

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de GALICIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Luis Bóveda



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2 PUNTOS)

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X y Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

Problema 2: ÁLGEBRA. (2 PUNTOS).

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & + 5z = 9, \\ & (m-1)y + 6z = m+8, \\ (m-4)x & + (m-1)y + 7z = m+9. \end{cases}$$

Problema 3: ANÁLISIS. (4 PUNTOS).

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- Continua pero no derivable en $x = 0$.
- Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Problema 4: GEOMETRÍA. (2 PUNTOS). Responda uno de los apartados

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .

4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0, 0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

Solución:

1.1. Explicación de sucesos/variables y cálculo de la probabilidad de retraso significativo

Definición de sucesos y variables:

I : Suceso de que se active el protocolo por incidencia meteorológica en un día de la temporada invernal.

$\bar{I}$: Suceso de que no se active el protocolo por incidencia meteorológica (el viaje transcurre en condiciones operativas habituales).

R : Suceso de que el tren Alvia experimente un “retraso significativo” según los criterios de la compañía.

X : Variable aleatoria que mide el tiempo de viaje (en minutos) en un día sin incidencias ($\bar{I}$). Sigue una distribución normal con media de 765 minutos y desviación típica de 18 minutos: $X \sim N(765, 18)$.

Y : Variable aleatoria que mide el tiempo de viaje (en minutos) en un día con incidencias meteorológicas (I). Sigue una distribución normal con media de 810 minutos y desviación típica de 40 minutos: $Y \sim N(810, 40)$.

Datos de probabilidad iniciales:

Probabilidad de incidencia: $P(I) = 30\% = 0.3$

Probabilidad de no incidencia: $P(\bar{I})=1-0.3=0.7$

Umbral de retraso sin incidencia: $P(R|\bar{I})=P(X>780)$

Umbral de retraso con incidencia: $P(R|I)=P(Y>840)$

Paso 1: Cálculo de las probabilidades condicionadas (Tipificación)

Para calcular estas probabilidades con la variable normal estándar $Z \sim N(0,1)$, restamos la media y dividimos entre la desviación típica de cada caso:

- **Días sin incidencia ($\bar{I}$):**

$$P(R|\bar{I})=P(X>780)=P\left(\frac{X-765}{18}>\frac{780-765}{18}\right)=P\left(Z>\frac{15}{18}\right)=P(Z>0.83)$$

$$P(Z>0.83)=1-P(Z \leq 0.83)=1-0.7967=0.2033$$

- **Días con incidencia (I):**

$$P(R|I)=P(Y>840)=P\left(\frac{Y-810}{40}>\frac{840-810}{40}\right)=P\left(Z>\frac{30}{40}\right)=P(Z>0.75)$$

$$P(Z>0.75)=1-P(Z \leq 0.75)=1-0.7734=0.2266$$

Paso 2: Aplicación del Teorema de la Probabilidad Total

Para hallar la probabilidad global de que el tren sufra un retraso significativo ($P(R)$) en la temporada invernal, combinamos ambas situaciones:

$$P(R)=P(\bar{I}) \cdot P(R|\bar{I})+P(I) \cdot P(R|I)$$

$$P(R)=(0.7 \cdot 0.2033)+(0.3 \cdot 0.2266)$$

$$P(R)=0.14231+0.06798=0.21029$$

Resultado 1.1: La probabilidad de que un día cualquiera de la temporada de invierno el tren Alvia sufra un retraso significativo es de 0.2103 (o un 21.03%).

1.2. Probabilidad de viaje inferior a 765 minutos en un día con incidencia activa

Nos piden calcular la probabilidad de que el tiempo de viaje sea menor que 765 minutos bajo la condición de incidencia activa (es decir, trabajando con la variable Y):

$$P(Y < 765)$$

Tipificamos utilizando los parámetros correspondientes a los días con protocolo meteorológico activado

($Y \sim N(810, 40)$):

$$P(Y < 765) = P\left(\frac{Y - 810}{40} < \frac{765 - 810}{40}\right) = P\left(Z < \frac{-45}{40}\right) = P(Z < -1.125)$$

Por la propiedad de simetría de la campana de Gauss:

$$P(Z < -1.125) = P(Z > 1.125) = 1 - P(Z \leq 1.125)$$

Consultando los valores proporcionados en el enunciado ($P(Z \leq 1.125) = 0.8697$):

$$P(Y < 765) = 1 - 0.8697 = 0.1303$$

Resultado 1.2: La probabilidad de que el tren complete su viaje en menos de 765 minutos en un día con incidencia activa es de 0.1303 (o un 13.03%).

