

# MATEMÁTICAS II

## Selectividad 2026

### Comunidad autónoma de

# NAVARRA



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)

**Autores: Antonio Menguiano y Juan Antonio Martínez García**



## RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                            |                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)</b><br><b>FASE GENERAL</b><br><b>CURSO: 2026</b><br><b>MATERIA: MATEMÁTICAS II</b> | <b>CONVOCATORIA:</b><br><b>ORDINARIA DE</b><br><b>JUNIO</b> |
| <b>INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</b><br>En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..<br><b>Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.</b><br><b>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.</b>                                                                                                                           |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 1:</b><br><br><b>P1)</b> Dada una hoja de papel de dimensiones $20\text{cm} \times 30\text{cm}$ , calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 2:</b><br><br><b>P2)</b> Calcula los valores posibles de $r$ y $t$ para que $ A  +  B  = 4$ , sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                   |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 3:</b><br><br><b>P3)</b> Encuentra la ecuación continua de la recta $t$ que corta perpendicularmente a las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{y} \quad s = \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$                                                                                                                                 |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 4.1:</b><br><br><b>P4.1)</b> En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar: <ul style="list-style-type: none"> <li>(i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?</li> <li>(ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?</li> <li>(iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?</li> </ul> |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 4.2:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                            |                                                             |

**P4.2)** Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como *el Tributo de las Tres Vacas* o *Iror Beien Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

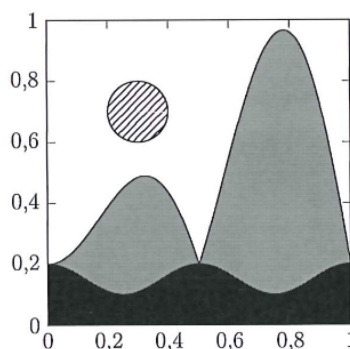
- (i) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?
- (ii) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?
- (iii) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

### Problema 5.1:

**P5.1)** El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0,15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x); \quad (x-0,3)^2 + (y-0,7)^2 = \frac{1}{100}; \quad y = 0,2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?



### Problema 5.2:

**P5.2)** Sea  $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$ . Demuestra que existe un punto  $c$  en  $[2, 4]$  tal que  $f'(c) = \frac{1}{2}$ .

## RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

### Problema 1:

**P1)** Dada una hoja de papel de dimensiones  $20\text{cm} \times 30\text{cm}$ , calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.

### Solución:

$$V(x) = x \cdot (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) = 4x \cdot (10 - x) \cdot (15 - x) = \\ = 4x \cdot (150 - 10x - 15x + x^2) \Rightarrow V(x) = 4 \cdot (x^3 - 25x^2 + 150x).$$

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$V'(x) = 4 \cdot (3x^2 - 50x + 150).$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (3x^2 - 50x + 150) = 0; \quad 3x^2 - 50x + 150 = 0;$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 1.800}}{6} = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{6} = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{6} = \frac{25 \pm 5\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \\ \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}(5 - \sqrt{7}) \cong 3,92 \\ x_2 = \frac{5}{3}(5 + \sqrt{7}) \cong 12,74 \end{cases}.$$

Nótese que la solución  $x_2 = \frac{5}{3}(5 + \sqrt{7})$  no es posible materialmente.

La solución es  $x = \frac{5}{3}(5 - \sqrt{7})$ .

Se comprueba la condición de máximo a continuación:

$$V''(x) = 4 \cdot (6x - 50) = 8 \cdot (3x - 25).$$

$$V'' \left[ \frac{5}{3} (5 - \sqrt{7}) \right] = 8 \cdot \left[ 3 \cdot \frac{5}{3} (5 - \sqrt{7}) - 25 \right] = 8 \cdot (25 - 5\sqrt{7} - 25) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'' \left[ \frac{5}{3} (5 - \sqrt{7}) \right] = -40\sqrt{7} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo, c. q. c.}}$$

