x^2 - 3x) \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 3x \rightarrow du = 2x - 3 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2 - 3x)e^x - \int (2x - 3)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x - 3 \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2 - 3x)e^x - [(2x - 3)e^x - \int 2e^x dx] = (x^2 - 3x)e^x - (2x - 3)e^x + 2e^x = \\ &= (x^2 - 3x - 2x + 3 + 2)e^x = \boxed{(x^2 - 5x + 5)e^x + K}\end{aligned}$$

La primitiva de la función $g(x)$ es $G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x + K$. Hallamos el valor de K para que $G(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} G(0) = 1 \\ G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x + K \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = (0^2 - 5 \cdot 0 + 5)e^0 + K \Rightarrow 1 = 5 + K \Rightarrow \boxed{K = -4}$$

La primitiva de $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ que pasa por el punto $P(0,1)$ tiene la expresión

$$G(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x - 4.$$

Problema 2.B:**EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos**

- a) Justifica, indicando los teoremas en los que te basas, que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene una única solución real y encuentra dicha solución con un error menor de una décima.
- b) Dada la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

Solución:

- a) Consideramos la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$. Esta función es polinómica y por tanto es continua. Tenemos que $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = -1 < 0$ y $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Para aproximar la solución a las décimas valoramos la función en distintos valores entre 1 y 2.

$$f(1.2) = 1.2^3 - 2 \cdot 1.2^2 + 2 \cdot 1.2 - 2 = -0.752 < 0$$

$$f(1.5) = 1.5^3 - 2 \cdot 1.5^2 + 2 \cdot 1.5 - 2 = -0.125 < 0$$

$$f(1.6) = 1.6^3 - 2 \cdot 1.6^2 + 2 \cdot 1.6 - 2 = 0.176 > 0$$

La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ en el intervalo $(1.5, 1.6)$ es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Aplicando de nuevo el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c \in (1.5, 1.6)$ tal que $f(c) = 0$.

La solución de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ tiene un valor entre 1.5 y 1.6.

Comprobamos que esta solución es única.

Si existiese otro valor d tal que $f(d) = 0$ podríamos considerar la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ que es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) , como además $f(c) = f(d)$ aplicando el teorema de Rolle debe existir un $p \in (c, d)$ tal que $f'(p) = 0$. Comprobamos que esto no es posible.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \text{¡No existe!}$$

No existe ningún valor que anule la derivada y esa segunda solución de $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ no existe. La solución es única teniendo un valor entre 1.5 y 1.6.

