

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de LA RIOJA



www.apuntesmareaverde.org.es

**Autores: Miguel Paz, Javier Zambrana y Juan Antonio
Martínez García**



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

 UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Solo se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni tñpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de Matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60 %, 75 % y 80 %, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

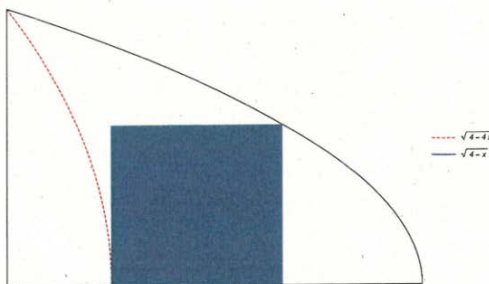


Figura 1: Parcela con piscina

Pregunta 3:

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50 %, de la variante B el 60 % y de la variante C el 40 %. El resto se reparte a domicilio.

- Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
- Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
- Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

Ejercicio 4:

PARTE B (Preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$,

- determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas. [0.75 puntos].
- Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión. [0.75 puntos].
- Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva. [0.5 puntos].

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2}, \quad a \neq 0.$$

- Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0, 1)$. [1 punto].

Ejercicio 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$, con $s \in \mathbb{R}$.

- Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
- Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
- Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-2}$; y $s: \begin{cases} x = -2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
- Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de Matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60 %, 75 % y 80 %, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Solución:

- a) Llamamos A, B y C a los sucesos aprobar Métodos algorítmicos en matemáticas, Estadística y Bases de datos, respectivamente. Nos dicen que $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.75$ y $P(C) = 0.80$. Suponemos que los sucesos A, B y C son independientes entre si, por lo que la probabilidad de aprobar las tres asignaturas es el producto de las probabilidades de aprobar cada una de ellas.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.6 \cdot 0.75 \cdot 0.8 = \boxed{0.36}$$

La probabilidad de aprobar las tres asignaturas vale 0.36.

- b) El suceso suspender solo una de las tres asignaturas puede ocurrir de tres formas distintas y su probabilidad será la suma de las probabilidades de estos tres sucesos.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) &= \\ = P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) &= \\ = (1 - 0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.6(1 - 0.75) \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.75 \cdot (1 - 0.8) &= \boxed{0.45} \end{aligned}$$

La probabilidad de suspender solo una de las tres asignaturas vale 0.45.

- c) Si llamamos D al suceso “suspender solo una de las tres asignaturas” nos piden calcular $P(\bar{A}/D)$. Sabemos que $P(D) = 0.45$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/D) = \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A} \cap B \cap C)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)}{P(D)} =$$

$$= \frac{(1-0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8}{0.45} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.5333}$$

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- (a) En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- (b) En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

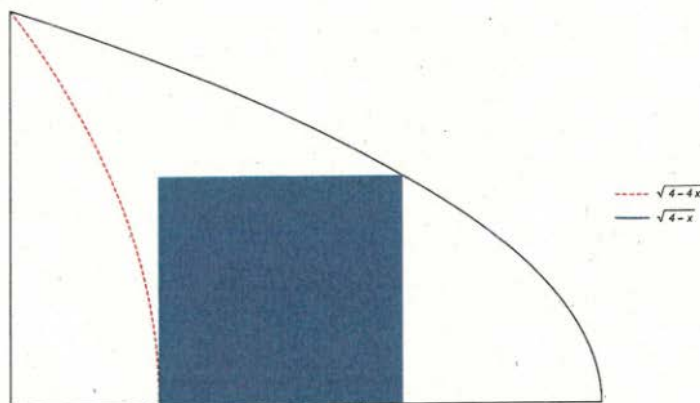


Figura 1: Parcela con piscina

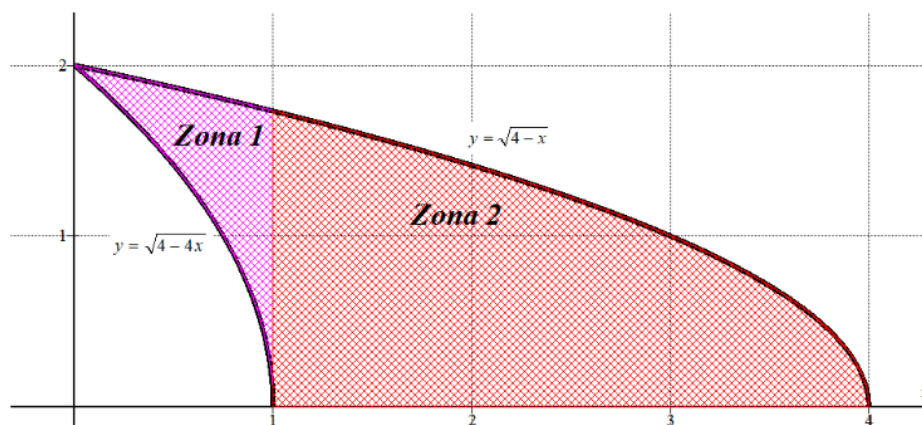
Solución:

- a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas con el eje $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-4x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-4x} = 0 \Rightarrow 4-4x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Añadimos a la Figura 1 la información obtenida y coloreamos la parcela.