Volumen máximo cortando un  $\frac{5}{3} (5 - \sqrt{7})$  cm  $\cong 3,92$  cm de cada esqui

**Problema 2:**

P2) Calcula los valores posibles de  $r$  y  $t$  para que  $|A| + |B| = 4$ , sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & t+3 & t-3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= t \cdot [5(t+3) - t + 2(t-3) - 2(t+3) + (t-3) - 5t] =$$

$$= t \cdot [3(t+3) - 6t + 3(t-3)] = 3t \cdot [(t+3) - 2t + (t-3)] =$$

$$= 3t \cdot (t+3 - 2t + t - 3) = 3t \cdot 0 = 0 \Rightarrow |A| = 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot [-3(r+1) + 6r + r + 3r - (r+1) - 6r] = r \cdot [-4(r+1) + 4r] =$$

**Problema 3:**

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta  $t$  que corta perpendicularmente a las rectas  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in R.$

**Solución:**

Un punto y un vector director de la recta  $r$  son  $A(0, -3, 2)$  y  $\vec{v}_r = (1, 1, -2)$ .

Un punto y un vector director de la recta  $s$  son  $B(-4, 1, -1)$  y  $\vec{v}_s = (3, 1, 2)$ .

Los vectores  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas  $r$  y  $s$  se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector  $\vec{w}$  que tiene como origen el punto  $A \in r$  y extremo el punto  $B \in s$ :  $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-4, 1, -1) - (0, -3, 2)] = (-4, 4, -3)$ .

Según que los vectores  $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$  sean o no coplanarios las rectas  $r$  y  $s$  se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores  $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$  son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas  $r$  y  $s$  se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 8 - 8 - 8 + 9 = -42 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$

Teniendo en cuenta que  $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, 1, -2) \cdot (3, 1, 2) = 3 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow$  las rectas  $r$  y  $s$  se cruzan perpendicularmente.

Un vector director de la recta  $t$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas  $r$  y  $s$ .

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 6j + k - 3k + 2i - 2j = 4i - 8j - 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_t = (2, -4, -1).$$

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.

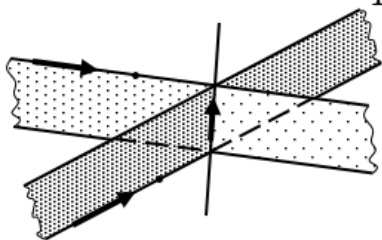
Se determinan, a continuación, los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  de las siguientes características:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{v}_t) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-x - 4(y+3) - 4(z-2) - 2(z-2) - 8x + (y+3) = 0;$$

$$-9x - 3(y+3) - 6(z-2) = 0; \quad 3x + (y+3) + 2(z-2) = 0;$$

$$3x + y + 3 + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0.$$



$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{v}_t) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x+4) + 4(y-1) - 12(z+1) - 2(z+1) + 8(x+4) + 3(y-1) = 0;$$

$$7(x+4) + 7(y-1) - 14(z+1) = 0; \quad (x+4) + (y-1) - 2(z+1) = 0;$$

$$x+4+y-1-2z-2=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y-2z+1=0.$$

La recta pedida  $t$  es la intersección de los planos obtenidos,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ :

$$t \equiv \begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=1-2\lambda \\ x+y=-1+2\lambda \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+y=1-2\lambda \\ -x-y=1-2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=2-4\lambda; \quad x=1-2\lambda. \quad y=-1+2\lambda-x=-1+2\lambda-1+2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2+4\lambda. \quad t \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

$$t \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}.$$

**Problema 4.1:**

P4.1) En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar:

i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?

iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

**Problema 4.2:**

P4.2) Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como *el Tributo de las Tres Vacas o Iror Beien Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

- (i) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?
- (ii) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?
- (iii) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