- b) Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

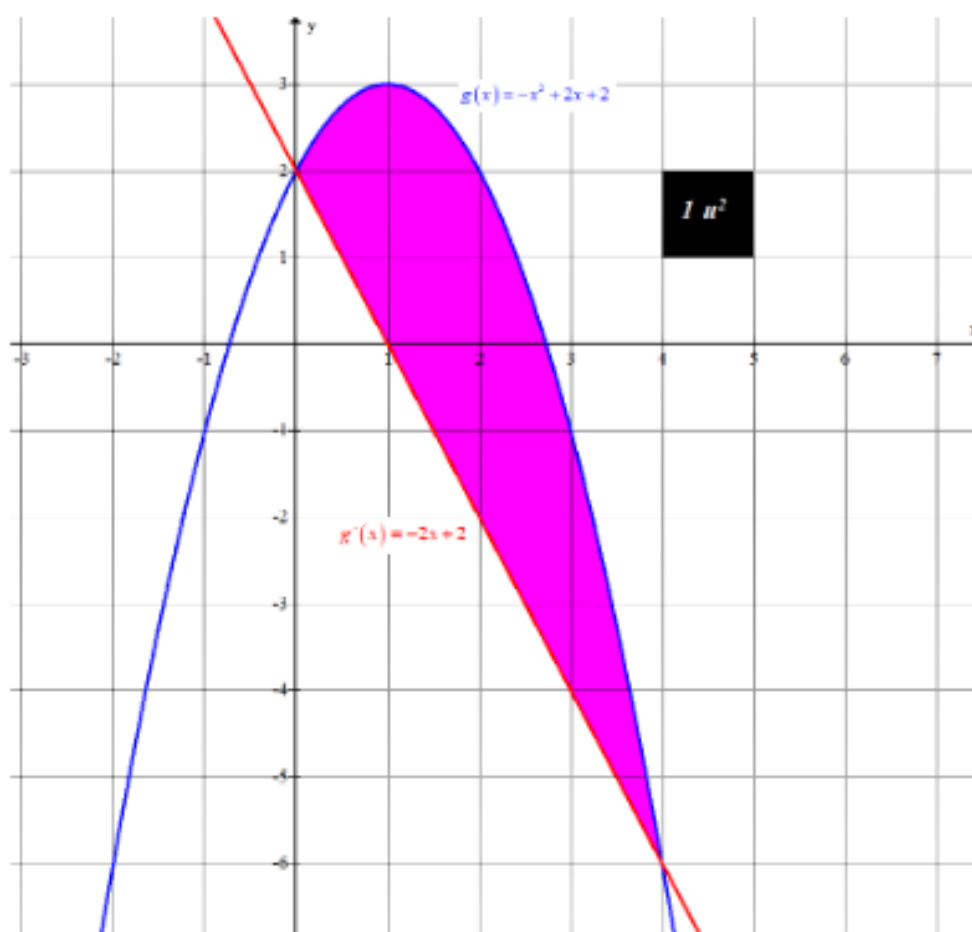
$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 2x + 2 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ se obtiene con el valor absoluto de la integral definida de 0 a 4 de la diferencia de las dos funciones $g(x)$ y $g'(x)$.

$$\begin{aligned}\int_0^4 g(x) - g'(x) dx &= \int_0^4 -x^2 + 2x + 2 - (-2x + 2) dx = \int_0^4 -x^2 + 4x dx = \\ &= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = \left[\frac{-4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] = \frac{-64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2\end{aligned}$$

El área de la región limitada por las gráficas de las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ tiene un valor de $\frac{32}{3} = 10.66$ unidades cuadradas.



Problema 3.A:**EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0.75 puntos**

Dados los puntos $A(4, 3, 3)$, $B(3, 3, 4)$, $C(1, 0, 4)$ y $D(4, 0, 1)$,

- Justifica de forma razonada que los puntos A, B, C y D están en el mismo plano y halla la ecuación del plano que determinan.
- Calcula el valor de k para que el punto $P(7, k, 2)$ esté en la recta r que pasa por los puntos A y C.
- Calcula la distancia del punto B a la recta que pasa por A y C.

Solución:

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 3, 3) \in \pi \\ B(3, 3, 4) \in \pi \\ C(1, 0, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 3, 4) - (4, 3, 3) = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 4) - (4, 3, 3) = (-3, -3, 1) \\ C(1, 0, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y + 3(z-4) + y + 3(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 3z - 12 + y + 3x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 2y + 3z - 24 = 0}$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - 2y + 3z - 24 = 0 \\ D(4, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 24 = 0 \Rightarrow 12 + 3 - 24 = 0 \Rightarrow -9 = 0 \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Los cuatro puntos pertenecen al plano de ecuación $\pi: 3x - 2y + 3z - 24 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 3, 3) \in r \\ C(1, 0, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1) \\ C(1, 0, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Obtenemos el valor de k para que la recta pase por el punto P.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \\ P(7, k, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 1 - 3\lambda \rightarrow 6 = -3\lambda \rightarrow \lambda = -2 \\ k = -3\lambda \\ 2 = 4 + \lambda \rightarrow \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = -3(-2) = 6}$$

Para $k = 6$ el punto P pertenece a la recta que pasa por los puntos A y C.