El área de la parcela la obtenemos como la suma de las áreas de la zona 1 y zona 2.
El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones: $\sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x}$.

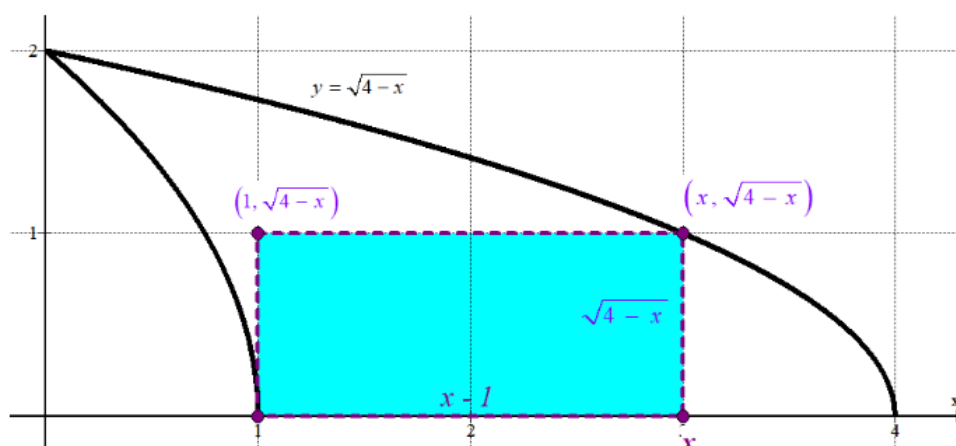
$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^1 \sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x} dx = \int_0^1 (4-x)^{1/2} - (4-4x)^{1/2} dx = \\ &= \left[\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-1} - \frac{(4-4x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-4} \right]_0^1 = \left[-\frac{(4-x)^{3/2}}{3/2} + \frac{(4-4x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot 4} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{\sqrt{(4-4x)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{\sqrt{(4-4)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] - \left[\frac{\sqrt{(4-0)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-0)^3}}{3} \right] = \\ &= \frac{-2\sqrt{27}}{3} - \frac{\sqrt{64}}{6} + \frac{2\sqrt{64}}{3} = -2\sqrt{3} - \frac{8}{6} + \frac{16}{3} = \boxed{4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la zona 2 es el valor de la integral definida de 1 a 4 de $y = \sqrt{4-x}$.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_1^4 \sqrt{4-x} dx = \int_1^4 (4-x)^{1/2} dx = \left[-\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \right]_1^4 = \left[-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_1^4 = \\ &= \left[-\frac{2\sqrt{(4-4)^3}}{3} \right] - \left[-\frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{3} = \boxed{2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas: $4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4$ unidades cuadradas.

- b) Tomamos un punto cualquiera de la gráfica de $y = \sqrt{4-x}$, siendo $1 \leq x \leq 4$ y dibujamos la piscina obteniendo la longitud de sus lados.



El área de la piscina es el producto de la base por la altura: $A(x) = (x-1)\sqrt{4-x}$

Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula su derivada (puntos críticos).

$$A(x) = (x-1)\sqrt{4-x} \Rightarrow A'(x) = \sqrt{4-x} + (x-1) \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(\sqrt{4-x})^2 - x + 1}{2\sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{2(4-x) - x + 1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-2x-x+1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3x+9}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Rightarrow -3(x-3) = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=3$.

- Antes de $x=3$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $A'(2) = \frac{-3(2-3)}{2\sqrt{4-2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$.

La función área crece de 1 a 3.

- Después de $x=3$ consideramos $x=3.5$ y la derivada vale

$$A'(3.5) = \frac{-3(3.5-3)}{2\sqrt{4-3.5}} = \frac{-1.5}{2\sqrt{0.5}} < 0. \text{ La función área decrece de 3 a 4.}$$

Como el área crece antes de $x=3$ y decrece después podemos afirmar que el área es máxima para $x=3$.

Para $x=3$ el área de la piscina vale $A(3) = (3-1)\sqrt{4-3} = 2$ unidades cuadradas.