**Solución 4.1:**

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10; \quad p = \frac{1}{4} = 0,25; \quad q = \frac{3}{4} = 0,75. \quad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

i)

$$P = P(0) = \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0,0563 = \underline{0,0563}.$$

ii)

$$P = P(7) = \binom{10}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75^3 = \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} \cdot 0,000061 \cdot 0,421875 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!} \cdot 0,000026 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot 0,000026 = 120 \cdot 0,000026 = 0,003090$$

iii)

$$P = P(7) + P(8) + P(9) + P(10) =$$

$$= P(7) + \binom{10}{8} \cdot 0,25^8 \cdot 0,75^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,25^9 \cdot 0,75^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,25^{10} \cdot 0,75^0 =$$

$$= P(7) + \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0,000015 \cdot 0,5625 + 10 \cdot 0,000004 \cdot 0,75 + 1 \cdot 0,000 \cdot 1 =$$

$$= P(7) + 45 \cdot 0,000009 + 0,000029 + 0,000001 =$$

$$= 0,003090 + 0,000386 + 0,000029 + 0,000001 \Rightarrow \underline{P = 0,003506}.$$

**Solución 4.2:**

i)

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ bearneses} \rightarrow \text{no hablan eusquera} \\ 5 \text{ roncaleses} \rightarrow \text{hablan eusquera} \\ 2 \text{ suletinos} \rightarrow \text{hablan eusquera} \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} =$$

$$= \frac{p\{2 \text{ roncaleses}\} + p\{2 \text{ suletinos}\} + p\{\text{un roncalés y un suletino}\}}{C_{12,2}} =$$

$$\frac{C_{5,2} + C_{2,2} + C_{5,1} C_{2,1}}{C_{12,2}} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} + 1 + 5 \cdot 2}{\frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2} + 1 + 10}{\frac{12!}{10! \cdot 2}} = \frac{10 + 11}{\frac{12 \cdot 11}{2}} = \frac{21}{66} \Rightarrow p = \frac{7}{22} \cong 0,318.$$

ii)

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ bearneses} \rightarrow \text{hablan bearnés} \\ 5 \text{ roncaleses} \rightarrow \text{no hablan bearnés} \\ 2 \text{ suletinos} \rightarrow \text{hablan bearnés sólo con los bearneses} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{P\{2 \text{ bearneses}\} + P\{\text{un bearnés y un suletino}\}}{C_{12,2}} =$$

$$\frac{C_{5,2} + C_{5,1}C_{2,1}}{C_{12,2}} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} + 5 \cdot 2}{66} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2} + 10}{66} = \frac{10 + 10}{66} = \frac{20}{66} \Rightarrow p = \frac{10}{33} \cong 0,303.$$

iii)

Este apartado es más sencillo resolverlo por el suceso contrario, es decir, que la probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma es la unidad menos la probabilidad de que hablen los tres el mismo idioma.

La única posibilidad de que hablen el mismo idioma es que los tres sean roncaleses o que los tres sean bearneses, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguientes:

$$p = 1 - \frac{\text{casos favorables (hablen mismo idioma)}}{\text{casos posibles}} =$$

$$= 1 - \frac{p\{3 \text{ roncaleses}\} + p\{3 \text{ bearneses}\}}{C_{10,3}} = 1 - \frac{C_{5,3} + C_{5,3}}{C_{10,3}} = 1 - \frac{2 \cdot \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}}{\frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!}} =$$

$$1 - \frac{2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2!}} =$$

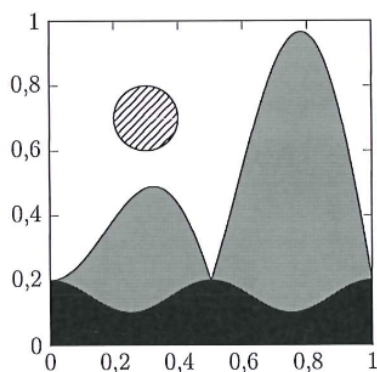
$$= 1 - \frac{40}{10 \cdot 3 \cdot 8} = 1 - \frac{4}{24} = 1 - \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{5}{6} \cong 0,833.$$

**Problema 5.1:**

**P5.1)** El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0,15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x); \quad (x-0,3)^2 + (y-0,7)^2 = \frac{1}{100}; \quad y = 0,2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?

