

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2026

Comunidad autónoma de

MADRID



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Álvaro Garmendia Antolín



RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
--	--	---

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Problema 1:

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Problema 2:

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Problema 3:

Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 - Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 4:

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

- (1 punto) $P(A)$ y $P(A \cap B)$.
- (1 punto) $P((A \cap B)|(A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 5:

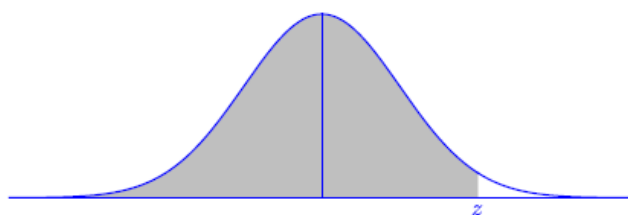
Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
- (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

- La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 y su rango puede ser 3, 2 o 1. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda - 2)(\lambda - 1) + 0 - \lambda - 0 - 0 =$$

$$= 1 + \lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3 = \lambda} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1 = \lambda} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de A es 3.

CASO 2. $\lambda = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Conclusión: Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$ el rango de A es 3 y para $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ el rango es 2.

b) Para $\lambda = 2$ sabemos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto la matriz A tiene inversa. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 - AX = I \Rightarrow A^2 - I = AX \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A - A^{-1} \cdot I = A^{-1}AX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \cdot A - A^{-1} = I \cdot X \Rightarrow \boxed{A - A^{-1} = X}$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 & 2 \\ 0 & 1 & 2-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

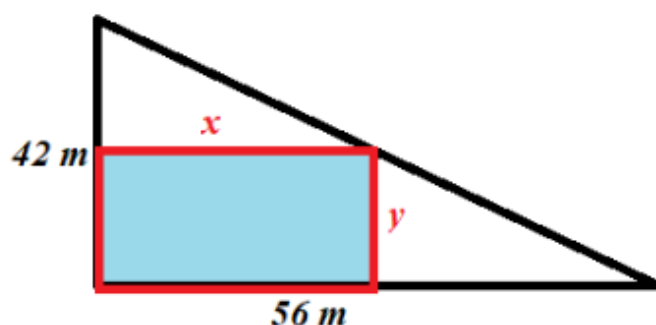
Problema 2:

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Solución:

Dibujamos la situación planteada.



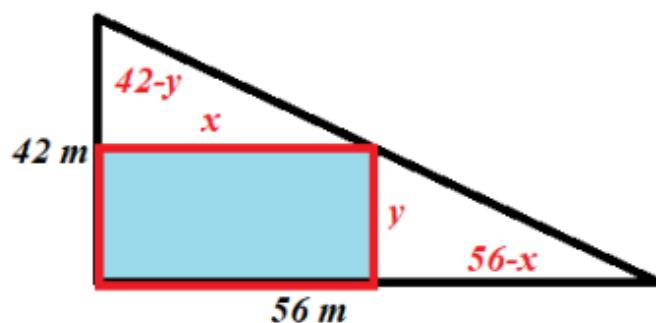
El área del rectángulo techado es $x \cdot y$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $30x \cdot y$ euros.

El resto tiene un área de $\frac{42 \cdot 56}{2} - xy = 1176 - xy$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es

$50 \cdot 1176 - 50xy = 58800 - 50xy$ euros.

El coste total del alicatado es $C(x, y) = 30xy + 58800 - 50xy = 58800 - 20xy$ euros.

Buscamos la relación entre x e y . Los triángulos rectángulos pequeños son semejantes.



Se cumple que los catetos tienen longitudes proporcionales.

$$\frac{42-y}{y} = \frac{x}{56-x} \Rightarrow (42-y)(56-x) = xy \Rightarrow 2352 - 56y + \cancel{xy} - 42x = \cancel{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -56y = 42x - 2352 \Rightarrow y = \frac{2352}{56} - \frac{42}{56}x \Rightarrow y = 42 - \frac{3}{4}x$$

Obtenemos la expresión del coste total del alicatado del jardín.

$$\left. \begin{array}{l} y = 42 - \frac{3}{4}x \\ C(x, y) = 58800 - 20xy \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 58800 - 20x \left(42 - \frac{3}{4}x \right) = 58800 - 840x + 15x^2$$

El coste del alicatado es $C(x) = 15x^2 - 840x + 58800$ euros.