El área máxima que puede tener la piscina es de 2 unidades cuadradas.

Problema 3:

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50 %, de la variante B el 60 % y de la variante C el 40 %. El resto se reparte a domicilio.

- Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
- Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
- Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

Solución:

- a) La matriz que se pide es la que aparece en la tabla.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{pequeño} \\ \text{grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix}$$

- b) Escribimos la matriz que expresa el porcentaje según la variante y el tipo de venta.

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.50 & 1-0.5 \\ 0.60 & 1-0.6 \\ 0.40 & 1-0.4 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- c) Obtenemos el producto de las dos matrices anteriores.

$$M \cdot N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$MN = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50+30+40 & 50+20+60 \\ 80+90+40 & 80+60+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 130 \\ 210 & 200 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix}$$

Problema 4:**PARTE B (Preguntas 4 y 5.)**

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$,

- determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, [0.75 puntos].
- Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión, [0.75 puntos].
- Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva, [0.5 puntos].

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2}, \quad a \neq 0.$$

- Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0, 1)$, [1 punto].

Solución:

- La función existe para cualquier valor real, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = \frac{1}{4 \cdot \infty \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

- Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2} = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1 - 4x^2)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = -8xe^{-2x^2} + (1 - 4x^2)(-4x)e^{-2x^2} = \\
 &= -8xe^{-2x^2} + (-4x + 16x^3)e^{-2x^2} = (-12x + 16x^3)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = 4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -2 \cdot (-2)e^{-1/2} > 0 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \cdot (-2)e^{-1/2} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para $x = \frac{-1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor positivo. La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$.

Para $x = \frac{1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor negativo. La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -0.5$ y $x = 0.5$.

- En el intervalo $(-\infty, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (1 - 4(-1)^2)e^{-2(-1)^2} = \frac{-3}{e^2} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -0.5)$.
- En el intervalo $(-0.5, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (1 - 4 \cdot 0^2)e^{-2 \cdot 0^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-0.5, 0.5)$.
- En el intervalo $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (1 - 4 \cdot 1^2)e^{-2 \cdot 1^2} = \frac{-3}{e^2} < 0$. La función decrece en $(0.5, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -0.5) \cup (0.5, +\infty)$ y crece en $(-0.5, 0.5)$.

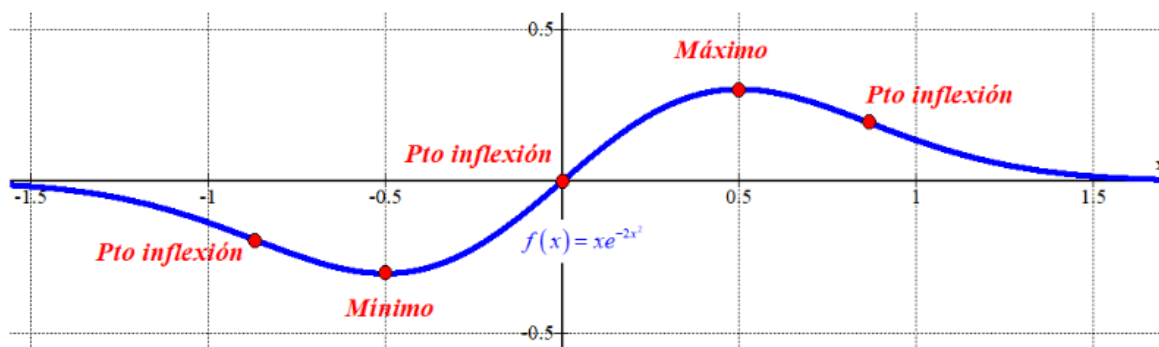
Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos de inflexión: $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función-

x	$f(x) = xe^{-2x^2}$
-1	$-e^{-2} \approx -0.13$
$-\sqrt{3}/2$	-0.19 Punto de inflexión
-1/2	-0.3 Mínimo
0	0 Punto de inflexión
1/2	0.3 Máximo
$\sqrt{3}/2$	0.19 Punto de inflexión
1	$e^{-2} \approx 0.13$



Solución 4.2:

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x - \sin x}{\sin x}\right)}{a^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{a^2 x^2 \sin x} = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \\
 &= \frac{2(0 - \sin 0)}{a^2 \cdot 0^2 \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\
 &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1 - \cos 0}{2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 0^2 \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
 &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x + x^2(-\sin x)} = \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \\
 &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(2 - x^2) \sin x + 4x \cos x} = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{2 \sin 0}{(2 - 0^2) \sin 0 + 4 \cdot 0 \cdot \cos 0} = \\
 &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
 &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + 4 \cos x + 4x(-\sin x)} = \\
 &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\cos 0}{-2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + (2 - 0^2) \cos 0 + 4 \cos 0 + 4 \cdot 0 \cdot (-\sin 0)} = \frac{2}{6a^2} = \boxed{\frac{1}{3a^2}}
 \end{aligned}$$

b) Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$ en el intervalo $[0,1]$. La función es continua en el intervalo $[0,1]$. La función tiene una expresión polinómica y es derivable en $(0,1)$.