**Solución:**

El sol (circunferencia) está asociado a:  
 $(x - 0,3)^2 + (y - 0,7)^2 = \frac{1}{100}$ , que es la circunferencia de centro

$O'(0,3; 0,7)$  y radio  $r = \frac{1}{10}$ .

El mar azul está asociado a:  $y = 0,15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x)$ , por ser:

$$y(0) = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot \cos 0 = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot 1 = 0,15 + 0,05 = 0,2.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot \cos(2\pi) = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot 1 = 0,15 + 0,05 = 0,2$$

$$y(1) = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot \cos(4\pi) = 0,15 + \frac{1}{20} \cdot 1 = 0,15 + 0,05 = 0,2.$$

Las montañas, está asociado a:  $y = 0,2 + x|\sin(2\pi x)|$ , por ser:

$$\begin{aligned} y &= 0,2 + x \cdot |\sin(2\pi x)| = \\ &\begin{cases} 0,2 + x \cdot \sin(2\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0,2 - x \cdot \sin(2\pi x) & \text{si } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por

ejemplo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 0,2 + \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0,2 + 0,25 \cdot 1 = 0,45 \\ x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 0,2 - \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = 0,2 - 0,75 \cdot (-1) = 0,95 \end{cases}$$

La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 0,2 + x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) - 0,15 - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] \cdot dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ 0,2 - x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) - 0,15 - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] \cdot dx \Rightarrow S = A + B.$$

(\*)

Se hace previamente la integral indefinida con alguna dificultad:

$$I = \int x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left[ -\frac{1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi x) \right] + \frac{1}{2\pi} \cdot \int \cos(2\pi x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{x}{2\pi} \cos(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) \Rightarrow I = \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x)].$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 0,2 + x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) - 0,15 - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 0,05 + x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] \cdot dx =$$

$$= \left\{ 0,05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \right\}_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ 0,05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \right\} -$$

$$- \left\{ 0,05x + \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \right\} =$$

$$= \left[ 0,025 + \frac{1}{4\pi^2} \cdot (\operatorname{sen} \pi - \pi \cdot \cos \pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot \operatorname{sen} \pi \right] -$$

$$- \left[ 0 + \frac{1}{4\pi^2} \cdot (\operatorname{sen} 0 - 0 \cdot \cos 0) - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen} 0 \right] = 0,025 + \frac{1}{4\pi} - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{0,1\pi+1}{4\pi}.$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ 0,05 - x \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ 0,05x - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \right. \\
&\quad \left. \operatorname{sen}(2\pi x) \right\}_{\frac{1}{2}}^1 = \\
&= \left\{ 0,05 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi) - 2\pi \cdot \cos(2\pi)] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(2\pi) \right\} - \\
&\quad - \left\{ 0,025 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot [\operatorname{sen} \pi - \pi \cdot \cos \pi] - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{sen} \pi \right\} = \\
&= \left[ 0,05 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot (0 - 2\pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot 0 \right] - \left[ 0,025 - \frac{1}{4\pi^2} \cdot (0 + \pi) - \frac{1}{40\pi} \cdot \right. \\
&\quad \left. 0 \right] = \\
&= \left( 0,05 + \frac{1}{2\pi} \right) - \left( 0,025 - \frac{1}{4\pi} \right) = 0,025 + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} = \frac{0,025 \cdot 4\pi + 2 + 1}{4\pi} \Rightarrow \\
&B = \frac{0,1\pi + 3}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (\*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = \frac{0,1\pi + 1}{4\pi} + \frac{0,1\pi + 3}{4\pi} = \frac{0,2\pi + 4}{4\pi} \Rightarrow S = \frac{0,1\pi + 2}{2\pi} u^2 \cong 0,3684 u^2.$$

Es monte visible el 36,84 % del cuadro.