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$C(x) = 15x^2 - 840x + 58800 \Rightarrow C'(x) = 30x - 840$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 30x - 840 = 0 \Rightarrow 30x = 840 \Rightarrow x = \frac{840}{30} = 28$$

Sustituimos $x = 28$ en la segunda derivada.

$$C'(x) = 30x - 840 \Rightarrow C''(x) = 30 \Rightarrow C''(28) = 30 > 0$$

Para $x = 28$ se anula la primera derivada y la segunda derivada es positiva, por lo que la función presenta un valor mínimo para $x = 28$.

Para este valor el otro lado de la zona techada vale $y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$.

Las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo son 28 metros en el lado largo y 21 en el lado corto, es decir, a la mitad de cada lado.

Problema 3:

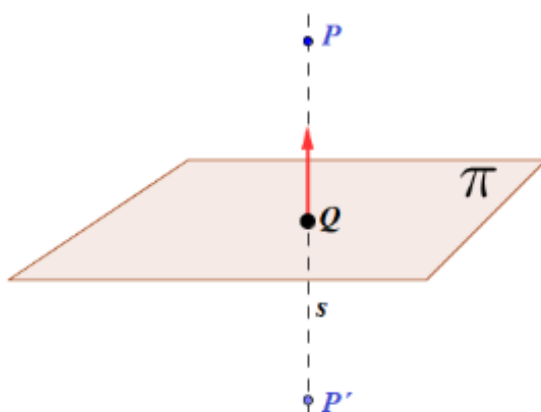
Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
 b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Solución:

- a) Hallamos el punto simétrico P' del punto P respecto del plano determinando primero la recta s perpendicular al plano que pasa por P .



$$\pi : 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 0, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : 2x + 2y - z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2 + 2\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - (-\lambda) = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 13 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ y = 2 \cdot 1 = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(4, 2, -1)}$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (2, 2, -1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) + (2, 2, -1) = (6, 4, -2)$$

El punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π tiene coordenadas $P'(6, 4, -2)$.

b1) Determinamos la posición relativa de la recta r y el plano π .

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 4)$$

$$\pi: 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta podemos afirmar que la recta es paralela o está contenida en el plano.

La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow P_r(2, 0, 0) \\ \pi: 2x + 2y - z - 13 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \boxed{3u}$$

La distancia tiene un valor de 3 unidades.

b2) El plano π' que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano. También contiene al punto $P_r(2, 0, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 1, 4) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x-2) + 8y + 2z - 2z + y - 8(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 + 8y + 2z - 2z + y - 8x + 16 = 0 \Rightarrow -9x + 9y + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi': x - y - 2 = 0$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 4:

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

- (1 punto) $P(A)$ y $P(A \cap B)$.
- (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

Solución 4.1:

a) $X =$ Duración en horas de una batería. $X = N(24, 3)$.

La batería es defectuosa si $X < 21$. Nos piden calcular $P(X < 21)$.

$$P(X < 21) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 24}{3} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

z	0.00	0
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0
0.5	0.6915	0
0.6	0.7257	0
0.7	0.7580	0
0.8	0.7881	0
0.9	0.8159	0
1.0	0.8413	0
1.1	0.8643	0

La probabilidad de que una batería sea defectuosa es de 0.1587.

- b) La probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa vale $1 - 0.1587 = 0.8413$. Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de teléfonos con la batería no defectuosa de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n =$ número de repeticiones $= 10$ y $p =$ probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa $= 0.8413$. $Y = B(10, 0.8413)$. Nos piden calcular $P(Y \geq 9)$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 9) &= P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{10}{9} 0.8413^9 \cdot 0.1587^1 + \binom{10}{10} 0.8413^{10} \cdot 0.1587^0 = \\ &= 10 \cdot 0.8413^9 \cdot 0.1587 + 0.8413^{10} = \boxed{0.5127} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa tiene un valor de 0.5127.