Se cumple que $f(0) = 0^3(0-1)^2 + 1 = 1$ y $f(1) = 1^3(1-1)^2 + 1 = 1$, por lo que $f(0) = f(1)$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle y afirmar que existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

También podemos hacerlo calculando la inversa y encontrando sus raíces.

Encontramos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = x^3(x-1)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x-1)^2 + x^3 \cdot 2(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x-1)[3x^2(x-1) + 2x^3] = (x-1)[3x^3 - 3x^2 + 2x^3] = (x-1)[5x^3 - 3x^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(5x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 5x-3 = 0 \rightarrow 5x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{5} = 0.6 \in (0,1) \end{cases}$$

La derivada se anula para $x = \frac{3}{5} = 0.6$ que pertenece al intervalo $(0, 1)$.

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los tres primeros puntos de apoyo.

$$\left. \begin{array}{l} (3, 8, 17/2) \in \pi \\ (4, 6, 37/4) \in \pi \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, 8, 17/2) - (2, 8, 8) = (1, 0, 1/2) \\ \vec{v} = (4, 6, 37/4) - (2, 8, 8) = (2, -2, 5/4) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}' = 2\vec{u} = 2(1, 0, 1/2) = (2, 0, 1) \\ \vec{v}' = 4\vec{v} = 4(2, -2, 5/4) = (8, -8, 5) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-8 & z-8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 8y - 64 - 16z + 128 - 0 - 10y + 80 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 2y - 16z + 128 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0}$$

El plano que contiene el toldo tiene ecuación $\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0$.

b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el cuarto punto debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ (s, 16, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4s - 16 - 64 + 64 = 0 \Rightarrow 4s = 16 \Rightarrow \boxed{s = 4}$$

Para $s = 4$ los cuatro puntos de apoyo son coplanarios.

c) Hallamos la distancia del punto $(0, 0, 5)$ al plano π que contiene el toldo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ P(0, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 0 - 8 \cdot 5 + 64|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = 2.6666 \text{ metros}$$

Se cumple que el altavoz está a más de 2 metros de distancia del toldo y la instalación del altavoz en el punto $(0, 0, 5)$ es correcta.

Problema 5:

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$, con $s \in \mathbb{R}$.

- Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
- Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
- Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z - 1}{-2}$; y $s: \begin{cases} x = -2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
- Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

Solución:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ P_r(0, 3, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 3, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, 1) - (0, 3, 1) = (0, -3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 12 - 0 - 0 + 6 = -6 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y no coinciden en ningún punto).

- b) El plano paralelo a las dos rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ P \equiv (1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+4y-4+2z+2-2z+2-2y+2x-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x+2y+4z-1=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 3x+2y+4z-1=0$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

 UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
---	--	-------------------------------------

Problema 1:**Pregunta 1.**

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

- la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]
 - entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]
- (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Problema 2:**Pregunta 2.**

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

- Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]
- Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Problema 3:**Pregunta 3**

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

- Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

Problema 4:**PARTE B (preguntas 4 y 5.)****Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]

4.2 a) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Problema 5:**Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P = (0, 1, 1)$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r . [1 punto]
 b) Halla la distancia de P a la recta r . [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

- a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]
 b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

- la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]
 - entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]
- (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

- a) Sea X la variable aleatoria que nos ofrece la medición de cierto índice. $X = N(\mu, \sigma)$.

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 109 \\ Z = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = \frac{109 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 0.6\sigma = 109 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 88 \\ Z = -0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.8 = \frac{88 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -0.8\sigma = 88 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 88 + 0.8\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 109 - 0.6\sigma \\ \mu = 88 + 0.8\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 88 + 0.8\sigma = 109 - 0.6\sigma \Rightarrow 1.4\sigma = 21 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{21}{1.4} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6 \cdot 15 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 15.

- b) Nos piden hallar "a" tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8$.

$$P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 100}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{100 - a - 100}{15} \leq Z \leq \frac{100 + a - 100}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right] = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 1.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = 1.28 \Rightarrow \boxed{a = 1.28 \cdot 15 = 19.2}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El intervalo buscado es $(100 - 19.2, 100 + 19.2) = (80.8, 119.2)$.