**Problema 5.2:**

**P5.2)** Sea  $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$ . Demuestra que existe un punto  $c$  en  $[2, 4]$  tal que  $f'(c) = \frac{1}{2}$ .

**Solución:**

Teniendo en cuenta que  $\sin(\pi x) + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , la función  $f(x)$  es continua en  $[2, 4]$  y derivable en  $(2, 4)$  por ser una función logarítmica de una expresión positiva, por lo cual, le es aplicable el teorema de Lagrange.

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que “si una función es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ”.

Aplicado el teorema a la función  $f(x)$  en el intervalo  $(2, 4)$  con  $f'(c) = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{\log_2\{4 \cdot [\sin(4\pi)+2]\} - \log_2\{2 \cdot [\sin(2\pi)+2]\}}{2} = \\ &= \frac{\log_2\{4 \cdot [0+2]\} - \log_2\{2 \cdot [0+2]\}}{2} = \frac{\log_2 8 - \log_2 4}{2} = \frac{\log_2 2^3 - \log_2 2^2}{2} = \\ &= \frac{3 \cdot \log_2 2 - 2 \cdot \log_2 2}{2} = \\ &= \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Queda probado que  $\exists c \in (4, 2)$  tal que  $f'(c) = \frac{1}{2}$ .

## RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                            |                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)</b><br><b>FASE GENERAL</b><br><b>CURSO: 2026</b><br><b>MATERIA: MATEMÁTICAS II</b> | <b>CONVOCATORIA:</b><br><b>ORDINARIA DE</b><br><b>JUNIO</b> |
| <b>INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</b><br>En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..<br><b>Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.</b><br><b>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 1:</b><br><br><p><b>P1)</b> En Navarra, aproximadamente un 1,4 % de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del 97 % (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del 96 % (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:</p> <p>(i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?</p> <p>(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?</p> <p>(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?</p> |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 2:</b><br><br><p><b>P2)</b> Sea <math>y = f(x)</math> la función positiva que cumple la ecuación <math>(x - 1)^2 + y^2 = 1</math>.</p> <p>(i) Expresa <math>y</math> en función de <math>x</math> y demuestra que existe un punto <math>c</math> en su dominio tal que <math>f'(c) = -1</math>. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.</p> <p>(ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva <math>y = f(x)</math> y el eje <math>OX</math>?</p>                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                            |                                                             |
| <b>Problema 3:</b><br><br><p><b>P3)</b> Encuentra la ecuación continua de la recta <math>t</math> que pasa por el punto <math>A(2, 4, -2)</math> y corta a las rectas</p> $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                            |                                                             |

**Problema 4:**

- P4.1)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$  y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2 - 4)x + (a + 2)y + 2z = 4 \\ (4 - a^2)x + z = 2 \\ (a^2 - 4)x + (a + 2)y + az = -4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

- P4.2)** Dadas las siguientes matrices  $A$  y  $B$ , calcula  $|A \cdot B^{-1}|$  en función del parámetro  $t$ . ¿Para qué valores de  $t$  no existe  $|A \cdot B^{-1}|$ ?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

**Problema 5:**

- P5.1)** Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1}$$

- P5.2)** Estudia las asíntotas y simetrías de la función  $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$ .

## RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

### Problema 1:

**P1)** En Navarra, aproximadamente un 1,4 % de la población es intolerante al gluten. Un test de intolerancia al gluten tiene una sensibilidad del 97 % (es decir, si se aplicase a 100 personas intolerantes al gluten, se espera que 97 darían positivo y 3 negativo). El mismo test tiene una especificidad del 96 % (aplicando el test a 100 personas sin intolerancia, 96 darían negativo y 4 positivo). Elegimos una persona al azar:

- (i) ¿Cuál es la probabilidad de que el test le dé positivo?
- (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que le dé negativo?
- (iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si le da positivo el test, sea intolerante al gluten?