Problema 2:

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + & (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

Solución:**PREGUNTA 2. ÁLGEBRA****2.1. Igualdad matricial****2.1.1. Despejar X en la expresión $A(X-I)B=C$**

Asumiendo que A y B son matrices cuadradas e invertibles, procedemos a despejar X multiplicando por sus matrices inversas en el orden correcto:

1. Multiplicamos por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A(X-I)B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow (X-I)B = A^{-1}C$$

1. Multiplicamos por la derecha por B^{-1} :

$$(X-I)B \cdot B^{-1} = A^{-1}C \cdot B^{-1} \Rightarrow X-I = A^{-1}CB^{-1}$$

2. Sumamos la matriz identidad (I) en ambos lados:

$$X = A^{-1}CB^{-1} + I$$

2.1.2. Análisis de dimensiones y resolución del caso particular

Análisis de dimensiones: Si A y C son matrices de dimensión 1×2 y $B=I$ (matriz identidad), la igualdad queda simplificada como:

$$A(X-I) = C$$

Para que el producto de la matriz A (1×2) por la matriz $(X-I)$ sea viable, el número de filas de $(X-I)$ debe ser de **2**.

El enunciado define a X como una matriz cuadrada, por lo que $(X-I)$ también conserva el formato cuadrado. Al tener 2 filas, obligatoriamente tendrá 2 columnas (2×2). Por tanto, X **tiene dimensiones** 2×2 .

Dado que el producto opera de manera consistente en este entorno algebraico y $B=I$ actúa de elemento neutro por la derecha, B **se establece como la matriz identidad de orden** 2×2 .

Resolución del caso particular: Buscamos una matriz X simétrica cuyas componentes de la diagonal sumen 0 (traza igual a 0). La definimos formalmente de la siguiente manera:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el término $(X-I)$:

$$X-I = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 \\ x_2 & -x_1-1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices dados, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 \\ x_2 & -x_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto de la fila por cada columna:

$$\begin{aligned} (1 \cdot (x_1-1) + 1 \cdot x_2 \quad 1 \cdot x_2 + 1 \cdot (-x_1-1)) &= (0 \quad 0) \\ (x_1+x_2-1 \quad x_2-x_1-1) &= (0 \quad 0) \end{aligned}$$

Igualando componente a componente, obtenemos un sistema lineal de dos ecuaciones:

$$1. \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$2. \quad -x_1 + x_2 = 1$$

Sumamos directamente ambas ecuaciones para cancelar x_1 :

$$2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$$

Sustituyendo el valor de x_2 en la primera ecuación:

$$x_1 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$

Resultado 2.1.2: La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema viene dado por:

$$\begin{cases} (m-4)x+5z=9 \\ (m-1)y+6z=m+8 \\ (m-4)x+(m-1)y+7z=m+9 \end{cases}$$

Planteamos la matriz de coeficientes (M) y la matriz ampliada (M^*):

$$M = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{pmatrix}; M^* = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes $|M|$:

$$|M| = \begin{vmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{vmatrix}$$

Para simplificar el cálculo, restamos la Fila 1 a la Fila 3 ($F_3 \leftarrow F_3 - F_1$):

$$|M| = \begin{vmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ 0 & m-1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna:

$$|M| = (m-4) \cdot \begin{vmatrix} m-1 & 6 \\ m-1 & 2 \end{vmatrix} = (m-4) \cdot [2(m-1) - 6(m-1)]$$

$$|M| = (m-4) \cdot [-4(m-1)] = -4(m-4)(m-1)$$

Buscamos los valores de m que anulan el determinante:

$$-4(m-4)(m-1) = 0 \Rightarrow m=4 \vee m=1$$

Análisis de los casos (Teorema de Rouché-Frobenius):

- **Caso 1:** Si $m \neq 4$ y $m \neq 1$ El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero ($|M| \neq 0$). Por tanto, el rango de la matriz principal es 3, que coincide con el rango de la ampliada y con el número de incógnitas. > **Conclusión:** El sistema es **Sistema Compatible Determinado (SCD)**. Tiene solución única.