- c) Hallamos la distancia pedida hallando primero el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}' = \vec{v}_r = (-3, -3, 1) \\ B(3, 3, 4) \in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi': -3x - 3y + z + D = 0 \\ B(3, 3, 4) \in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 - 9 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 + D = 0 \Rightarrow D = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': -3x - 3y + z + 14 = 0}$$

Hallamos el punto Q de corte del plano hallado con la recta r .

$$\left. \begin{aligned} \pi': -3x - 3y + z + 14 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3(1 - 3\lambda) - 3(-3\lambda) + 4 + \lambda + 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 9\lambda + 9\lambda + 4 + \lambda + 14 = 0 \Rightarrow 19\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-15}{19} \Rightarrow$$

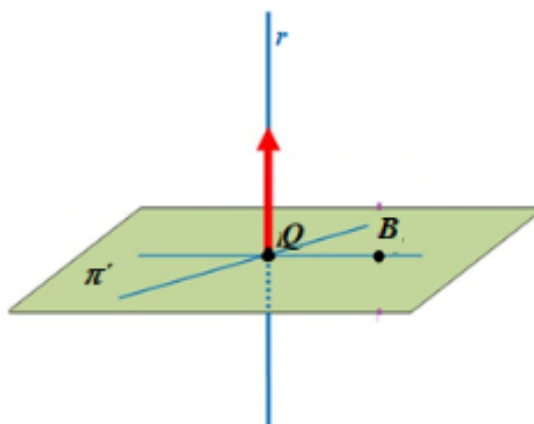
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 \cdot \frac{-15}{19} = \frac{64}{19} \\ y = -3 \cdot \frac{-15}{19} = \frac{45}{19} \\ z = 4 - \frac{15}{19} = \frac{61}{19} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right)}$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C es el módulo del vector que une los puntos B y Q.

$$\left. \begin{aligned} Q\left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right) \\ B(3, 3, 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{64}{19}, \frac{45}{19}, \frac{61}{19}\right) - (3, 3, 4) = \left(\frac{7}{19}, \frac{-12}{19}, \frac{-15}{19}\right)$$

$$d(B, r) = |\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{\left(\frac{7}{19}\right)^2 + \left(\frac{-12}{19}\right)^2 + \left(\frac{-15}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{418}}{19} \approx 1.08 u$$

La distancia del punto B a la recta que pasa por A y C vale $\frac{\sqrt{418}}{19} \approx 1.08$ unidades.



Problema 3.B:**EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) a) 0,5 puntos b) 1,5 puntos c) 0,5 puntos**

Dados los planos $\pi_1: x + ky - 3z - 6 = 0$, $\pi_2: 2x - y - 5 = 0$ y el punto $A(2, 3, -4)$:

- Calcula el valor de “ k ” para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- Para $k = 2$, calcula el simétrico del punto A respecto del plano π_1 .
- Para $k = 2$, calcula la distancia del punto A al plano

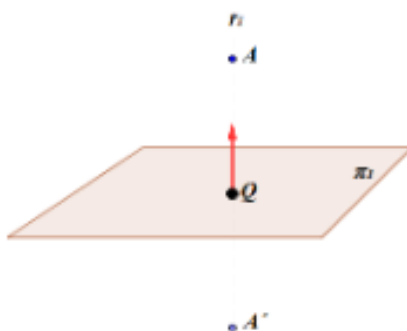
Solución:

- Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares sus vectores normales deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + ky - 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, k, -3) \\ \pi_2: 2x - y - 5 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, 0) \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, k, -3)(2, -1, 0) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

Para $k = 2$ los planos son perpendiculares.

- Para $k = 2$ la ecuación del plano π_1 queda $\pi_1: x + 2y - 3z - 6 = 0$.



Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene el punto A. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1: x + 2y - 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 3, -4) \in r_1 \\ \vec{v}_1 = \vec{n}_1 = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 - 3\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta con el plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 - 3\lambda \end{cases} \\ \pi_1: x + 2y - 3z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 3(-4 - 3\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 12 + 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 14 + 14\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 1, -1)}$$

El punto simétrico A' se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ} = (1, 1, -1) - (2, 3, -4) = (-1, -2, 3)$$

$$A' = A + \overrightarrow{AQ} = (1, 1, -1) + (-1, -2, 3) = (0, -1, 2)$$

El simétrico del punto A respecto del plano π_1 tiene coordenadas $A'(0, -1, 2)$.

c) La distancia del punto A al plano es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$d(A, \pi_1) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

La distancia del punto A al plano π_1 tiene un valor de $\sqrt{14}$ unidades.