### Solución:

Llamamos  $I$  al suceso “la persona es intolerante al gluten”,  $T+$  a “el test da positivo” y  $T-$  a “el test da negativo”.

Por la información proporcionada tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(I) = 0.014; P(T+/I) = 0.97; P(T-/I) = 0.03; P(T-/ \bar{I}) = 0.96; P(T+/ \bar{I}) = 0.04.$$

(i) Debemos calcular  $P(T+)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(I)P(T+/I) + P(\bar{I})P(T+/ \bar{I}) = 0.014 \cdot 0.97 + 0.986 \cdot 0.04 = \frac{2651}{50000} = 0.05302$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé positivo vale 0.05302.

(ii) Debemos calcular  $P(T-)$ . Utilizamos la probabilidad del suceso contrario  $T+$  que ya hemos calculado.

$$P(T-) = 1 - P(T+) = 1 - 0.05302 = 0.94698$$

La probabilidad de que a una persona elegida al azar el test le dé negativo vale 0.94698

(iii) Debemos calcular  $P(I/T+)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/T+) = \frac{P(I \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(I)P(T+/I)}{P(T+)} = \frac{0.014 \cdot 0.97}{0.05302} = \frac{679}{2651} \approx 0.2561$$

La probabilidad de que una persona que ha dado positivo en el test sea intolerante al gluten es de 0.2561.

**Problema 2:**

**P2)** Sea  $y = f(x)$  la función positiva que cumple la ecuación  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ .

- (i) Expresa  $y$  en función de  $x$  y demuestra que existe un punto  $c$  en su dominio tal que  $f'(c) = -1$ . Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.
- (ii) ¿Cuánto vale el área comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y el eje  $OX$ ?

**Solución:**

(i) Despejamos  $y$  de la expresión.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x-1)^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - x^2 \Rightarrow y = +\sqrt{2x - x^2}$$

La función es  $y = +\sqrt{2x - x^2}$ .

El dominio de la función es  $[0, 2]$ .

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1 \in [0, 2] \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Existe } \sqrt{2x - x^2}$$

La función  $y = +\sqrt{2x - x^2}$  es continua en  $[1, 2]$  y derivable en  $(1, 2)$ . Aplicando el teorema

del valor medio tenemos que existe  $c \in (1, 2)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ .

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f'(c) = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 - 2^2} - \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}}{1} = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1$$

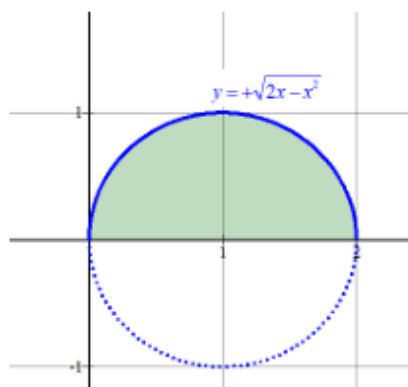
(ii) La ecuación  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  es la ecuación de una circunferencia de radio 1 y centro en

$C(1, 0)$ . La función  $y = +\sqrt{2x - x^2}$  es la parte positiva de la circunferencia.

El área contenida en la circunferencia es  $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$  unidades cuadradas.

El área comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y el eje  $OX$  es la mitad del área del círculo y

vale  $\frac{\pi}{2}$  unidades cuadradas.



**Problema 3:**

**P3)** Encuentra la ecuación continua de la recta  $t$  que pasa por el punto  $A(2, 4, -2)$  y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Solución:**

Determinamos la posición relativa de ambas rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(2, -1, 0) \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 0, 3) \\ Q_r(-1, -2, 1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos el valor del producto mixto  $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s Q_r}]$ .

$$\left. \begin{array}{l} P_s(2, -1, 0) \\ Q_r(-1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_s Q_r} = (-1, -2, 1) - (2, -1, 0) = (-3, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 3) \\ \overrightarrow{P_s Q_r} = (-3, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s Q_r}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 18 - 1 - 0 - 2 - 3 = -24 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan.

Hallamos las coordenadas de un punto genérico de cada recta.