Solución 4.2:

a) Obtenemos las probabilidades pedidas.

$$P(B|A) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A)$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0.4 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

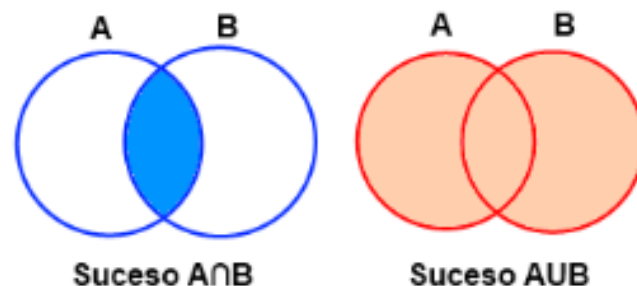
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(B) = 0.4 \\ P(A \cup B) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = P(A) + 0.4 - 0.2 \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot P(A) = 0.6 - 0.4 = 0.2 \Rightarrow P(A) = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow \begin{cases} P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.75 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) = 0.05 \end{cases}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.05}{0.6} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

Hemos utilizado que $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$ y por tanto $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$



Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Problema 5:

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
 b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución 5.1:

Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

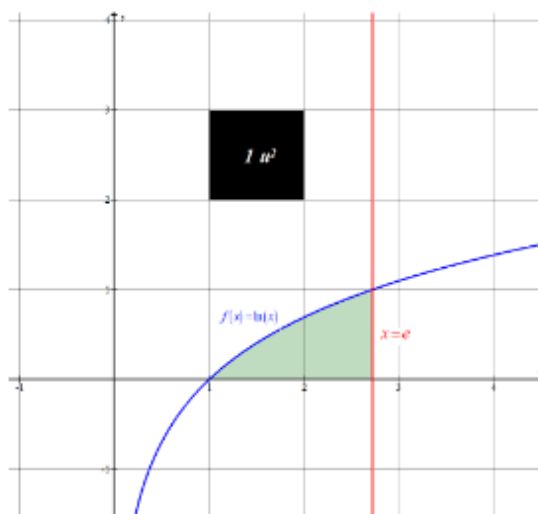
El área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$ es el valor de la integral definida de 1 a e de $f(x) = \ln(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = \dots$$

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + K$$

$$\dots = [x \ln(x) - x]_1^e = [e \cdot \ln(e) - e] - [1 \cdot \ln(1) - 1] = e \cdot 1 - e - 1 \cdot 0 + 1 = \boxed{1 \text{ u}^2}$$

Dibujamos la región del plano de la que hemos hallado el área.



Solución 5.2:

a) Para que la función sea continua deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{2e^0}{1+0^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^x}{1+x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b = 3 \cdot 0^2 - \operatorname{sen}(a \cdot 0) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=2}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Esta función es derivable en

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ siendo su derivada } f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(1+x^2) - 2x \cdot 2e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x - a \cdot \cos(ax) = 6 \cdot 0 - a \cdot \cos(a \cdot 0) = -a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^0(1-2 \cdot 0 + 0^2)}{(1+0^2)^2} = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Los valores buscados son $a=-2$ y $b=2$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2}{5}e^2 \\ f'(2) &= \frac{2e^2(1-2 \cdot 2 + 2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{2e^2}{25} \\ y - f(2) &= f'(2)(x-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} \Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{2}{5}e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{10e^2}{25} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación

$$y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Problema 2:

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX , respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.

Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Problema 3:

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
- b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.
- b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Problema 4:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .
- b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

- a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Problema 5:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - a) \sin(3x) dx = \frac{2\pi}{9}.$$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Solución:

- El $100 - 75 = 25$ % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan tarde por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

El 15% de los alumnos viven fuera de la localidad y el $100 - 75 = 25\%$ de ellos llegan tarde, es decir, el $0.15 \cdot 0.25 = 0.0375 = 3.75$ % del total.

El 85% de los alumnos viven en la misma localidad y el 5% de ellos llegan tarde, es decir, el $0.05 \cdot 0.85 = 0.0425 = 4.25$ % del total.

El porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora es $3.75 + 4.25 = 8\%$.

- Llamamos L al suceso “el alumno vive en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo” y T a “el alumno llega tarde a clase por la mañana”.

Por los datos proporcionados sabemos que $P(L) = 0.85$; $P(\bar{L}) = 1 - 0.85$; $P(\bar{T} | \bar{L}) = 0.75$ y por lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $P(T) = 0.08$.