Problema 4:**EJERCICIO 4. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,5 puntos c) 1 punto**

El pasado mes de diciembre falleció el cantante extremeño Roberto Iniesta (Robe), considerado uno de los grandes iconos de la música española. Robe publicó, entre otros, 12 discos con su grupo Extremoduro y 4 discos en solitario. Nos hemos encontrado con un fan que nos ha dicho que se sabe el 70% de las canciones de Extremoduro y el 80% de las canciones de su etapa en solitario. Si ponemos una canción de uno de los discos de Robe:

- ¿Qué probabilidad hay de que ese fan se sepa la canción?
- Si nos ha dicho que se sabe la canción que está sonando ¿qué probabilidad hay de que la canción sea de la etapa de Extremoduro?
- ¿Qué probabilidad hay de que la canción sea de su etapa en solitario o no la sepa?

Solución:

- a) Llamamos A a “la canción es de Extremoduro”, B a “la canción es de Robe” y C a “el fan se sabe la letra de la canción”.

Por la información proporcionada y suponiendo que todos los discos tienen el mismo número de canciones sabemos que:

$$P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75; P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25; P(C/A) = 0.70 \text{ y } P(C/B) = 0.80$$

Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = 0.75 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.725}$$

La probabilidad de que el fan conozca la letra de la canción elegida al azar vale 0.725.

- b) Debemos calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot 0.7}{0.725} = \boxed{\frac{21}{29} \approx 0.7241}$$

La probabilidad de que la canción que suena cuya letra sabe el fan sea de Extremoduro vale $\frac{21}{29} = 0.7241$.

- c) Nos piden calcular $P(B \cup \bar{C})$.

$$\begin{aligned} P(B \cup \bar{C}) &= P(B) + P(\bar{C}) - P(B \cap \bar{C}) = P(B) + 1 - P(C) - P(B)P(\bar{C}/B) = \\ &= P(B) + 1 - P(C) - P(B)[1 - P(C/B)] = P(B) + 1 - P(C) - P(B) + P(B)P(C/B) = \\ &= 1 - P(C) + P(B)P(C/B) = 1 - 0.725 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.475} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Supongamos que todos los discos tienen el mismo número de canciones y que todos llevan 10 canciones. Serían 120 canciones de Extremoduro y 40 de Robe.

El fan se sabe la letra del 70% de las canciones de Extremoduro, es decir, se sabe la letra de $0.7 \cdot 120 = 84$ canciones de Extremoduro.

El fan se sabe la letra del 80% de las canciones de Robe, es decir, se sabe la letra de $0.8 \cdot 40 = 32$ canciones de Robe.

Hacemos una tabla con los datos proporcionados.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84		120
Canción de Robe	32		40

Completamos la tabla.

	Se sabe la letra	No sabe la letra	
Canción de Extremoduro	84	36	120
Canción de Robe	32	8	40
	116	44	160

- a) De las 160 canciones el fan se sabe la letra de 116. La probabilidad de que al elegir una canción al azar el fan se sepa la letra vale $\frac{116}{160} = 0.725$.
- b) El fan sabe la letra de 116 canciones y de estas 84 son de Extremoduro. La probabilidad de que la canción que suena y de la cual sabe la letra el fan sea de Extremoduro vale $\frac{84}{116} = \frac{21}{29} = 0.7241$.
- c) De las 160 canciones hay 40 de su etapa en solitario y 36 de su etapa en Extremoduro cuya letra no se sabe el fan. La probabilidad de que la canción elegida sea de su etapa en solitario o no la sepa el fan vale $\frac{40+36}{160} = 0.475$.