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(2, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow B(2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha)$$

$$r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow C(-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda)$$

La recta  $t$  debe contener los puntos A, B y C. Para ello los puntos deben estar alineados y para ello los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  deben tener coordenadas proporcionales. Hallamos los valores de  $\alpha$  y  $\lambda$  para que esto ocurra.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 4, -2) \\ B(2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) - (2, 4, -2) = (-\alpha, -5 + 2\alpha, \alpha + 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 4, -2) \\ C(-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1 + \lambda, -2, 1 + 3\lambda) - (2, 4, -2) = (-3 + \lambda, -6, 3 + 3\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{-\alpha}{-3 + \lambda} = \frac{-5 + 2\alpha}{-6} = \frac{\alpha + 2}{3 + 3\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\alpha}{-3 + \lambda} = \frac{-5 + 2\alpha}{-6} \rightarrow 6\alpha = 15 - 6\alpha - 5\lambda + 2\lambda\alpha \rightarrow 12\alpha + 5\lambda - 2\alpha\lambda = 15 \\ \frac{-5 + 2\alpha}{-6} = \frac{\alpha + 2}{3 + 3\lambda} \rightarrow -15 + 6\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = -6\alpha - 12 \rightarrow 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12\alpha + 5\lambda - 2\alpha\lambda = 15 \rightarrow (\times 3) \\ 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 36\alpha + 15\lambda - 6\alpha\lambda = 45 \\ 12\alpha - 15\lambda + 6\alpha\lambda = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{48\alpha}{48\alpha} = 48 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3)}$$

La recta  $t$  buscada es la recta que pasa por el punto A y que tiene como vector director  $\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 3) \\ A(2, 4, -2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{3}$$

**Problema 4:**

**P4.1)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$  y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2 - 4)x + (a + 2)y + 2z = 4 \\ (4 - a^2)x + z = 2 \\ (a^2 - 4)x + (a + 2)y + az = -4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

**Solución:**

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a \end{pmatrix}$

y como matriz ampliada  $A/B = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 & 4 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a & -4 \end{pmatrix}$ .

Usamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado pero más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 & 4 \\ 4 - a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2 - 4 & a + 2 & a & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ 4 - a^2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ a^2 - 4 \quad a + 2 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad a + 2 \quad 3 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ a^2 - 4 \quad a + 2 \quad a \quad -4 \\ -a^2 + 4 \quad -a - 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a - 2 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} a^2 - 4 & a + 2 & 2 & 4 \\ 0 & a + 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & a - 2 & -8 \end{array} \right) \begin{matrix} A \\ A/B \end{matrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 - 4 & a + 2 & 2 \\ 0 & a + 2 & 3 \\ 0 & 0 & a - 2 \end{vmatrix} = (a^2 - 4)(a + 2)(a - 2) = (a + 2)^2(a - 2)^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a + 2)^2(a - 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

**CASO 1.**  $a \neq -2$  y  $a \neq 2$ 

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene una única solución.

**CASO 2.**  $a = -2$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda  $\left( \begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 0 \ 2}^A & & & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \underbrace{-4 \ -8}_{A/B} & \end{array} \right)$ . La columna tercera es el doble de la columna segunda. El rango

de la matriz  $A$  y  $A/B$  es 1, menor que el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema tiene infinitas soluciones. Determinamos la expresión de estas soluciones.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 0 \ 2}^A & & & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \underbrace{-4 \ -8}_{A/B} & \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2z = 4 \\ 3z = 6 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \lambda; \ \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}}$$

### CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda  $\left( \begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ 4 \ 2}^A & & & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \underbrace{0 \ -8}_{A/B} & \end{array} \right)$ .

El rango de  $A$  es 2 y el de  $A/B$  es 3. Los rangos son distintos y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema no tiene solución.