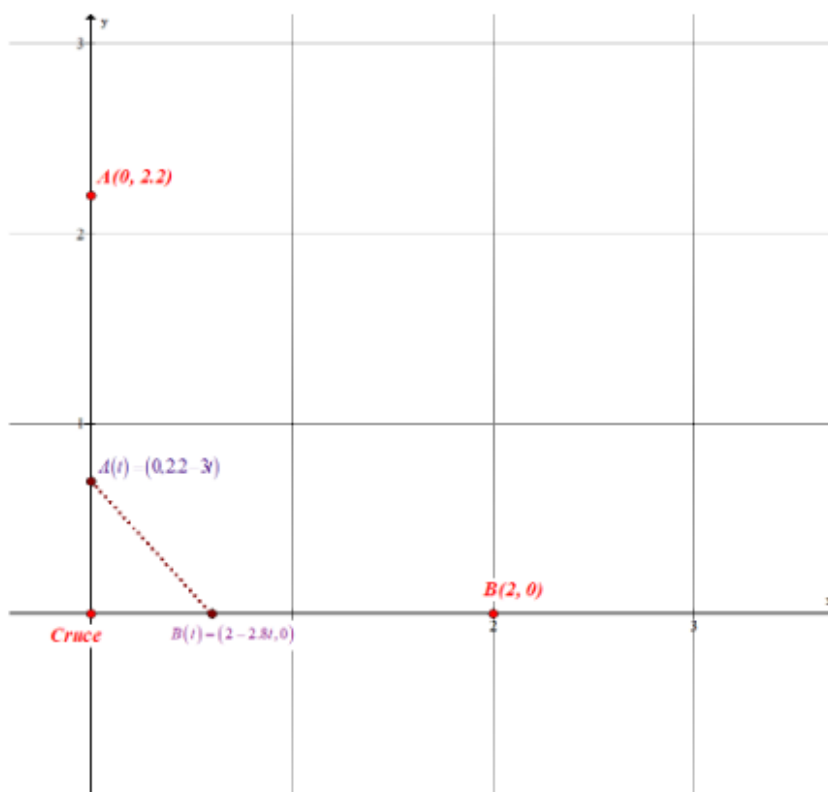
Problema 2:**Pregunta 2.****Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

- Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]
- Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Solución:

- Hacemos un dibujo de la situación planteada situándola en unos ejes de coordenadas donde el cruce de las calles está situado en el origen de coordenadas.



Desde la iglesia A la procesión avanza a razón de 3 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $A(t) = (0, 2.2 - 3t)$.

Desde la iglesia B la procesión avanza a razón de 2.8 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $B(t) = (2 - 2.8t, 0)$.

La distancia entre las dos procesiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos $2.2 - 3t$ y $2 - 2.8t$.

$$d(t) = \sqrt{(2.2 - 3t)^2 + (2 - 2.8t)^2} = \sqrt{4.84 + 9t^2 - 13.2t + 4 + 7.84t^2 - 11.2t}$$

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función distancia.

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84} \Rightarrow d'(t) = \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}}$$

$$d'(t) = 0 \Rightarrow \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}} = 0 \Rightarrow 33.68t - 24.4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33.68t = 24.4 \Rightarrow t = \frac{24.4}{33.68} \simeq 0.7245$$

La función presenta un punto crítico en $t = 0.7245$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $t = 0.7245$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$d'(0.5) = \frac{33.68 \cdot 0.5 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 0.5^2 - 24.4 \cdot 0.5 + 8.84}} = \frac{-7.56}{+} < 0. \text{ La función decrece antes de } t = 0.7245.$$

- Después de $t = 0.7245$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$d'(1) = \frac{33.68 \cdot 1 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 1^2 - 24.4 \cdot 1 + 8.84}} = \frac{9.28}{+} > 0. \text{ La función crece después de } t = 0.7245.$$

La función decrece antes y crece después de $t = 0.7245$. La función tiene un mínimo relativo en dicho valor.

La distancia entre las dos procesiones es mínima al cabo de 0.7245 horas, es decir, al cabo de aproximadamente 43 minutos y 28 segundos.

- b) Calculamos el valor de la función distancia para $t = 0.7245 \rightarrow d(0.7245)$.

$$d(0.7245) = \sqrt{16.84 \cdot 0.7245^2 - 24.4 \cdot 0.7245 + 8.84} \simeq 0.039$$

La distancia mínima entre las dos procesiones es de 39 metros.