Nos piden calcular $P(\bar{L} | \bar{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L} | \bar{T}) = \frac{P(\bar{L} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{L})P(\bar{T} | \bar{L})}{1 - P(T)} = \frac{(1 - 0.85) \cdot 0.75}{1 - 0.08} = \frac{45}{368} \approx 0.1223$$

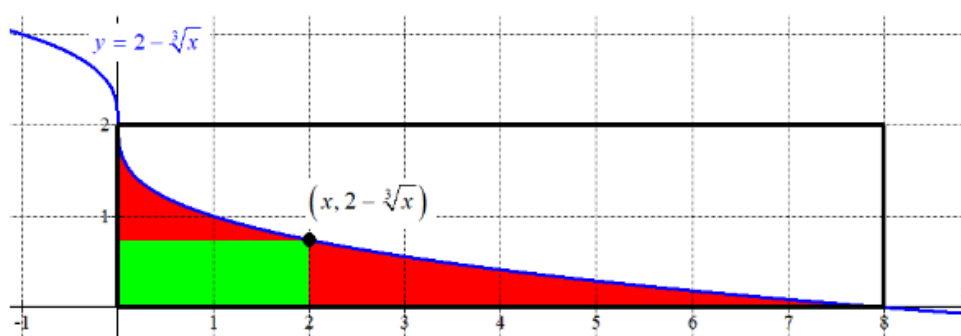
La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana tiene un valor de $\frac{45}{368} \approx 0.1223$.

Problema 2:

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX , respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo. Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Solución:

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Para que el área roja sea lo menor posible el rectángulo verde debe tener la mayor área posible. Hallamos la expresión del área del rectángulo de base x y altura $2 - \sqrt[3]{x}$.

$$A(x) = x(2 - \sqrt[3]{x}) = 2x - x \cdot x^{1/3} = 2x - x^{4/3}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = 2x - x^{4/3} \Rightarrow A'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{4/3-1} = 2 - \frac{4x^{1/3}}{3} = \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3} = 0 \Rightarrow 6 - 4\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow 6 = 4\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

La función presenta un punto crítico en $x = \frac{27}{8}$. Averiguamos el signo de la segunda derivada en dicho valor.

$$A'(x) = \frac{6 - 4x^{1/3}}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{3}x^{1/3-1}}{3} = \frac{-4}{9}x^{-2/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow A''\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}} < 0$$

Para $x = \frac{27}{8}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función tiene un máximo

relativo para $x = \frac{27}{8}$. El área roja es la menor posible para $x = \frac{27}{8}$.

El área del rectángulo que es la bandera tiene un valor de $8 \cdot 2 = 16$ unidades cuadradas.

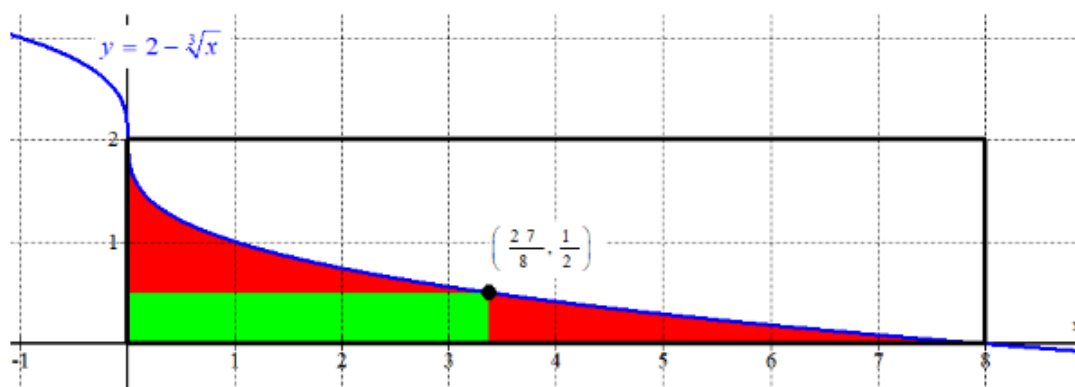
El área del trozo de bandera situada por debajo de la gráfica de $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ es el valor de la integral definida de la función de 0 a 8.

$$\int_0^8 2 - x^{1/3} dx = \left[2x - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1+1/3} \right]_0^8 = \left[2x - \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^8 = \left[2 \cdot 8 - \frac{3}{4} 8^{4/3} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{3}{4} 0^{4/3} \right] = 16 - 12 = 4$$

El área de color blanco vale $16 - 4 = 12$ unidades cuadradas.