**Problema 4.2:**

**P4.2)** Dadas las siguientes matrices  $A$  y  $B$ , calcula  $|A \cdot B^{-1}|$  en función del parámetro  $t$ . ¿Para qué valores de  $t$  no existe  $|A \cdot B^{-1}|$ ?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Para que exista la inversa de  $B$  su determinante debe ser distinto de cero.

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a & & \\ t & 4t & t^2 \\ -t & -3t & -t^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -t & t-2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2(t-1) \end{aligned}$$

El determinante de  $B$  se anula para  $t=0$  y para  $t=1$ .

La expresión  $|A \cdot B^{-1}|$  solo existe para valores de  $t$  distintos de 0 y de 1.

Calculamos el determinante de la matriz  $A$ .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ -t+1 & -t^2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a & & \\ t+1 & t^2 & 4 \\ -t+1 & -t^2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ 0 & t-2 & -t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(t+1)(t-2) \end{aligned}$$

Sabemos que  $|A| = 2(t+1)(t-2)$  y  $|B| = t^2(t-1)$ . También sabemos que  $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ .

Calculamos la expresión de  $|A \cdot B^{-1}|$  para valores de  $t$  distintos de 0 y 1.

$$|A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2(t+1)(t-2)}{t^2(t-1)}$$

**Problema 5.1:****P5.1)** Calcula la siguiente integral indefinida y el límite:

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1}$$

**Solución:**

Calculamos la integral indefinida usando un cambio de variable.

$$\int \frac{e^2 \cdot e^{\tan(x)}}{4 \cdot \cos^2(x)} dx = \frac{e^2}{4} \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \tan(x) = t \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \cos^2(x) dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^2}{4} \int \frac{e^t}{\cos^2(x)} \cos^2(x) dt = \frac{e^2}{4} \int e^t dt = \frac{e^2}{4} e^t = \boxed{\frac{e^2}{4} e^{\tan(x)} + K}$$

Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{4^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{(2^2)^{\frac{x-2}{2x+1}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2}{2^{\frac{2x-4}{2x+1}} - 1} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{4}{-\infty}}{2 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{2+0}{2+0} = 1$$

$$\dots = \frac{2^{-\infty} - 2}{2^1 - 1} = \frac{\frac{1}{2^{+\infty}} - 2}{1} = \frac{1}{+\infty} - 2 = 0 - 2 = \boxed{-2}$$

**Problema 5:**

**P5.2)** Estudia las asíntotas y simetrías de la función  $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$ .

**Solución:**

Estudiamos la simetría de la función.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2 + 2}{-x - 2} = \frac{3x^2 + 2}{-x - 2}$$

$$-f(x) = -\frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \frac{3x^2 + 2}{-x + 2}$$

La función no presenta ningún tipo de simetría, ni par ni impar.

El dominio de la función son todos los números reales menos los valores que anulan el denominador. El dominio de la función es  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

**Asíntota vertical.**  $x = a$

¿  $x = 2$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \frac{3 \cdot 2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{14}{0} = \infty$$

$x = 2$  es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x - 2} - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{6 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{6 + 0}{1 - 0} = \frac{6 + 0}{1 - 0} = 6$$

La recta  $y = 3x + 6$  es asíntota oblicua de la función.



La gráfica es simétrica respecto del punto  $(2, 12)$ .

Para  $x = 2 - 1 = 1$  tenemos que  $f(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 2}{1 - 2} = -5$ .

Para  $x = 2 + 1 = 3$  tenemos que  $f(3) = \frac{3 \cdot 3^2 + 2}{3 - 2} = 29$ .

Se cumple que  $\frac{-5 + 29}{2} = 12$ .

Para  $x = 2 - 2 = 0$  tenemos que  $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 2}{0 - 2} = -1$ .

Para  $x = 2 + 2 = 4$  tenemos que  $f(4) = \frac{3 \cdot 4^2 + 2}{4 - 2} = 25$ .

Se cumple que  $\frac{-1 + 25}{2} = 12$ .

Y así se cumple para cualquier par de valores simétricos respecto de  $x = 2$ .