- **Caso 2:** Si $m=4$ Sustituimos $m=4$ en la matriz ampliada:

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Como la primera columna es completamente nula, $|M|=0$ y su rango máximo es 2. Tomamos un menor de orden 2 diferente de cero en M : $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$. Estudiamos el rango de M^* analizando el determinante formado al sustituir la columna nula por los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = -5(39-36) + 9(21-18) = -5(3) + 9(3) = -15 + 27 = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M^*) = 3$$

Al ser $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(M^*) = 3$: > **Conclusión:** El sistema es **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene solución.

Caso 3: Si $m=1$ Sustituimos $m=1$ en la matriz ampliada:

$$M^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

En este caso, la segunda columna es nula, por lo que $\text{rango}(M) \leq 2$. Extraemos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -21 - (-15) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$. Estudiamos el rango de M^* calculando el determinante con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -3(60-63) - 3(45-54) = -3(-3) - 3(-9) = 9 + 27 = 36 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M^*) = 3$$

Al ser $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(M^*) = 3$: >

Conclusión: El sistema es **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene solución.

Problema 3:

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- Continua pero no derivable en $x = 0$.
- Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Solución:**PREGUNTA 3. ANÁLISIS****3.1. Viabilidad y esbozo de las funciones según propiedades**

a) Continua pero no derivable en $x=0$: *Es totalmente posible.* El ejemplo por excelencia es la función valor absoluto $f(x)=|x|$. Es una curva continua que dibuja una “V” cuyo vértice en $(0,0)$ constituye un punto anguloso, provocando que las derivadas laterales no coincidan.

b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y que corta al eje x en más de un punto de (a, b) : *Es totalmente posible.* El Teorema de Bolzano asegura que si hay cambio de signo existirá *al menos* un punto de corte, pero no impide que existan múltiples. Una función de tercer grado u ondulatoria que oscile cruzando el eje horizontal varias veces cumple esta condición.

c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y corte múltiple: *Es imposible.* La condición de que la primera derivada sea estrictamente positiva ($f'(x) > 0$) fuerza a que la función sea **estrictamente creciente** en todo el intervalo. Una trayectoria que solo asciende no puede retornar a cortar el eje horizontal una segunda vez. Por tanto, el punto de corte con el eje x es único.

d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$: *Es totalmente posible.* La condición $f''(x) > 0$ nos indica que la función es **estrictamente convexa** (forma de “U”). Puede ser monótona si elegimos una función cuya tendencia sea siempre creciente o siempre decreciente a lo largo de todo el dominio real, como ocurre con la función exponencial $f(x)=e^x$, donde $f'(x)=e^x > 0$ (creciente) y $f''(x)=e^x > 0$ (convexa).

3.2. Cálculo de límites

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$ Sustituimos directamente el valor numérico:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$ Al evaluar obtenemos la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicamos la regla de L'Hôpital derivando de manera independiente el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(x-1)}{\frac{d}{dx}(\ln x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ Descomponemos la tangente empleando la identidad trigonométrica fundamental $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$ Nos encontramos ante la indeterminación $[0 \cdot (-\infty)]$. Reordenamos los términos algebraicamente para transformarlo en una estructura de cociente $\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$ y aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$

- Derivamos las funciones correspondientes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{2}x \cdot x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^{1/2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

3.3. Determinación del parámetro positivo a mediante el área encerrada

Dada la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ con $a > 0$. Hallamos los puntos de intersección con el eje horizontal igualando la función a cero ($f(x) = 0$):

$$ax^2 - 2ax = 0 \Rightarrow ax(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Dado que el coeficiente principal es positivo ($a > 0$), la parábola tiene sus ramas orientadas hacia arriba, lo que implica que en el intervalo abierto $(0, 2)$ los valores de la función se localizan por debajo del eje x . El cálculo del área se plantea mediante la integral definida del opuesto de la función:

$$\text{Área} = \int_0^2 -(ax^2 - 2ax) dx = \int_0^2 (2ax - ax^2) dx$$

$$\text{Área} = \left[ax^2 - \frac{ax^3}{3} \right]_0^2 = \left(a(2)^2 - \frac{a(2)^3}{3} \right) - 0$$

$$\text{Área} = 4a - \frac{8a}{3} = \frac{12a - 8a}{3} = \frac{4a}{3}$$

El enunciado establece que el área debe ser igual a 10 unidades de superficie:

$$\frac{4a}{3} = 10 \Rightarrow 4a = 30 \Rightarrow a = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Resultado 3.3: El parámetro positivo buscado es $a = \frac{15}{2}$ (o 7.5).

Problema 4:

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .

4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0, 0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

Solución:**4.1.1. Obtención del punto simétrico P' y las ecuaciones paramétricas de r**

El punto $Q(0,1,0)$ actúa como el punto medio del segmento delimitado por $P(1,0,1)$ y su punto simétrico $P'(x, y, z)$. Aplicamos la fórmula del punto medio coordenado:

$$Q = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow (0,1,0) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right)$$

Iguamos componente a componente para despejar las coordenadas de P' : $* 0 = \frac{1+x}{2} \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$ $* 1 = \frac{y}{2} \Rightarrow y=2$ $* 0 = \frac{1+z}{2} \Rightarrow 1+z=0 \Rightarrow z=-1$

El punto simétrico obtenido es $P'(-1, 2, -1)$.

La recta r viene definida por pasar por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y el punto P' . Su vector director coincide con el vector posicional $\overrightarrow{OP'}$:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{OP'} = (-1, 2, -1)$$

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

4.1.2. Ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el origen

Al determinarse que el plano es perpendicular a la recta r , el vector director de dicha recta se convierte en el vector normal del plano ($\vec{n}_\pi$):

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 2, -1)$$

La ecuación general o implícita del plano adopta la forma estructural:

$$-1x + 2y - 1z + D = 0 \Rightarrow -x + 2y - z + D = 0$$

Dado que el plano pasa explícitamente por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, al sustituir los valores obtenemos que la constante independiente es cero ($D=0$).

Resultado 4.1.2: La ecuación implícita del plano es $-x+2y-z=0$ (o multiplicando por -1 : $x-2y+z=0$).

4.2. Puntos en el espacio, planos y distancias

4.2.1. Demostración de puntos no alineados y obtención de la ecuación implícita de π

Disponemos de los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$. Construimos los vectores directores generados a partir de ellos:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0-1, 1-0, 0-1) = (-1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (1-1, 1-0, 1-1) = (0, 1, 0)$$

Para validar si se encuentran alineados, comprobamos la proporcionalidad de sus coordenadas componentes:

$$\frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1}$$

Al carecer de proporcionalidad, se concluye que los vectores son linealmente independientes y, por ende, los tres puntos **no están alineados**, garantizando la existencia de un único plano π .

El vector normal al plano ($\vec{n}_\pi$) lo calculamos mediante el producto vectorial de ambos vectores de posición:

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{i}(0 - (-1)) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(-1 - 0) = 1\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k} = (1, 0, -1)$$

Con el vector normal $(1, 0, -1)$, la ecuación implícita se escribe provisionalmente como:

$$1x + 0y - 1z + D = 0 \Rightarrow x - z + D = 0$$

Hacemos pasar el plano por cualquiera de los puntos, por ejemplo, $Q(0, 1, 0)$:

$$0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Resultado 4.2.1: La ecuación implícita del plano π es $x - z = 0$.

4.2.2. Determinación del valor o valores de a según la distancia establecida

Se requiere hallar el valor del parámetro del punto $S(a, 0, 0)$ de modo que su distancia al plano calculado sea exactamente igual a $a\sqrt{2}$ unidades de longitud.

Empleamos la expresión analítica de la distancia de un punto a un plano:

$$d(S, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$a\sqrt{2} = \frac{|1 \cdot a + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \Rightarrow a\sqrt{2} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

Despejamos multiplicando los términos en cruz de la igualdad:

$$a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = |a| \Rightarrow 2a = |a|$$

Evaluamos las dos alternativas posibles que presenta la definición de la función de valor absoluto: 1. **Si** $a \geq 0$: La igualdad se traduce de forma directa en $2a = a \Rightarrow a = 0$. 2. **Si** $a < 0$: El término absoluto altera el signo, quedando como $2a = -a \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$.