El área del rectángulo verde es $A\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8} \left(2 - \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \right) = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} = 1.6875 \text{ u}^2$.

El área de la región de color rojo vale $4 - 1.6875 = 2.3125$ unidades cuadradas.



Problema 3:**Pregunta 3.** Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
- b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.
- b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Solución:a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz $A + I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + I)^T}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{2}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \quad \cdot \quad 3 \times 2 \quad \longrightarrow \quad 3 \times 2$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b1) Calculamos primero el determinante de la matriz C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el valor del determinante de $(2C)^{100}$.

$$\begin{aligned} |(2C)^{100}| &= |2C|^{100} = \left\{ \begin{array}{l} C \text{ es una matriz cuadrada de orden } 3 \\ |2C| = 2^3 |C| \end{array} \right\} = (2^3 |C|)^{100} = \\ &= \{ \text{Sabemos que } |C| = 1 \} = (2^3 \cdot 1)^{100} = \boxed{2^{300}} \end{aligned}$$

El determinante vale 2^{300} .

b2) Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

La matriz A tiene determinante no nulo y es invertible.
Obtenemos la expresión de la matriz AB.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0-2 \\ 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+2-1 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\quad 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2 \end{aligned}$$

Esta matriz no es cuadrada y por tanto no tiene matriz inversa.

Problema 4:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

- (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .
- (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

- (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Solución 4.1:

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} P_1(1, 1, 0) \\ \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0) \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{0}{0}$$

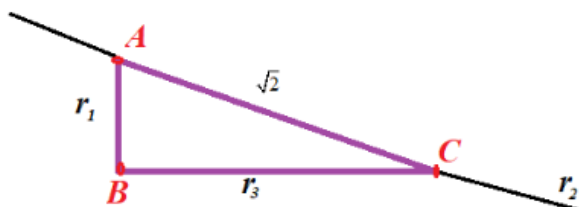
Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1, 1, 0) \\ Q_2(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r_1 y r_2 se cortan.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos el vértice A del triángulo rectángulo. Este punto es la intersección de las rectas r_1 y r_2 .

$$\begin{aligned}
 r_1 &\equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \\
 r_2 &\equiv \begin{cases} x=1+s \\ y=s \\ z=0 \end{cases}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} 1+t=1+s \\ 1=s \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow s=t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,1,0)}$$

El punto B pertenece a la recta r_1 y sus coordenadas son $B(1+t,1,0)$.

El punto C pertenece a la recta r_2 y sus coordenadas son $C(1+s,s,0)$.

Para que el triángulo ABC sea rectángulo el vector $\overrightarrow{BC}$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{BA}$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= (1+s,s,0) - (1+t,1,0) = (s-t,s-1,0) \\ \overrightarrow{BA} &= (2,1,0) - (1+t,1,0) = (1-t,0,0) \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (s-t,s-1,0) \cdot (1-t,0,0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-t)(1-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s-t=0 \rightarrow \boxed{s=t} \\ 1-t=0 \rightarrow \boxed{t=1} \end{cases}$$

Tenemos dos opciones para formar un triángulo rectángulo. Averiguamos cuando se cumple que la hipotenusa tenga longitud $\sqrt{2}$.

$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+1,1,0) = (2,1,0) \Rightarrow A=B \\ C(1+s,s,0) \end{cases}$$

Para $t=1$ los puntos A y B son el mismo y no existe el triángulo ABC.