Problema 3:**Pregunta 3****Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

- a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

- b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

Solución:

- a) Resolvemos el sistema asociado a la igualdad matricial dada.

$$\left. \begin{aligned} x_a &= 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \\ x_b &= 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \\ p_a &= 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b \\ p_b &= 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} p_a &= 2 + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \right) + \frac{1}{3} \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \right) \\ p_b &= 2 + \frac{1}{2} \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \right) + \frac{1}{4} \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 3p_a &= 6 + 3 \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \right) + \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \right) \\ 4p_b &= 8 + 2 \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \right) + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 3p_a &= 6+51-6p_b+1.5p_b+20-3p_b+0.5p_a \\ 4p_b &= 8+40-6p_b+p_a+17-2p_a+0.5p_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8.5p_a &= 77-1.5p_b \\ 9.5p_b &= 65-p_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 8.5p_a &= 77-1.5p_b \\ p_a &= 65-9.5p_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8.5(65-9.5p_b) = 77-1.5p_b \Rightarrow \frac{1105}{2} - \frac{323}{4}p_b = 77-1.5p_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2210 - 323p_b = 308 - 6p_b \Rightarrow 1902 = 317p_b \Rightarrow \boxed{p_b = \frac{1902}{317} = 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a = 65 - 9.5 \cdot 6 = 8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_a = 17 - 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4} \\ \boxed{x_b = 20 - 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 6} \end{cases}$$

La solución es $x_a = 4$; $x_b = 6$; $p_a = 8$; $p_b = 6$.

b) Obtenemos la expresión de $(X'X)^{-1}$.

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 & 1+2+1+3 \\ 1+2+1+3 & 1+4+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 60 - 49 = 11 \neq 0$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{\text{Adj}((X'X)')}{|X'X|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}}{11} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz A.

$$A = I_4 - X(X'X)^{-1}X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15-7 & -7+4 \\ 15-14 & -7+8 \\ 15-7 & -7+4 \\ 15-21 & -7+12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \\ 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ 1+1 & 1+2 & 1+1 & 1+3 \\ 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ -6+5 & -6+10 & -6+5 & -6+15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz queda $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comprobamos que la matriz A es idempotente: $A^2 = A$.

$$A^2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 36+4+25+1 & -12-16+10-4 & -30+4-30+1 & 6+8-5+2 \\ -12-16+10-4 & 4+64+4+16 & 10-16-12-4 & -2-32-2-8 \\ -30+4-30+1 & 10-16-12-4 & 25+4+36+1 & -5+8+6+2 \\ 6+8-5+2 & -2-32-2-8 & -5+8+6+2 & 1+16+1+4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 66 & -22 & -55 & 11 \\ -22 & 88 & -22 & -44 \\ -55 & -22 & 66 & 11 \\ 11 & -44 & 11 & 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \cdot 11 \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A
 \end{aligned}$$

Problema 4:**PARTE B (preguntas 4 y 5.)****Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]

4.2 a) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes

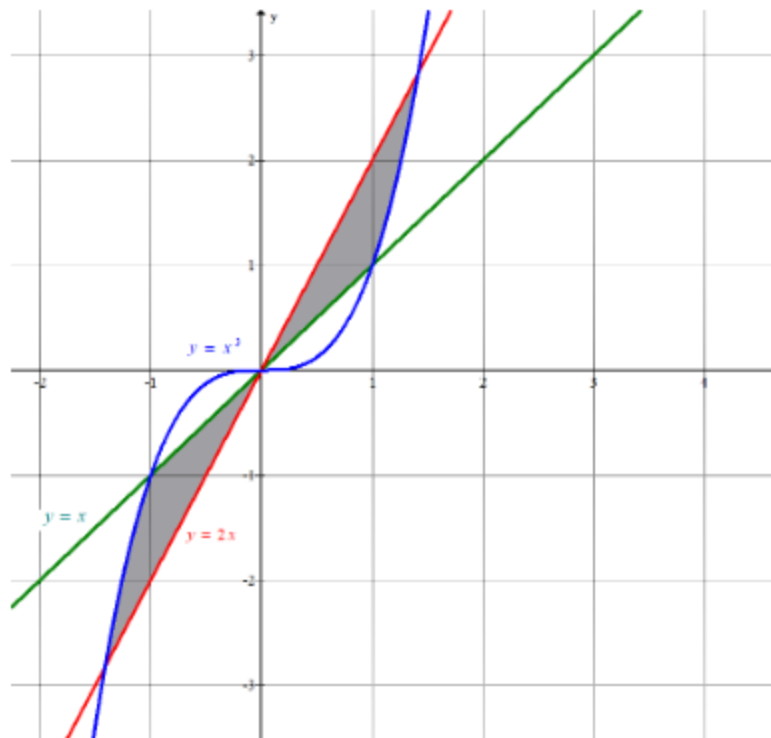
horizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución 4.1:

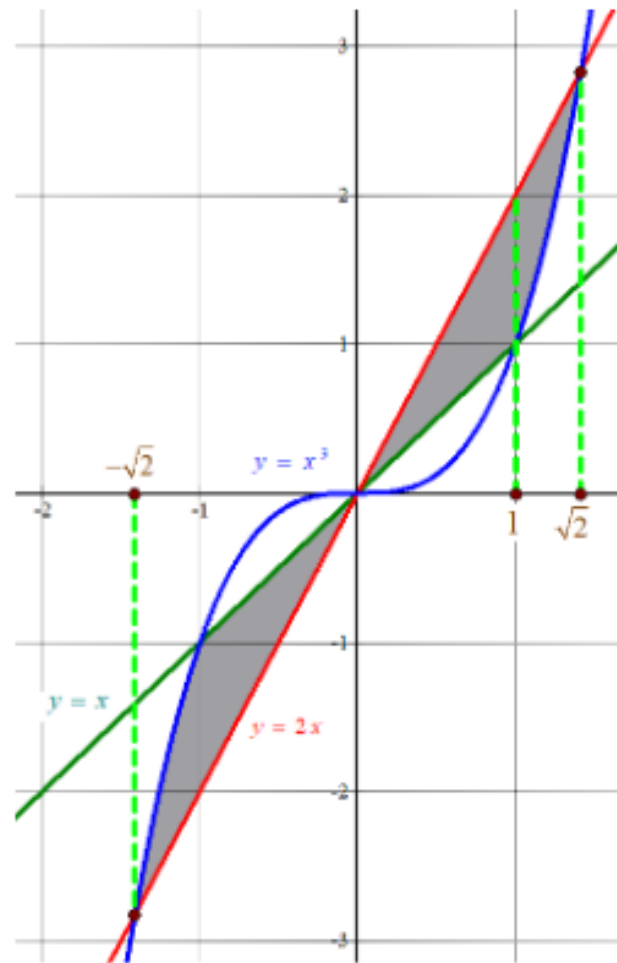
Dibujamos las gráficas de las dos rectas y la curva para establecer la figura de la cual queremos hallar su área.



Hallamos los puntos de corte entre las gráficas.

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



El área de la región delimitada por las tres gráficas es simétrica. Será el doble del área de la región situada en el primer cuadrante. Calculamos esta área como la suma de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la recta $y = 2x$ e $y = x$ y la integral definida entre 1 y $\sqrt{2}$ de la diferencia entre la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^3$.

$$\int_0^1 2x - x \, dx = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x - x^3 \, dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = \left[(\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \right] - \left[1^2 - \frac{1^4}{4} \right] = 2 - \frac{4}{4} - 1 + \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} \right]$$

El área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$ vale:

$$\text{Área} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ unidades cuadradas}$$

Solución 4.2:

- a) Para que una recta tangente a la curva en $x = a$ sea horizontal su pendiente debe ser 0, por lo que debe ser $f'(a) = 0$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

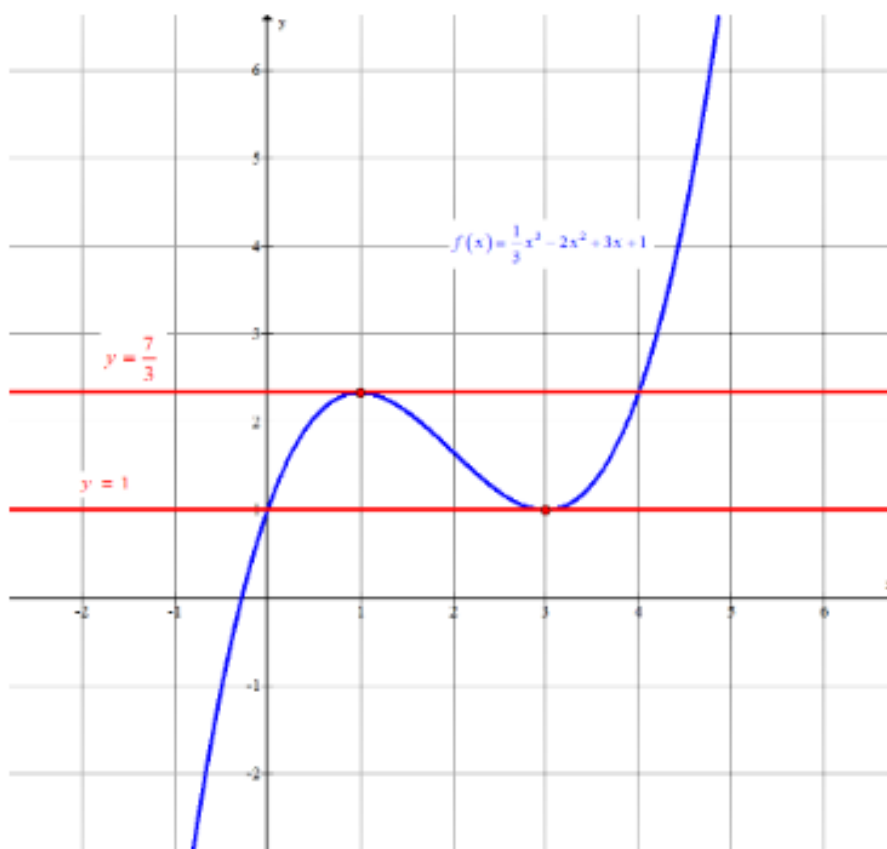
La recta tangente a la curva en $x=1$ es horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3} \\ f'(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = 0(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x=3$ es horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1 \\ f'(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \\ y - f(3) = f'(3)(x-3) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 0(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Las dos rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f son: $y = \frac{7}{3}$ e $y = 1$.



b) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = e^{ax+b}$, que es una exponencial y por tanto continua.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = e - ax + 1$, que es una función lineal y por tanto continua.

Averiguamos cuando es continua la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{ax+b} = e^{a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e - ax + 1 = e - a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = e^{a+b} = e - a + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = e^{a+b} \rightarrow a+b=1 \\ e - a + 1 = e \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow 1+b=1 \Rightarrow b=0$$

La función es continua para $a=1$ y $b=0$.

Problema 5:**Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)****5.1** Contesta justificadamente los siguientes apartados:Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P = (0, 1, 1)$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r. [1 punto]
 b) Halla la distancia de P a la recta r. [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

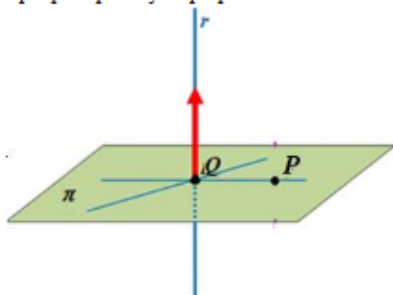
- a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]
 b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

Solución 5.1:a) El plano π perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 + 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + y - z = 0}$$

El plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación $\pi: 3x + y - z = 0$ b) Hemos hallado el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta $r: \pi: 3x + y - z = 0$.Hallamos el punto Q de corte del plano con la recta r .

$$r: \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ A_r(0, 0, 11) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z = 0 \\ \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(3\lambda) + \lambda - (11 - \lambda) = 0 \Rightarrow 9\lambda + \lambda - 11 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot 1 = 3 \\ y = 1 \\ z = 11 - 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3, 1, 10)}$$

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector que une los puntos P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q(3,1,10) \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3,1,10) - (0,1,1) = (3,0,9)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{90} = \boxed{3\sqrt{10} \approx 9.49 \text{ u}}$$

La distancia del punto P a la recta r vale $3\sqrt{10} \approx 9.49$ unidades.

Solución 5.2:

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{pmatrix}$ y

como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + (a-1)^2 - 1 + a - 1 - a + 1 = (a-1)^2 - 1 =$$

$$= a^2 - 2a + 1 - 1 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

Los rangos de A y A/B son iguales a 2, menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $\alpha = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

- a) Para cualquier valor de α distinto de 0 y 2 el sistema planteado tiene una única solución que es el punto de corte de los tres planos.

Determinamos las coordenadas del punto de corte de los tres planos para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$ usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+0+a^2-a-0+a-a+1}{a(a-2)} = \frac{a^2-a}{a(a-2)} = \frac{a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-a+1+0-a+a-1+0}{a(a-2)} = \frac{-a}{a(a-2)} = \frac{-1}{a-2} = \frac{1}{2-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0+a+(a-1)^2-1-0-a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a+a^2-2a+1-1-a^2+a}{a(a-2)} = \frac{0}{a(a-2)} = 0$$

La solución es $x = \frac{a-1}{a-2}$, $y = \frac{1}{2-a}$ y $z = 0$. El punto de corte de los tres planos tiene coordenadas $\left(\frac{a-1}{a-2}, \frac{1}{2-a}, 0\right)$.

- b) Los planos se cortan en una recta para $a = 0$. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los planos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \ 1 \ 1 \ 1}^{A/B} \\ 0 \ 2 \ 2 \ 1 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+2z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=\frac{1}{2}-z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} - z + z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

La recta intersección de los tres planos tiene ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.