Resultado 4.2.2: El único valor admisible que cumple las directrices geométricas requeridas es $a=0$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

COMISIÓN
INTERUNIVERSITARIA
DE GALICIA

PAU

Convocatoria extraordinaria 2026
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A . ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f , f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$ y
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^* .

4.2. Considere el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2 PUNTOS)

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

Solución:

1.1. Probabilidad de permanecer entre 45 y 70 minutos

Sea T el tiempo, en minutos, que una persona permanece en la feria. Según el enunciado:

$$T \sim N(50, 19.5)$$

$$z_{45} = \frac{45 - 50}{19.5} \approx -0.26, z_{70} = \frac{70 - 50}{19.5} \approx 1.03$$

Por tanto, utilizando los valores de la función de distribución normal estándar proporcionados:

$$P(45 < T < 70) = \Phi(1.03) - \Phi(-0.26)$$

$$P(45 < T < 70) = 0.8485 - (1 - 0.6026) = 0.4511$$

Resultado 1.1: La probabilidad pedida es 0,4511, es decir, aproximadamente un 45,11 %.

1.2. Probabilidad condicionada

Salir antes de las 18:00 equivale a permanecer menos de 60 minutos; seguir dentro a las 17:45 equivale a haber permanecido más de 45 minutos. Por ello:

$$P(T < 60 | T > 45) = \frac{P(45 < T < 60)}{P(T > 45)}$$
$$\frac{\Phi(0.51) - \Phi(-0.26)}{1 - \Phi(-0.26)} = \frac{0.6950 - 0.3974}{0.6026} \approx 0.4939$$

Resultado 1.2: La probabilidad condicionada pedida es 0,4939 (49,39 %).

Problema 2: ÁLGEBRA (2 PUNTOS)**PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)**

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A . ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

Solución:**2.1. Productos de matrices e invariancia**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Cálculo de X e Y

$$X = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Y = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det X = 8 \neq 0, X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det Y = 0 \text{ (la primera y la tercera filas coinciden)}$$

Resultado 2.1.1: X es invertible y su inversa es la indicada; Y no es invertible.

2.1.2. Matrices M que cumplen $BM = M$

$$M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, BM = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$BM = M \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=a \\ b=b \\ a+c=c \end{cases} \Leftrightarrow a=c=0$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Resultado 2.1.2: Todas las soluciones son los múltiplos del vector $(0,1,0)^T$.

2.2. Discusión del sistema según m

La matriz de coeficientes y el cálculo de su determinante son:

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 \\ 1 & m-2 & 3 \\ 0 & 2 & 2m+2 \end{pmatrix}, R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2: A_m \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & m \\ 1 & m-2 & 3 \\ 0 & 2 & 2m+2 \end{pmatrix}$$

$$\det A_m = -[2(2m+2) - 2m] = -2(m+2)$$

Si $m \neq -2$, el determinante no se anula y el sistema es compatible determinado. Una eliminación sencilla da:

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - 2R_2: 2y + mz = 5 \\ R_3 &: 2y + (2m+2)z = m - 5 \\ (m+2)z &= m - 10 \\ z &= \frac{m-10}{m+2}, y = \frac{-m^2+15m+10}{2(m+2)}, x = \frac{m^3-17m^2+18m+88}{2(m+2)} \end{aligned}$$

Si $m = -2$, las ecuaciones obtenidas son contradictorias:

$$m = -2: y - z = \frac{5}{2} \quad y - z = -\frac{7}{2}$$

Resultado 2.2: Para $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado y tiene la solución indicada. Para $m = -2$ es incompatible y no tiene solución.