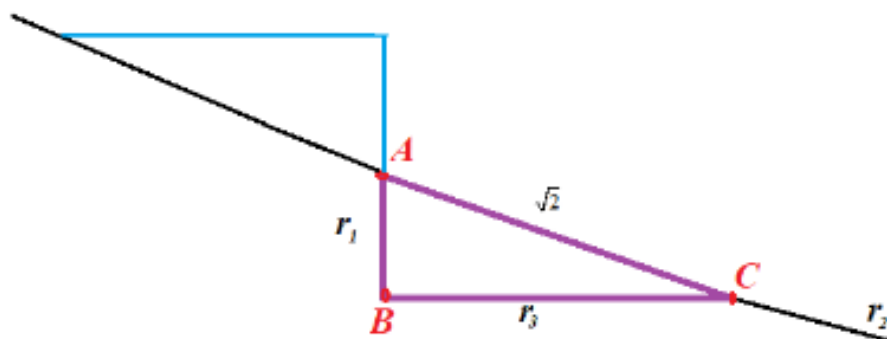
Para $t=s$ hallamos la longitud de los catetos.

$$\begin{aligned}
 t=s &\Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+s,1,0) \\ C(1+s,s,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1+s,1,0) - (2,1,0) = (s-1,0,0) \\ \overrightarrow{BC} = (1+s,s,0) - (1+s,1,0) = (0,s-1,0) \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(s-1)^2 + 0^2 + 0^2} = |s-1| \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (s-1)^2 + 0^2} = |s-1| \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left. \begin{array}{l} |\overline{AB}| = |s-1| \\ |\overline{BC}| = |s-1| \\ |\overline{AC}| = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = |s-1|^2 + |s-1|^2 \Rightarrow 2|s-1|^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |s-1|^2 = 1 \Rightarrow |s-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} s-1=1 \rightarrow s=2 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(3,1,0) \\ C(3,2,0) \end{cases} \\ s-1=-1 \rightarrow s=0 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1,1,0) \\ C(1,0,0) \end{cases} \end{cases}$$



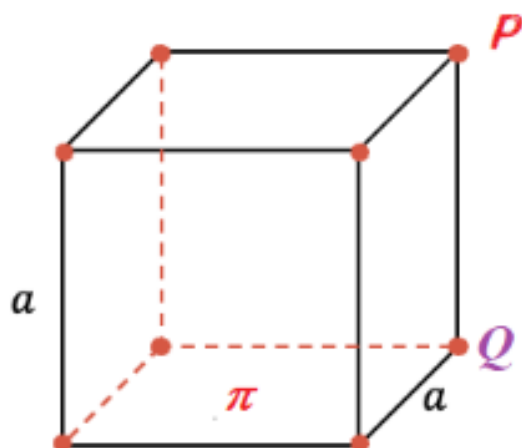
Existen dos soluciones posibles. Hallamos la recta r_3 que contiene los puntos B y C.

$$\left. \begin{array}{l} B(3,1,0) \in r_3 \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overline{v_3} = \overline{BC} = (3,2,0) - (3,1,0) = (0,1,0) \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 : \begin{cases} x=3 \\ y=2+\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,0) \in s_3 \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overline{w_3} = \overline{BC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow s_3 : \begin{cases} x=1 \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

Las rectas solución del problema son $r_3 : \begin{cases} x=3 \\ y=2+\lambda \\ z=0 \end{cases}$ y $s_3 : \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$.

Solución 4.2:



- a) La longitud del lado del cubo es la distancia del punto P al plano $\pi: 2x - 2y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow a = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \text{ u}$$

La longitud el lado del cubo es $\frac{2}{3}$ unidades.

El volumen del cubo es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ unidades cúbicas.

- b) Hallamos el vértice del cubo que es la proyección ortogonal del punto P en el plano. Para ello primero hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -2, 1) \\ P(1, 2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto Q que buscamos es el punto de corte de la recta r y el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \pi: 2x - 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{2}{9} = \frac{13}{9} \\ y = 2 - 2\frac{2}{9} = \frac{14}{9} \\ z = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)}$$

Otro vértice del cubo es el punto $Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

Problema 5:

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - a) \sin(3x) dx = \frac{2\pi}{9}.$$

Solución: 5.1:

Para que exista el logaritmo neperiano debe ser $x > 0$. Además, el denominador no se debe anular, por lo que $x \neq 1$. El dominio de la función es $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

Obtenemos la expresión de la derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

Tenemos un punto crítico en $x = e$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=1$ y $x=e$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = \frac{\ln(0.1) - 1}{(\ln(0.1))^2} = -0.6 < 0$

. La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,e)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{\ln(2) - 1}{(\ln(2))^2} = -0.6 < 0$. La

función decrece en $(1,e)$.