Problema 3: ANÁLISIS (4 PUNTOS)**PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)**

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f , f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$ y
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

Solución:**3.1. Determinación del polinomio**

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Que $(1, -6)$ sea un extremo relativo implica $p(1) = -6$ y $p'(1) = 0$. La recta tangente $y = 4x + 2$ en $x = -1$ aporta $p(-1) = -2$ y $p'(-1) = 4$:

$$p(1) = -6, p'(1) = 0, p(-1) = -2, p'(-1) = 4$$

$$\begin{cases} a+b+c+d = -6 \\ 3a+2b+c = 0 \\ -a+b-c+d = -2 \\ 3a-2b+c = 4 \end{cases}$$

$$a=2, b=-1, c=-4, d=-3$$

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 3$$

Además:

$$p''(1) = 12 \cdot 1 - 2 = 10 > 0$$

Resultado 3.1: Los coeficientes son $a=2$, $b=-1$, $c=-4$ y $d=-3$. Como $p''(1)>0$, el punto $(1,-6)$ es efectivamente un mínimo relativo.

3.2. Ejemplo de función con las propiedades pedidas

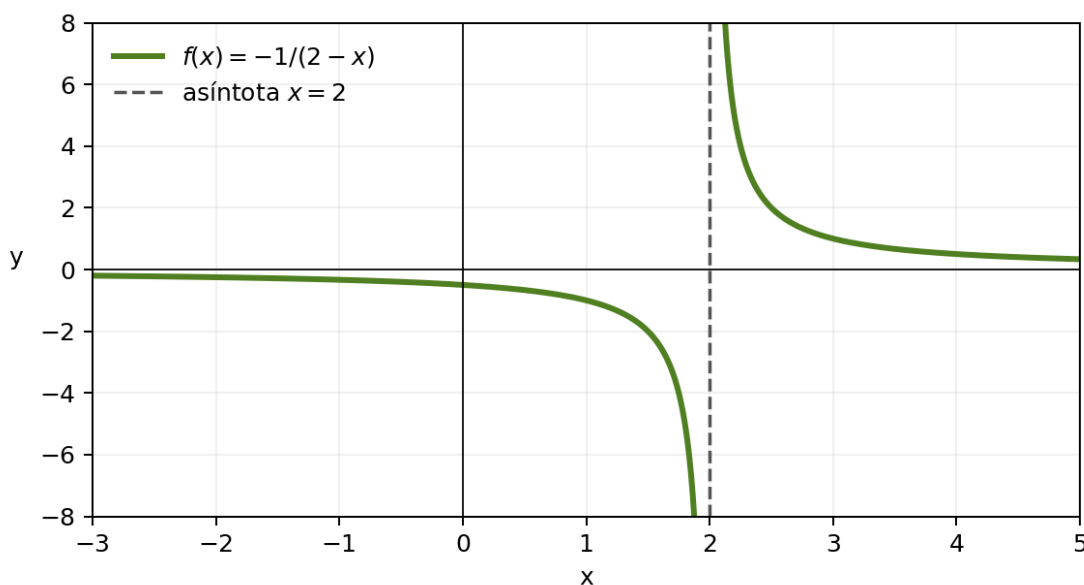
Una elección especialmente sencilla es:

$$f(x) = -\frac{1}{2-x}, x \neq 2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(2-x)^2}, f''(x) = -\frac{2}{(2-x)^3}$$

$$x \in (-1, 2) \Rightarrow f(x) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

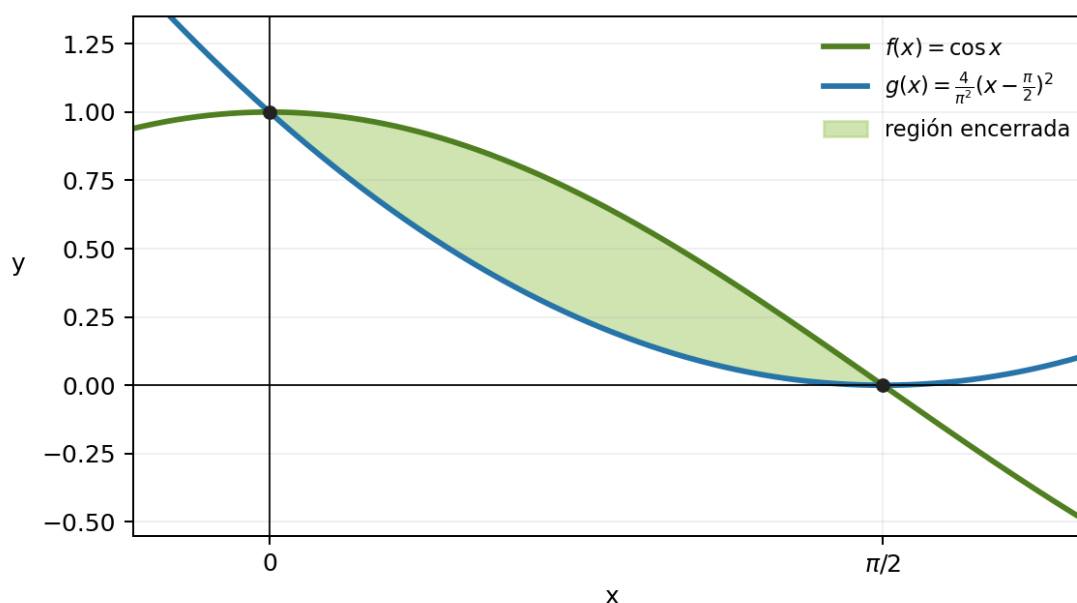


En $(-1, 2)$ la función es negativa, decreciente y cóncava. La recta $x=2$ es una asíntota vertical y la rama izquierda desciende sin cota al aproximarse a ella.

3.3. Área encerrada por las dos gráficas

Las gráficas se cortan en los extremos del intervalo que encierra la región:

$$\cos 0 = 1 = g(0), \cos \frac{\pi}{2} = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



Además, si restamos ambas funciones, la diferencia es estrictamente cóncava en el intervalo y se anula en los extremos; por ello es positiva en el interior:

$$h(x) = \cos x - \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \quad h''(x) = -\cos x - \frac{8}{\pi^2} < 0 \text{ en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

En $[0, \pi/2]$, la función $\cos x$ queda por encima de la parábola. Por tanto:

$$A = \int_0^{\pi/2} \left[\cos x - \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right] dx$$

$$A = \left[\sin x - \frac{4}{3\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{6} \approx 0.4764$$

Resultado 3.3: El área encerrada es $1 - \pi/6$ unidades cuadradas, aproximadamente 0,4764.

Problema 4: GEOMETRÍA (2 PUNTOS)**PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)**

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^* .

4.2. Considere el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

Solución:**4.1. Plano que contiene a la recta y distancia****4.1.1. Ecuación del plano π**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow P_0 = (1, 1, 0), \vec{v} = (2, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{P_0Q} = (1, -2, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_0Q} = (7, 1, -5)$$

$$\pi: 7(x-1) + (y-1) - 5z = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 5z - 8 = 0$$

Resultado 4.1.1: El plano pedido es $\pi: 7x + y - 5z - 8 = 0$.

4.1.2. Paralelismo y distancia a π^*

Un vector normal de π^* es $(1, 1, -1)$. El producto escalar con el vector director de r es nulo:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_{\pi^*} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Por ello r es paralela a π^* .

La recta no está contenida en el plano, pues:

$$1+1-0-1=1 \neq 0 \Rightarrow P_0 \notin \pi^*$$

Como el punto $P_0=(1,1,0)$ pertenece a r , la distancia es:

$$d(r, \pi^*) = d(P_0, \pi^*) = \frac{|1+1-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resultado 4.1.2: La distancia de r a π^* es $1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$.

4.2. Simetrías

4.2.1. Simétrico respecto de un punto

$$Q = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2Q - P$$

$$P' = 2(2, -1, 2) - (3, 0, -1) = (1, -2, 5)$$

Resultado 4.2.1: $P'=(1,-2,5)$.

4.2.2. Simétrico respecto del plano

El vector normal del plano es $n=(1,2,1)$. Para $P=(3,0,-1)$:

$$s = 3 + 2 \cdot 0 - 1 - 8 = -6, \|\vec{n}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$$

$$P'' = P - 2 \frac{s}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (3, 0, -1) + 2(1, 2, 1) = (5, 4, 1)$$

Como comprobación, el punto medio de P y P'' pertenece al plano:

$$\frac{P+P''}{2} = (4, 2, 0), 4 + 2 \cdot 2 + 0 - 8 = 0$$

Resultado 4.2.2: $P''=(5,4,1)$.