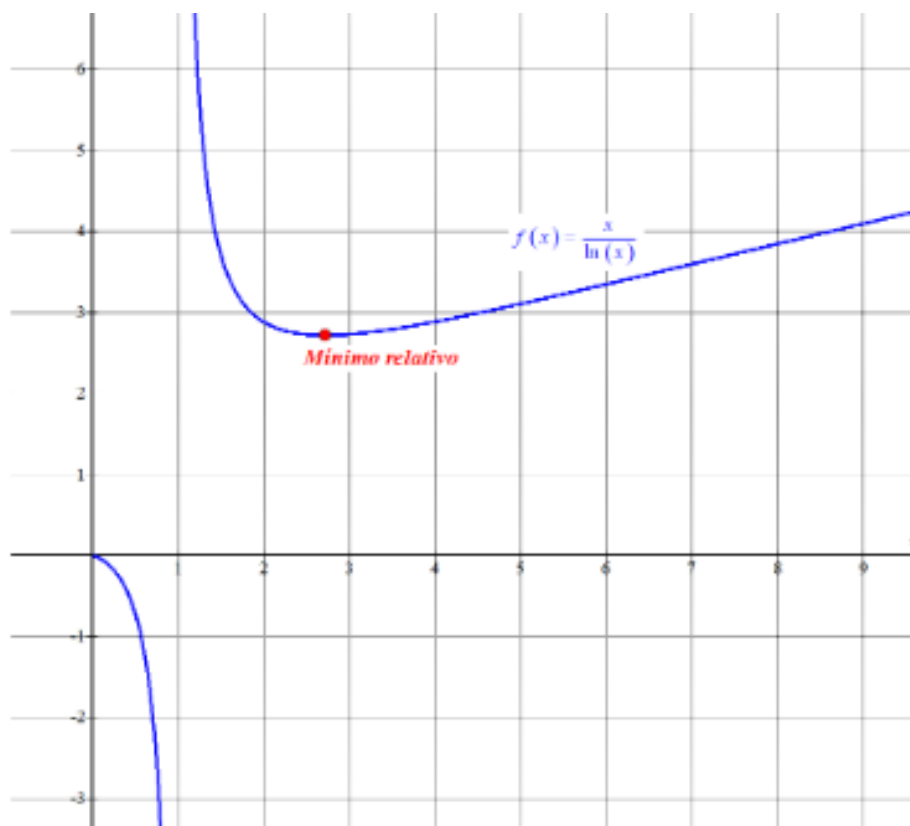
- En el intervalo $(e,+\infty)$ tomamos $x=e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{\ln(e^2) - 1}{(\ln(e^2))^2} = \frac{1}{4} > 0$.

La función crece en $(e,+\infty)$.

La función decrece en $(0,1) \cup (1,e)$ y crece en $(e,+\infty)$.

Como la función decrece antes de $x=e$ y crece después podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x=e$.

Tenemos que $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$, por lo que las coordenadas del mínimo relativo son (e,e)



Solución 5.2:

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-a \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(3x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) \end{array} \right\} = \\ &= (x-a) \frac{-\cos(3x)}{3} - \int \frac{-\cos(3x)}{3} dx = \frac{-(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = \\ &= \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} = \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} + K \end{aligned}$$

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left[\frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \left[\frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{3} \right] - \left[\frac{(a-0)\cos(3 \cdot 0) + \operatorname{sen}(3 \cdot 0)}{3} \right] = \\ &= \frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)}{3} - \frac{a\cos(0) + \operatorname{sen}(0)}{3} = \frac{-\left(a - \frac{\pi}{3}\right) + 0}{3} - \frac{a + 0}{3} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} - a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a}{9} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a - 3a}{9} = \boxed{\frac{\pi - 6a}{9}} \end{aligned}$$

Utilizamos el resultado obtenido para resolver la igualdad.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \frac{\pi - 6a}{9} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \pi - 6a = 2\pi \Rightarrow -6a = \pi \Rightarrow \boxed{a = \frac{-\pi}{6}}$$

El valor que cumple la igualdad es $a = \frac{-\pi}{6}$.